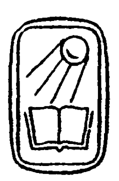
Н. М. БЕЛЯЕВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ИЗДАНИЕ ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

6.05
Б 43
УДК 620.10.

Николай Михайлович Беляев

Сопротивление материалов
М., 1965 г., 856 стр. с илл.

Редактор *И. К. Снитко*

Техн. редактор *А. П. Колесникова* Корректор *О. А. Сигал*

Печать с матриц. Подписано к печати 21/V 1965 г. Бумага 60×90$^{1}/_{16}$. Физич. печ. л. 53,5. Усл. печ. л. 53,5. Уч.-изд. л. 60,65. Тираж 75 000 экз. Т-06947. Цена книги 1 р. 92 к. Заказ № 1687.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71 Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по печати, Гатчинская, 26.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТДЕЛ II.
СЛОЖНЫЕ СЛУЧАИ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ.

ОТДЕЛ III.

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ.

ОТДЕЛ IV.

ИЗГИБ. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ БАЛОК.

ОТДЕЛ V.

ПОЛНАЯ ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ.

ОТДЕЛ VI.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ.

ОТДЕЛ VII.

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ.

ОТДЕЛ IX.
УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ.

ОТДЕЛ X.
ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ.

При составлении книги в первую очередь имелось в виду практическое значение сопротивления материалов для инженера. Поэтому обращено особое внимание на правильную последовательность расположения материала.

При решении основной задачи сопротивления материалов — выбора материала и поперечных размеров для элементов сооружений и машин — необходимо, помимо умения вычислять напряжения, знание механических свойств реальных материалов. Это влечёт за собой необходимость экспериментальных исследований в лаборатории. В связи с этим в книге отведено значительное место изучению механических свойств материалов и рассмотрению физической картины явления при различных деформациях. В конце книги помещён ряд подробных таблиц, заключающих в себе данные о механических свойствах материалов. Описание же лабораторных работ, являющихся неотъемлемой частью прохождения курса сопротивления материалов, вынесено в отдельное руководство, так как программа и объём их определяются в значительной степени местными условиями оборудования лабораторий.

Принятое в настоящей книге совместное рассмотрение аналитических и физических вопросов должно приучить студента видеть в формулах отражение физической стороны явления при разных деформациях и одновременно ознакомить его с сопротивлением реальных материалов. Глубокое знание прочности применяемых материалов и не менее глубокое и ясное представление о распределении напряжений в элементах конструкций — вот что должно дать сопротивление материалов инженеру, чтобы достаточно вооружить его при решении практических задач.

Книга предназначена для студентов и аспирантов. Она имеет целью дать не только теоретический материал, но и показать применение полученных результатов на примерах и дать материал для самостоятельной домашней работы. Поэтому каждый раздел сопровождается задачами; приведены также выдержки из существующих технических условий.

Данные во всех задачах приведены в алгебраической и числовой форме. Студент никогда не должен торопиться с использованием

чисел при решении задач. Как правило, надо стремиться к тому, чтобы решить задачу до конца в алгебраическом виде. Однако доведение её до числового результата обязательно; при этом все арифметические выкладки надо вести, сохраняя не более трёх-четырёх значащих цифр, считая от левой руки к правой.

Проф. Н. Беляев

18 мая 1939 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ.

Настоящее пятое издание курса проф. Н. М. Беляева выходит в свет через пять лет после смерти автора и через четыре года после опубликования предыдущего издания, подготовленного к печати ещё самим Н. М. Беляевым.

Наиболее существенные изменения курса, внесённые в книгу, состоят в следующем.

Значительно полнее отражена роль отечественных учёных в развитии науки о сопротивлении материалов. Глава о материалах, применяемых в инженерном деле, заменена таблицами в приложении. В связи с необходимостью отразить современное состояние науки о сопротивлении материалов, значительно переработано изложение вопросов прочности, расчёта сварных соединений и устойчивости элементов конструкций.

Чтобы удовлетворить программно-методическим требованиям и из-за необходимости значительного сокращения, пришлось частично переработать следующие разделы курса: основания для выбора коэффициента запаса прочности; гибкие нити; сложное напряжённое состояние; контактные напряжения; сдвиг и кручение; расчёт составных балок; определение деформаций при изгибе; кривые стержни; напряжения при ударе. Существенно дополнены главы, в которых рассмотрены: общий случай определения напряжений при сложном действии сил; устойчивость плоской формы изгиба; расчёт вращающихся дисков; вопросы колебаний упругих систем.

Коллектив, подготовивший настоящее издание, состоит из сотрудников кафедр сопротивления материалов Ленинградского института инженеров железнодорожного транспорта и Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина, т. е. кафедр, возглавлявшихся проф. Н. М. Беляевым; этот коллектив старался сохранить порядок изложения, методику и стиль предыдущих изданий курса.

Между авторами переработки проделанная работа распределяется следующим образом: доц. Л. А. Белявскому принадлежит переработка глав XV—XXV и глав XXXI—XXXII; доц. Я. И. Кипнису — глав VII—XIV и XXXIII—XXXIV; доц. Н. Ю. Кушелеву — глав I—VI и приложений; доц. А. К. Синицкому — глав XXVI—XXIX и XXXV—XXXVIII *).

---

*) Нумерация глав дана по седьмому и восьмому изданиям.

Общее руководство переработкой и редактирование проведены проф. В. К. Качуриным.

Ученики и сотрудники Николая Михайловича Беляева надеются, что и для этого издания, подготовленного ими к печати, будут справедливы слова покойного академика Б. Г. Галёркина, которыми он закончил своё предисловие к предыдущему изданию настоящей книги:

«Вместе с задачником по сопротивлению материалов и руководством к лабораторным работам по сопротивлению материалов того же автора настоящий курс охватывает полностью данный предмет. Все эти книги связаны общей идеей — идеей практических расчётов на прочность, производимых на строгой научной основе. В этом духе всегда воспитывал Николай Михайлович своих многочисленных учеников и сотрудников, и в этом же духе после его смерти будет воспитывать их и его курс».

Проф. В. К. Качурин

ПРЕДИСЛОВИЕ К СЕДЬМОМУ ИЗДАНИЮ.

В седьмое, вновь переработанное издание курса проф. Н. М. Беляева, по сравнению с пятым изданием, внесены следующие изменения и дополнения. Определение деформаций по методу Мора — Верещагина изложено несколько полнее. Добавлена глава о расчёте тонкостенных стержней. При расчётах на усталость введён учёт масштабного фактора. Даны методы технических расчётов на ползучесть. Кроме того, заново просмотрен весь текст, который местами сокращён, а местами дополнен и обновлён.

Распределение работы между авторами переработки сохранено таким же, как и в пятом издании. Новая глава (XXX по новой нумерации) о расчёте тонкостенных стержней написана доц. Я. И. Кипнисом, XXXIX глава о расчётах на ползучесть — доц. А. К. Синицким.

Авторы переработки выражают свою благодарность проф. А. Н. Митинскому, а также всем другим лицам, сообщившим свои замечания по предыдущему изданию курса.

Проф. В. К. Качурин

В четырнадцатом издании сортамент прокатной стали в приложении заменён на современный. В соответствии с этим пересчитаны все примеры в курсе, связанные с данными старого сортамента.

Проф. В. К. Качурин

ОТДЕЛ I.
ВВЕДЕНИЕ. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.

ГЛАВА I.
ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Задачи сопротивления материалов.

При проектировании сооружений и машин инженеру приходится выбирать материал и поперечные размеры для каждого элемента конструкции так, чтобы он вполне надёжно, без риска разрушиться или исказить свою форму, *сопротивлялся* действию внешних сил, передающихся на него от соседних частей конструкции, т. е. чтобы была обеспечена нормальная работа этого элемента. Основания для правильного решения этой задачи даёт инженеру наука о *сопротивлении материалов.*

Эта наука изучает поведение различных материалов при действии на них сил и указывает, как подобрать для каждого элемента конструкции надлежащий материал и поперечные размеры при условии полной надёжности работы и наибольшей дешевизны конструкции.

Иногда сопротивлению материалов приходится решать видоизменённую задачу — проверять достаточность размеров уже запроектированной или существующей конструкции.

Требования надёжности и наибольшей экономии противоречат друг другу. Первое обычно ведёт к увеличению расхода материала, второе же требует снижения этого расхода. Это противоречие является важнейшим элементом научной методики, обусловливающей развитие сопротивления материалов.

Часто наступает момент, когда существующие материалы и методы проверки прочности не в состоянии удовлетворить потребностям практики, ставящей на очередь решение новых задач (в наше время сюда относятся использование больших скоростей в технике вообще, в воздухоплавании в частности, перекрытие больших пролётов, динамические задачи и др.). Тогда начинаются поиски новых материалов, исследование их свойств, улучшение и создание новых методов расчёта и проектирования. Прогресс науки о сопротивлении материалов должен поспевать за общим прогрессом техники.

В некоторых случаях инженеру, помимо основных требований — надёжности и наибольшей экономии, — приходится при выполнении конструкции удовлетворять и другим условиям, например, требованиям быстроты постройки (при восстановлении разрушенных соору-

жений), минимального веса (при конструировании самолётов) и т. п. Эти обстоятельства также отражаются на выборе материала, размеров и форм частей конструкции.

Начало развития сопротивления материалов как науки иногда относят к 1638 г. и связывают с именем Галилео Галилея, знаменитого итальянского учёного. Галилей был профессором математики в Падуе. Он жил в период разложения феодального строя, развития торгового капитала, международных морских сношений и зачатков горной и металлургической промышленности.

Новая экономика того времени поставила на очередь решение ряда новых технических проблем. Оживление внешних торговых сношений поставило задачу увеличения тоннажа судов, а это повлекло за собой необходимость изменения их конструкции; одновременно стал вопрос о реконструкции и создании новых внутренних водных путей сообщения, включая устройство каналов и шлюзов. Эти технические задачи не могли быть решены простым копированием существовавших раньше конструкций судов и сооружений; оказалось необходимым научиться путём расчёта оценивать прочность элементов конструкции в зависимости от их размеров и величины действующих на них нагрузок.

Значительная часть работ Галилея была посвящена решению задач о зависимости между размерами балок и других стержней и теми нагрузками, которые могут выдержать эти элементы конструкции. Он указал, что полученные им результаты могут «принести большую пользу при постройке крупных судов, в особенности при укреплении палуб и покрытий, так как в сооружениях этого рода лёгкость имеет огромное значение». Исследования Галилея опубликованы в его книге «Discorsi e Dimostrazioni matematiche» (1638, Лейден, Голландия).

Дальнейшее развитие сопротивления материалов шло параллельно развитию техники строительства и машиностроения и связано с целым рядом работ выдающихся учёных-математиков, физиков и инженеров. Среди них значительное место занимают русские и советские учёные.

Большой вклад в науку о сопротивлении материалов внёс в XVIII веке действительный член Петербургской Академии наук Леонард Эйлер, решивший задачу об устойчивости сжатых стержней.

В XIX веке мировую известность приобрели работы Д. И. Журавского и Х. С. Головина. В связи с проектированием и постройкой ряда мостов на строившейся Николаевской, ныне Октябрьской, железной дороге между Петербургом и Москвой Д. И. Журавский решил ряд важных и интересных вопросов, связанных с прочностью балок при их изгибе. Х. С. Головин впервые правильно решил задачу о прочности кривых стержней. В мировую науку прочно вошли работы Ф. С. Ясинского по вопросам устойчивости элементов конструкций, вызванные к жизни изучением причин разрушения неко-

торых мостов. Проф. П. И. Собко организовал крупнейшую лабораторию по испытанию материалов в Петербургском институте инженеров путей сообщения.

С начала XX века роль русских учёных в сопротивлении материалов стала ведущей. Проф. И. Г. Бубнов явился основоположником современной науки о прочности корабля. Академик А. Н. Крылов, помимо дальнейшего развития задач о расчёте корабля, известен крупнейшими исследованиями в области динамических расчётов. Проф. Н. П. Пузыревский создал новую методику расчёта балок на упругом основании.

Из многочисленных трудов академика Б. Г. Галёркина достаточно упомянуть работы по развитию вариационных методов механики, общему решению пространственной задачи теории упругости и расчёту плит. Многих вопросов расчёта на прочность касались и работы С. П. Тимошенко.

В советское время передовая роль нашей страны закрепилась ещё в большей степени. Продолжали работать академики А. Н. Крылов и Б. Г. Галёркин. Академик А. Н. Динник опубликовал ряд крупных работ по устойчивости элементов конструкций. Проф. Н. М. Герсеванов плодотворно работал в области механики грунтов, науки, решающей задачи прочности и устойчивости оснований и фундаментов сооружений и машин.

Профессора П. Ф. Папкович и Ю. А. Шиманский стали во главе школы учёных, занимающихся вопросами прочности кораблей. Проф. Н. Н. Давиденков создал, совместно со своими учениками, новую теорию, объясняющую причины разрушения материалов. Большое значение имеют и его труды по вопросам динамической прочности и разрушения при ударе. Усилиями наших инженеров разработана новая теория расчёта железобетонных конструкций, которая более правильно, чем теории, принятые за границей, отражает действительный характер работы этих конструкций и при обеспеченной прочности даёт значительную экономию размеров. Академик Н. И. Мусхелишвили развил современные методы теории функций комплексного переменного и теории сингулярных интегральных уравнений и применил их к решению ряда задач. Проф. В. З. Власов создал новую оригинальную теорию расчёта тонкостенных оболочек и тонких стержней, имеющих широкое применение в различных конструкциях.

§ 2. Классификация сил, действующих на элементы конструкций.

При работе сооружений и машин их части воспринимают внешние нагрузки и действие их передают друг другу. Плотина воспринимает свой собственный вес и давление удерживаемой ею воды и передаёт эти силы на основание. Стальные фермы моста воспринимают

от колёс через рельсы вес поезда и передают его на каменные опоры; последние, в свою очередь, передают нагрузку на грунт основания. Давление пара в цилиндре паровой машины передаётся на шток поршня. Сила тяги паровоза передаётся поезду через стяжку, соединяющую тендер с вагонами. Таким образом, силы, воспринимаемые элементами конструкции, представляют собой либо *объёмные силы*, действующие на каждый элемент объёма (собственный вес), либо *силы взаимодействия*[1]) между рассматриваемым элементом и соседними или этим элементом и прилегающей к нему средой (вода, пар, воздух). Говоря, что к той или другой части конструкции приложена внешняя сила, мы будем понимать под этим термином передачу давления (движения) на рассматриваемую часть от окружающей её среды или от соседних частей конструкции.

Классификацию сил можно произвести по нескольким признакам.

Мы различаем силы *сосредоточенные* и *распределённые*.

Сосредоточенными силами называются давления, передающиеся на элемент конструкции через площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами всего элемента, например давление колёс подвижного состава на рельсы.

При расчётах, благодаря малости площадки, передающей давление, обычно считают сосредоточенную силу приложенной в точке. Надо помнить, что это — приближённое представление, вводимое лишь для упрощения расчёта; *через точку никакого давления фактически передать нельзя*. Однако неточность, вызываемая таким приближённым представлением, настолько мала, что ею обычно на практике можно пренебречь.

Распределёнными нагрузками называются силы, приложенные непрерывно на протяжении некоторой длины или площади конструкции. Слой песка одинаковой толщины, насыпанный на тротуар моста, представляет собой нагрузку, равномерно распределённую по некоторой площади; при неодинаковой толщине слоя мы получим неравномерно распределённую сплошную нагрузку. Собственный вес балки какого-либо перекрытия представляет собой нагрузку, распределённую по длине элемента.

Сосредоточенные нагрузки измеряются в единицах силы (тоннах, килограммах); распределённые по площади нагрузки выражаются в единицах силы, отнесённых к единице площади (*т/м*², *кг/см*² и т. п.); распределённые по длине элемента — в единицах силы, отнесённых к единице длины (*кг/м*).

Далее нагрузки можно разделить на *постоянные* и *временные*. Первые действуют во всё время существования конструкции, например собственный вес сооружения. Временные нагрузки

---

[1]) Строго говоря, вес тела есть также сила взаимодействия между телом и землёй.

действуют на конструкцию лишь в течение некоторого промежутка времени. Примером может служить вес поезда, идущего по мосту.

По характеру действия нагрузки можно разделить на *статические* и *динамические*.

Статические нагружают конструкцию постепенно; будучи приложены к сооружению, они не меняются или меняются незначительно; таково большинство нагрузок в гражданских и гидротехнических сооружениях. При передаче статических нагрузок на конструкцию все её части находятся в равновесии; *ускорения элементов конструкции отсутствуют* или настолько малы, что ими можно пренебречь.

Если же эти ускорения значительны и изменение скорости элементов машины или другой конструкции происходит за сравнительно небольшой период времени, то мы имеем дело с приложением *динамических* нагрузок.

Примерами таких нагрузок могут служить *внезапно приложенные* нагрузки, *ударные* и *повторно-переменные*.

Внезапно приложенные нагрузки передаются на сооружение сразу полной своей величиной. Таковы давления колёс паровоза, входящего на мост.

Ударные нагрузки возникают при быстром изменении скорости соприкасающихся элементов конструкции, например при ударе бабы копра о сваю при её забивке.

Повторно-переменные нагрузки действуют на элементы конструкции, повторяясь значительное число раз. Таковы, например, повторные давления пара, попеременно растягивающие и сжимающие шток поршня и шатун паровой машины. Во многих случаях нагрузка представляет собой комбинацию нескольких видов динамических воздействий.

В дальнейшем мы в первую очередь займёмся вопросом о сопротивлении материалов *статическому* действию сил, когда вопрос о подборе сечения и материала для каждой части конструкции решается наиболее просто.

В отделе X будут рассмотрены некоторые случаи действия *динамических* нагрузок, которые на практике встречаются не менее часто, чем статические, и требуют особого изучения, так как и результаты воздействия таких нагрузок на элемент конструкции оказываются иными, чем статических, и материал иначе сопротивляется этим воздействиям.

Заканчивая классификацию сил, действующих на элемент конструкции, можно выделить воздействие тех её частей, на которые этот элемент опирается; эти силы называются *реакциями*; в начале расчёта они оказываются неизвестными и определяются из условия, что каждая часть конструкции находится в равновесии под действием всех приложенных к ней сил и реакций.

§ 3. Понятие о деформациях и напряжениях.

В теоретической механике (статике) изучается равновесие абсолютно твёрдого тела; этого представления о материале достаточно для решения поставленной в статике задачи — определения условий, при которых возможно взаимное уравновешивание приложенных к телу сил. При изучении сопротивления материалов действию этих сил такого грубо приближённого представления о свойствах материала уже недостаточно; мы должны учесть, что абсолютно твёрдых тел в природе не существует.

Как элементы конструкций, так и конструкции в целом при действии внешних сил в большей или меньшей степени изменяют свои размеры и форму и в конце концов могут разрушиться. Это изменение носит общее название — *деформация.*

Величины и характер деформаций связаны со структурой, строением применяемых нами материалов. Все эти материалы могут быть разбиты на два класса: *кристаллические* и *аморфные.*

Кристаллические материалы состоят из громадного количества очень малых кристаллических зёрен. Каждое из этих зёрен представляет собой систему атомов, размещённых на весьма близких расстояниях друг от друга правильными рядами. Эти ряды образуют так называемую *кристаллическую решётку.* В *аморфных* материалах мы не имеем правильного расположения атомов. Атомы удерживаются в равновесии силами взаимодействия. Деформация тел происходит за счёт изменения расположения атомов, их сближения или удаления.

Деформации разделяются на *упругие* и *остаточные. Упругими* деформациями называются такие изменения формы и размеров элементов, которые исчезают после удаления вызвавших их сил, — тело полностью восстанавливает свою прежнюю форму. Эти деформации связаны лишь с упругими искажениями решётки атомов. Опыт показывает, что упругие деформации наблюдаются, пока величина внешних сил не превзошла известного предела.

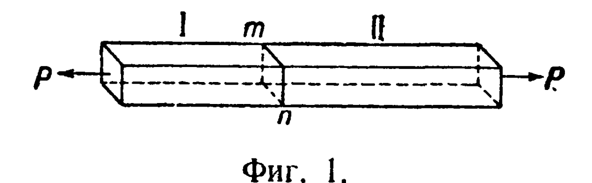
Если же внешние силы перешли этот предел, то после их удаления форма и размеры элемента не восстанавливаются в первоначальном виде; оставшиеся разности размеров называются *остаточными* деформациями. Эти деформации в кристаллических материалах связаны с необратимыми перемещениями одних слоёв кристаллической решётки относительно других. При удалении внешних сил сместившиеся слои атомов сохраняют своё положение.

Смещение атомов при деформации материала под действием внешних сил сопровождается изменением сил взаимодействия между атомами — сил притяжения и отталкивания.

В элементах конструкции под действием внешних сил *возникают дополнительные внутренние силы, сопровождающие деформацию материала.* Эти внутренние силы сопротивляются стремлению внеш-

них сил разрушить элемент конструкции, изменить его форму, отделить одну его часть от другой. Они стремятся восстановить прежнюю форму и размеры деформированной части конструкции. Чтобы численно характеризовать степень воздействия внешних сил на деформированный элемент, нам необходимо научиться измерять и вычислять величину внутренних междуатомных сил, возникших как результат деформации, вызванной определёнными внешними силами.

Для этого в сопротивлении материалов пользуются так называемым методом сечений, который мы поясним на следующем примере. Представим себе стержень (фиг. 1) под действием двух равных и прямо противоположных сил P и мысленно разделим его на две части I и II плоскостью mn. Под действием сил P обе половины стержня стремятся разъединиться и удерживаются вместе за счёт сил взаимодействия между атомами, находящимися по обе стороны плоскости mn. Равнодействующая этих сил взаимодействия называется *усилием*, передающимся через сечение mn от одной части стержня на другую, и обратно. Внутренняя сила взаимодействия, приходящаяся на *единицу площади*, выделенную у какой-либо *точки* сечения mn, называется *напряжением* в этой точке по проведённому сечению. Напряжения, действующие от части II на I и от I на II, по закону равенства действия и противодействия равны между собой.



Фиг. 1.

Через одну и ту же точку стержня можно провести целый ряд сечений, разделяющих стержень различным образом на две части. Величина и направление напряжений, передающихся в *рассматриваемой точке* от одной части на другую, будут различными в зависимости от того, как проведён разрез.

Таким образом, нельзя говорить о напряжении, не указывая сечения, через которое происходит передача этого напряжения. Поэтому говорят о «напряжении по такой-то площадке, по такому-то сечению». Так как напряжение представляет собой силу, *приходящуюся на единицу* площади, то оно измеряется в единицах силы, отнесённых к единице площади: *кг/см²*, *кг/мм²*, *т/см²*, *т/м²* и т. д.

Обозначать напряжения в дальнейшем мы будем буквами p, σ и τ; обозначение p применяется при любом наклоне напряжения к рассматриваемой площадке, буквой σ обозначают напряжение *нормальное* к площадке, а τ — лежащее в её плоскости, так называемое *касательное* напряжение.

Величина напряжений в каждой точке и является мерой внутренних сил, которые возникают в материале как результат деформации, вызванной внешними силами. Усилие, передающееся от части I стержня на II (фиг. 1), удерживает часть II в равновесии, т. е. уравновешивает систему внешних сил, приложенных к части II.

Усилие же может быть выражено через искомые напряжения; если мы выделим элемент площади dF в проведённом сечении, то элементарное усилие, действующее на эту часть площади, будет равно $p\,dF$, при этом p — напряжение в той точке, где выделен элемент площади. Сумма этих элементарных усилий и даст полное усилие, передающееся через проведённое сечение.

Таким образом, для вычисления напряжений надо мысленно разделить рассматриваемый элемент конструкции сечением на две части и составить условия равновесия для системы сил, приложенных к одной из отсечённых частей; эта система будет включать в себя внешние силы, приложенные к выделенной части стержня, а также усилие, передающееся через проведённое сечение и выраженное через искомые напряжения. В этом и состоит метод сечений, которым в дальнейшем мы будем постоянно пользоваться.

Заметим, что в сопротивлении материалов термин «напряжение» применяется очень часто вместо термина «внутренние силы взаимодействия между частями стержня», поэтому мы будем говорить о «равномерном или неравномерном распределении напряжений по сечению», об «усилии как сумме напряжений»; надо помнить, что эти выражения являются в известной мере условными; например, для вычисления усилия нельзя просто суммировать напряжения в разных точках; надо, как это указано выше, вычислить в каждой точке сечения *элементарное усилие*, передающееся через малую площадку dF, а потом суммировать уже эти слагаемые. Резюмируя изложенное, можно сказать, что результатом действия внешних сил на элементы конструкции является возникновение в них деформаций, сопровождаемых напряжениями.

Сопротивление материалов, изучая зависимость между внешними силами, с одной стороны, и вызванными ими деформациями и напряжениями — с другой, даёт возможность решить стоящую перед инженером задачу — противопоставить действию внешних сил стержень достаточных размеров и из наиболее подходящего материала. В следующем параграфе изложен план этого решения.

§ 4. План решения основной задачи сопротивления материалов.

При выборе размеров и материала для того или иного элемента конструкции мы должны обеспечить известный запас против возможности его разрушения или остающегося изменения формы. Элемент должен быть так спроектирован, чтобы наибольшие напряжения, возникающие в нём при его работе, были во всяком случае меньше тех, при которых материал разрушается или получает остаточные деформации.

Величина напряжений, достижение которых обусловливает разрушение материала, называется *пределом прочности* или *временным сопротивлением*; его мы будем обозначать теми же буквами, что и

напряжения, но с индексом «в». Величина же напряжений, при превышении которых материал получает незначительные, заранее обусловленные, остаточные деформации, называется *пределом упругости.* Эти величины являются механическими характеристиками сопротивления материала разрушению и остаточному изменению формы[1]).

Чтобы обеспечить сооружение от риска разрушения, мы должны допускать в его элементах напряжения, которые будут по своей величине составлять лишь часть предела прочности материала.

Величину *допускаемых напряжений* обозначают той же буквой, что и напряжение, но заключённой в прямые скобки; она связана с пределом прочности $p_в$ равенством

$$[p]=\frac{p_в}{k},$$

где k — так называемый *коэффициент запаса прочности* — число, показывающее, во сколько раз допущенные нами в конструкции напряжения меньше предела прочности материала. Коэффициент k будем в дальнейшем называть просто коэффициентом запаса. Величина этого коэффициента колеблется на практике в пределах от 1,7—1,8 до 8—10 и зависит от условий, в которых работает конструкция. Подробнее этот вопрос разобран в §§ 17 и 18.

Обозначая наибольшие напряжения, которые возникнут при действии внешних сил в проектируемом элементе, буквой p_{max}, мы можем выразить основное требование, которому должны удовлетворять материал и размеры этого элемента, неравенством

$$p_{max}\leqslant[p]. \qquad (1.1)$$

Это — так называемое *условие прочности: действительные напряжения должны быть не больше допускаемых.*

Теперь мы можем составить план решения задач сопротивления материалов. Необходимо:

1) выяснить величину и характер действия всех внешних сил, приложенных к проектируемому элементу, включая и реакции;

2) выбрать материал, наиболее отвечающий назначению конструкции и характеру действия внешних сил, и установить величину допускаемого напряжения;

3) задаться размерами поперечного сечения элемента в числовой или алгебраической форме и вычислить величину наибольших действительных напряжений p_{max}, которые в нём возникнут;

4) написать условие прочности $p_{max}\leqslant[p]$ и, пользуясь им, найти величину поперечных размеров элемента или проверить достаточность уже принятых.

В последнее время эта схема решения задач сопротивления материалов в некоторых случаях видоизменяется; встречаются конструк-

[1]) Уточнение понятий «предел прочности» и «предел упругости» сделано в § 11.

ции, в которых запас прочности *для всей конструкции в целом* оказывается бо́льшим, чем для *материала в наиболее напряжённом месте.* Исчерпание грузоподъёмности материала в этом месте иногда не влечёт за собой исчерпания грузоподъёмности всей конструкции в целом.

Условие прочности для материала $p_{max} \leqslant [p]$ заменяется в этих случаях условием прочности для всей конструкции в целом:

$$P \leqslant P_{доп} = \frac{P_в}{k_1},$$

где P — нагрузка, действующая на конструкцию, $P_{доп}$ — её допускаемая величина, а $P_в$ — предельная, разрушающая всю конструкцию нагрузка. Таким образом, расчёт по допускаемым напряжениям заменяется расчётом по допускаемым нагрузкам.

В этом случае необходимо:

1) выяснить величину и характер действия всех внешних сил, приложенных к конструкции;

2) выбрать материал, наиболее отвечающий назначению конструкции и характеру внешних сил, и установить величину коэффициента запаса;

3) задаться размерами поперечных сечений элементов сооружения в числовой или алгебраической форме и установить допускаемую нагрузку;

4) написать условие прочности: $P \leqslant P_{доп}$ и, пользуясь им, найти величину поперечных размеров элементов конструкции или проверить достаточность уже принятых.

В ряде случаев, как мы увидим дальше (§ 27), оба метода решения дают совпадающие результаты.

Мы будем, как правило, пользоваться общепринятым пока методом расчёта по допускаемым напряжениям, но параллельно будем излагать и способ расчёта по допускаемым нагрузкам в особенности там, где он даёт отличные от первого способа результаты.

В большинстве случаев условие прочности должно быть дополнено поверками на устойчивость и жёсткость. Первая поверка должна обеспечить невозможность общего изменения элементами конструкции намеченной для них формы равновесия, вторая — должна ограничить их деформации.

При решении задач сопротивления материалов приходится применять и методы теоретической механики, и экспериментальные методы. При определении внешних сил приходится основываться на уравнениях статики; в случае статически неопределимых конструкций необходимо производить, как это будет показано ниже (§ 19), вычисление деформаций материала, что возможно лишь при наличии надёжных результатов лабораторных опытов, в которых определялись зависимости между деформациями и силами или напряжениями.

Установление допускаемых напряжений требует знания предела прочности материала и других его механических характеристик, что может быть получено также при помощи экспериментальных исследований материала в специальных лабораториях испытания материалов. Наконец, вычисление действительных напряжений требует как применения методов математического анализа и механики, так и использования опытных данных. Таким образом, сопротивление материалов включает в себя две области: одну — аналитическую, основанную на механике и математике, другую — экспериментальную. Обе эти области тесно между собой переплетаются.

Сопротивление материалов нельзя рассматривать как дисциплину, которая занимается только теоретическим вычислением напряжений в каком-то однородном упругом теле. Решение задач, изучаемых в сопротивлении материалов, возможно лишь при *наличии результатов экспериментального* исследования механических свойств реальных материалов в связи с их структурой, методами их изготовления и обработки. Поэтому в настоящем курсе этой стороне отведено достаточное внимание. Работы в лаборатории составляют один из важнейших элементов обучения и должны непременно выполняться студентами параллельно с изучением курса. Описание этих работ, разработанное применительно к существующему оборудованию механических лабораторий, выделено в особое руководство[1]).

Хотя при самом возникновении сопротивления материалов вопрос о прочности был поставлен в связи с чисто практическими задачами, в дальнейшем сопротивление материалов развивалось в значительной степени по линии теоретической, что и вызывало иногда разрыв между результатами исследований и их приложениями на практике. Лабораторное изучение материалов шло особняком, главным образом по линии установления норм для приёмки разных материалов. В настоящее время сопротивление материалов изучает реальные материалы с точки зрения их работы в конструкциях путём широких экспериментальных и теоретических исследований, что открывает возможность решения ряда новых практических задач. Таковы задачи изучения прочности новых материалов, условий их разрушения, задачи определения напряжений не только в пределах, но и за пределами упругости, и другие.

§ 5. Типы деформаций.

Установив общий план решения задач сопротивления материалов, мы можем теперь перейти к отдельным видам этих задач. Их можно разбить на несколько групп в зависимости от типа деформаций.

---

[1]) Н. М. Беляев, Лабораторные работы по сопротивлению материалов, Гостехиздат, 1951.

Основными типами деформаций являются (фиг. 2):

1) растяжение или сжатие (*а* и *б*); примеры — работа цепей, канатов, тросов, растянутых и сжатых стержней в фермах, колонн; 2) перерезывание (*в*) — работа болтов, заклёпок; 3) кручение — работа валов (*г*); 4) изгиб — работа всякого рода балок (*д*). Эти четыре типа деформаций называются *простыми*.

Фиг. 2.

В конструкциях встречается и более сложная работа элементов, когда они испытывают два и более типов деформаций одновременно, например, растяжение или сжатие с изгибом, изгиб с кручением и т. д.; в этих случаях мы имеем дело с так называемой *сложной деформацией*. Для каждого из этих видов деформаций мы установим способы для вычисления напряжений, подбора материала и поперечных размеров элементов конструкции, а также способы для вычисления деформаций.

Для простоты мы будем сначала рассматривать лишь те элементы сооружений и машин, которые представляют собой так называемые *призматические стержни с прямой осью*. Таким стержнем мы будем называть тело, все поперечные сечения которого одинаковы; центры тяжести этих сечений лежат на одной прямой, называемой *осью стержня*. В дальнейшем мы рассмотрим стержни и с переменным сечением и с криволинейной осью.

ГЛАВА II.

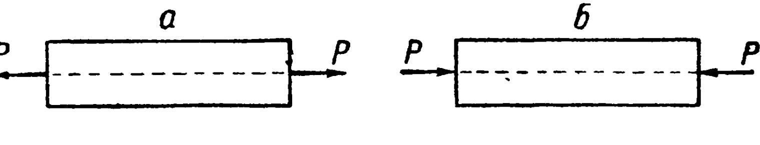
НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ. ПОДБОР СЕЧЕНИЙ.

§ 6. Вычисление напряжений по площадкам, перпендикулярным к оси стержня.

Решение основной задачи сопротивления материалов мы начнём с простейшего случая растяжения или сжатия призматического стержня.

Центральным растяжением или сжатием этого стержня называется деформация его под действием двух равных и прямопротиво-

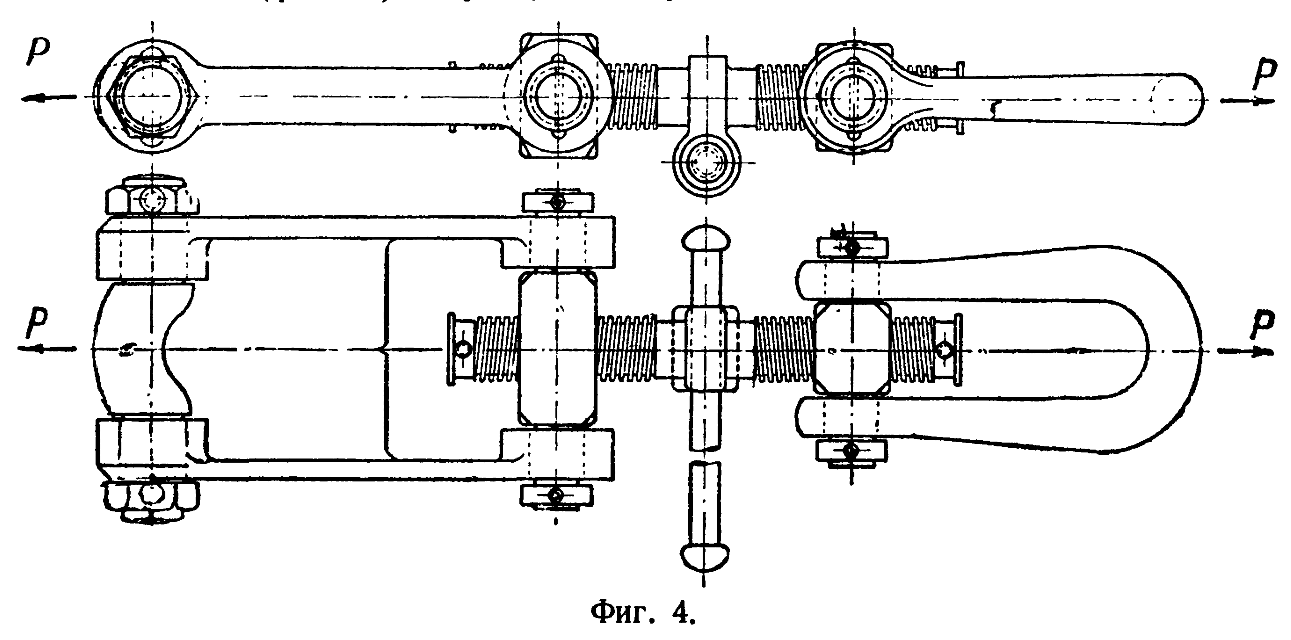
положных сил, приложенных к концевым сечениям и направленных по оси стержня. Если эти силы направлены наружу от концевых сечений, то мы имеем растяжение (фиг. 3, *а*), в противном случае — сжатие (фиг. 3, *б*).



Фиг. 3.

По общему плану решения всякой задачи сопротивления материалов мы прежде всего должны найти величину этих внешних сил P, растягивающих стержень. Величина сил P обычно может быть определена из условий взаимодействия рассматриваемого стержня с остальными частями конструкции.

В качестве простейшего примера можно рассмотреть винт вагонной стяжки (фиг. 4). При равномерном движении поезда сила тяги



Фиг. 4.

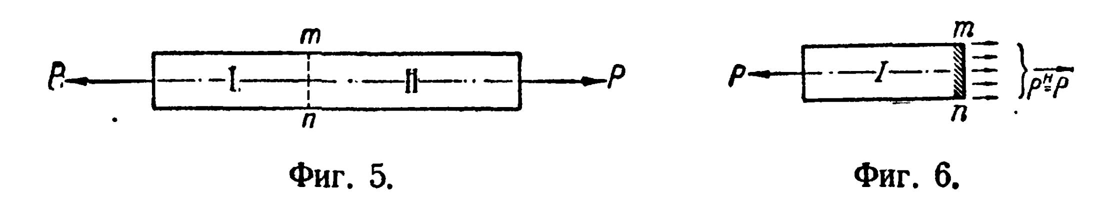
паровоза P, передающаяся через стяжку, уравновешивается с сопротивлением движению остальной части поезда. Сила тяги паровоза (она иногда достигает 25 *т*) передаётся на винт стяжки при помощи винтовой нарезки так, что силы P направлены по оси винта. Стержень винта подвергается растяжению. Нашей задачей будет подобрать поперечные размеры винта таким образом, чтобы прочность его была обеспечена.

Внешние силы, действующие на винт, равны силе тяги. Далее необходимо найти вызванные этими силами напряжения, установить для них допускаемую величину и выбрать так размеры поперечного сечения стержня, чтобы действительные напряжения не превосходили допускаемых.

Для вычисления напряжений необходимо выбрать те разрезы, которыми мы будем разделять стержень на две части. Для проверки прочности следует отыскать опасное сечение, т. е. то, через которое передаётся *наибольшее* напряжение. Мы установим формулы

для вычисления напряжений сначала по сечениям, перпендикулярным к оси стержня, а в дальнейшем и по наклонным сечениям; таким путём мы сумеем отыскать наиболее опасное сечение.

Возьмём растянутый стержень и разделим его на две части поперечным сечением *mn* (фиг. 5), *перпендикулярным* к оси. Отбросим вторую часть; тогда, чтобы равновесие первой не было нарушено, мы должны заменить действие отброшенной части силами, передающимися на оставшуюся часть через сечение (фиг. 6). Заменяющие



Фиг. 5. Фиг. 6.

силы будут уравновешивать внешнюю силу P, поэтому они должны сложиться в равнодействующую[1] $P^н$, равную P, направленную по оси стержня в сторону, противоположную внешней силе (фиг. 6). Эта равнодействующая $P^н$ будет усилием, действующим в стержне.

Таким образом, условия равновесия оставшейся части дают нам лишь величину равнодействующей внутренних сил, передающихся по сечению *mn*, её направление и точку приложения, но не могут указать, как распределяются напряжения по площади сечения, т. е. какие силы будут передаваться через различные квадратные единицы этой площади. Между тем, для оценки опасности, угрожающей прочности материала, необходимо найти наибольшее напряжение, отыскать ту квадратную единицу площади, через которую передаётся наибольшая сила.

Опыты с растяжением стержней из различных материалов показывают, что если растягивающие силы достаточно точно совпадают с осью стержня, то удлинения прямых линий, проведённых на поверхности стержня параллельно его оси, будут одинаковы. Отсюда возникает предположение о *равномерном* распределении напряжений по сечению. Лишь у концов стержня, там, где происходит непосредственная передача сил P на стержень, растяжение распределяется неравномерно между отдельными участками площади сечения: те участки, к которым непосредственно приложена сила P, перегружаются; но уже на небольшом расстоянии от концов работа материала выравнивается, и наступает равномерное распределение напряжений по сечению, перпендикулярному к оси. Эти напряжения направлены параллельно силе P, т. е. нормально к сечению; поэтому их называют *нормальными* напряжениями и обозначают буквой σ.

---

[1]) Значок «Н» при P ($P^Н$) означает, что эта величина является равнодействующей распределённых по сечению сил, выражаемых через напряжения.

Так как они распределены равномерно по площади сечения, то $P^{н} = \sigma F$, с другой стороны, $P^{н} = P$; отсюда получаем

$$\sigma = \frac{P}{F}. \tag{2.1}$$

Эта формула позволяет нам вычислить напряжение σ, если известны растягивающая сила и размеры сечения стержня. С другой стороны, если мы зададимся допустимой величиной нормального напряжения, из этой же формулы можно будет найти необходимую площадь поперечного сечения F.

§ 7. Допускаемые напряжения. Подбор сечений.

Чтобы выяснить, какую величину напряжений мы можем считать допустимой при работе стержня из выбранного материала, необходимо опытным путём установить зависимость между прочностью стержня и возникающими в нём напряжениями. Для этого изготовим из данного материала образец (обычно круглого или прямоугольного поперечного сечения), заложим концы его в захваты машины, позволяющей осуществить растяжение стержня, и начнём постепенно увеличивать силы P. Образец будет растягиваться и, наконец, разорвётся.

Пусть наибольшей нагрузкой, которую выдержал образец до разрыва, будет $P_{в}$. Величина нормальных напряжений, вызванных этой нагрузкой, равная

$$\sigma_{в} = \frac{P_{в}}{F},$$

называется *пределом прочности* или *временным сопротивлением* испытываемого материала на растяжение. Она выражается обычно в *кг/мм*^{2} или *кг/см*^{2}.

Как указано в § 4, в стержнях конструкции приходится допускать при работе на растяжение нормальные напряжения $[\sigma]$, *в несколько раз меньшие,* чем предел прочности $\sigma_{в}$; допускаемое напряжение получается делением предела прочности $\sigma_{в}$ на *коэффициент запаса* k. Величина этого коэффициента определяется целым рядом соображений, которые подробно будут изложены дальше (§ 17). Во всяком случае она должна быть такова, чтобы при нормальной работе стержня не только не произошло разрыва, но чтобы не образовалось и остающихся деформаций, могущих изменить схему сооружения или машины. Коэффициент запаса меняется в зависимости от характера применяемого материала, способа действия сил на элемент, экономических условий и ряда других факторов.

Ввиду важности правильного выбора коэффициента запаса и величины допускаемых напряжений эти величины для многих конструкций даются нормами, обязательными для составителей проектов

и расчётов. Таким образом, величины допускаемых напряжений $[\sigma]$ для каждого случая можно считать известными. Тогда для определения необходимой величины площади поперечного сечения растянутого стержня можно, пользуясь формулой (2.1), написать *условие прочности*; это условие должно выразить, что *действительное* напряжение σ в растянутом стержне при действии сил P не должно превосходить *допускаемого* напряжения $[\sigma]$:

$$\sigma=\frac{P}{F}\leqslant[\sigma]. \qquad (2.2)$$

Из этого условия определяется наименьшая необходимая площадь стержня:

$$F\geqslant\frac{P}{[\sigma]}. \qquad (2.3)$$

Пользуясь формулой (2.3), мы можем производить подбор сечения стержня.

Иногда площадь поперечного сечения является заданной. Тогда, решая формулу (2.3) относительно P, мы производим определение допускаемой силы

$$P\leqslant F[\sigma]. \qquad (2.4)$$

Возвращаясь к расчёту стержня вагонной стяжки (§ 6, фиг. 4), мы должны установить род материала, идущего для изготовления этой детали, и допускаемое напряжение. Стержень стяжки делается из стали с пределом прочности около 50 *кг/мм*^{2}. Такой выбор материала определяется тем, что винт стяжки должен быть не очень тяжёлым, — это требует материала повышенной прочности; с другой стороны, в этом направлении нельзя итти слишком далеко, чтобы материал винта мог хорошо сопротивляться ударам и толчкам. Если применить сталь со слишком высоким пределом прочности, она окажется хрупкой.

Винт стяжки не только не должен давать обрыва, но в нём не должно быть даже незначительных остаточных деформаций, чтобы не произошло заедания в нарезке. Предел упругости для выбранного материала составляет примерно 0,60 от предела прочности $\sigma_в$. Как мы увидим дальше, при внезапном приложении сил (трогание с места) напряжения увеличиваются примерно вдвое по сравнению со спокойным, статическим растяжением, при котором определяют механические характеристики материала в лаборатории. Поэтому величина допускаемых напряжений не должна превышать

$$0{,}5\cdot0{,}60\,\sigma_в=0{,}30\,\sigma_в.$$

Это даёт коэффициент запаса

$$k=\frac{1}{0{,}3}\approx3{,}3.$$

Таким образом, в данном случае допускаемое напряжение может быть принято равным

$$[\sigma]=\frac{\sigma_в}{k}=0{,}3\,\sigma_в=50\cdot 0{,}3=15\ кг/мм^2=1500\ кг/см^2.$$

Необходимая площадь при $P=25\ т$ равна

$$F\geqslant\frac{P}{[\sigma]}=\frac{25000}{1500}=16{,}7\ см^2.$$

Диаметр d стержня стяжки определяется условием

$$\frac{\pi d^2}{4}=F\geqslant 16{,}7,$$

откуда

$$d\geqslant\sqrt{\frac{16{,}7\cdot 4}{\pi}}=4{,}55\ см\approx 4{,}5\ см.$$

Полученный диаметр определён *по дну* нарезки для *наименьшей* площади поперечного сечения. В тех случаях, когда площадь отдельных сечений стержня меньше других, например из-за наличия отверстий для болтов или заклёпок, наружных выкружек или канавок (нарезки), ***определяется эта наименьшая площадь сечения***, называемая площадью ***нетто*** и обозначаемая $F_{нетто}$ или $F_н$. Площадь поперечных сечений, не имеющих ослаблений, называется площадью *брутто* и обозначается $F_{брутто}$ или $F_{бр}$. Определив расчётом сечение $F_н$, размеры $F_{бр}$ получаем уже из конструктивных соображений.

Выведенные выше формулы относились к случаю растяжения стержня. Без всяких изменений они могут быть применены и к тому случаю, когда мы встречаемся с деформацией сжатия. Разница будет лишь в направлении нормальных напряжений и в величине допускаемого напряжения $[\sigma]$; при сжатии стержней явление осложняется тем, что такие стержни могут оказаться неустойчивыми, — они могут внезапно искривиться. Расчётам на устойчивость будет посвящён отдел IX.

Растяжение
P I σ II P
Сжатие
P I σ II P

Фиг. 7.

На фиг. 7 изображено распределение нормальных напряжений, действующих по сечению, перпендикулярному к оси стержня, для случая растяжения и сжатия. Для ряда материалов (сталь) величина допускаемого напряжения может быть принята одинаковой как при растяжении, так и при сжатии (коротких стержней, т. е. таких, у которых длина превышает размеры поперечного сечения не более чем в 5 раз). В других случаях (чугун) приходится назначать различные величины допускаемых напряжений для растяжения и сжатия в зависимости от величины предела прочности при этих деформациях.

В ряде конструкций мы встречаемся со случаем передачи сжимающих напряжений от одного элемента другому через сравнительно небольшую площадь, по которой соприкасаются между собой эти элементы. Подобные напряжения называют обыкновенно напряжениями *смятия* или *контактными напряжениями.* Распределение напряжений около места соприкасания весьма сложно и поддаётся определению лишь методами теории упругости. При обычных расчётах рассматривают в большинстве случаев эти напряжения просто как сжимающие и ограничиваются лишь назначением для них *специального допускаемого напряжения.* В главе IX дан метод вычисления этих напряжений и проверки прочности.

§ 8. Деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука.

Для того чтобы иметь полную картину работы растянутого или сжатого элемента, необходимо иметь возможность вычислить, как будут меняться его размеры.

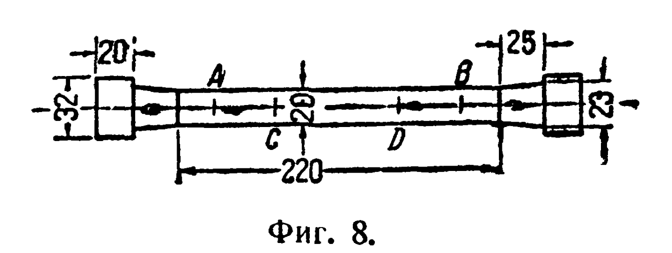
Соответствующие законы можно получить лишь на основании опытов с растяжением и сжатием образцов изучаемого материала; эти же опыты дают возможность изучать и прочность материала, определять его предел прочности и другие характеристики (§ 11).

Для осуществления подобных опытов в лабораториях пользуются специальными машинами, позволяющими деформировать образцы и доводить их до разрушения, измеряя требуемую для этого величину усилий.

Одновременно при помощи достаточно точных измерительных приборов — тензометров — производят измерения деформаций образцов. Предельные нагрузки, которые можно в настоящее время осуществлять при помощи испытательных машин и точно измерять, достаточно велики. Существуют испытательные прессы, силой до 5000 *т*, на которых можно испытывать на сжатие целые части конструкций (колонны, части стен); что касается испытаний на растяжение, то лаборатории располагают машинами, позволяющими осуществлять растягивающие усилия до 1500 *т*. В большинстве современных лабораторий пользуются машинами гораздо меньшей силы — от 5 до 100 *т* на растяжение и до 200 ÷ 500 *т* на сжатие.

Подробное описание подобных машин и приборов, в частности, очень известной русской машины — пресса Гагарина, можно найти в нашей книге «Лабораторные работы по сопротивлению материалов» и в специальных руководствах по механическим испытаниям материалов. Пользуясь такими машинами и приборами, можно установить, как будут меняться размеры образцов материала при растяжении и сжатии. Если мы будем наблюдать, как изменяется расстояние l между двумя точками A и B (фиг. 8) при растяжении образца, то увидим, что по мере увеличения нагрузки увеличивается и расстояние между намеченными точками.

В таблице 1 даны результаты одного из опытов, произведённых в механической лаборатории Ленинградского института инженеров путей сообщения; растяжению подвергался стержень, вырезанный из рельса; нагрузка, при которой было произведено первоначальное измерение длины между двумя намеченными точками, равнялась 0,5 *т*. Далее эта нагрузка увеличивалась ступенями тоже по 0,5 *т*. При каждом увеличении нагрузки измерялось специальным точным прибором, называемым тензометром, приращение Δ длины l (100 *мм*) между намеченными точками. Таким образом, например, при увеличении от 1,5 до 2,0 *т* эта длина увеличилась на $\frac{13,4}{1000}$ *мм*. Величины этих приращений Δ при каждой ступени нагрузки даны в таблице 1.



Фиг. 8.

Таблица 1. **Данные опытных наблюдений.**

Нагрузки в тоннах	Удлинения от каждой ступени нагрузки в $\frac{1}{1000}$ *мм*	Полные удлинения в $\frac{1}{1000}$ *мм*	Нагрузки в тоннах	Удлинения от каждой ступени нагрузки в $\frac{1}{1000}$ *мм*	Полные удлинения в $\frac{1}{1000}$ *мм*
0,5			4,5		
1,0	14,5	14,5	5,0	13,7	123,4
1,5	13,7	28,2	5,5	13,6	137,0
2,0	13,4	41,6	6,0	14,4	151,4
2,5	13,5	55,1	6,5	14,6	166,0
3,0	13,7	68,8	7,0	17,5	183,5
3,5	13,4	82,2	7,5	36,3	219,8
4,0	13,6	95,8	8,0	328,2	548,0
4,5	13,9	109,7	8,5	361,0	909,0

Примечание. Расчётная длина $l = 100$ *мм*. Площадь поперечного сечения $F = 191{,}2$ *мм*^{2}.

Рассматривая эту таблицу, мы видим, что:

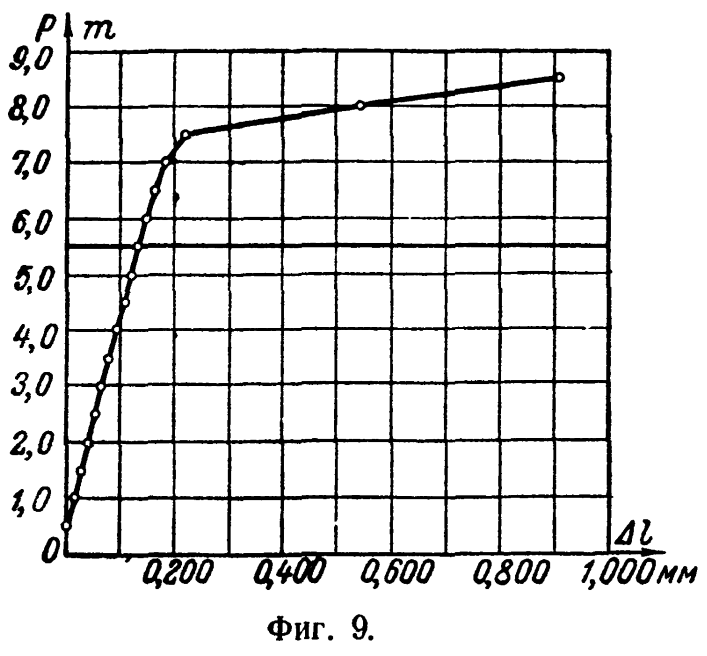
1) в начале опыта увеличение длины идёт *пропорционально* увеличению нагрузки; каждому приращению нагрузки в 0,5 *т* соответствует приращение длины примерно на одну и ту же (в пределах точности опыта) величину, а именно $\frac{13,6}{1000}$ *мм* (в среднем);

2) эта пропорциональность нарушается, когда нагрузка достигла известного предела, в данном случае 5,5 *т*; за этим пределом деформации (удлинение образца) растут быстрее, чем нагрузки.

Если мы полученные в этом опыте результаты изобразим графически, откладывая нагрузки по вертикали, а соответствующие удли-

нения участка AB — по горизонтали, то в известных пределах (в данном случае до нагрузки в 5,5 *т*) получим прямую, показывающую пропорциональность между силой и вызванным ею удлинением (фиг. 9).

Нагрузка, после достижения которой нарушается пропорциональность между приращением нагрузки и приращением удлинения, называется нагрузкой, соответствующей пределу пропорциональности. Напряжение же, вызванное этим грузом, называется *пределом пропорциональности*. Оно получается делением величины этого груза на площадь поперечного сечения растягиваемого образца.



Фиг. 9.

Если мы, повторяя опыт, будем измерять увеличение длины между двумя другими точками C и D, нанесёнными на расстоянии, вдвое меньшем длины AB, то приращения длины CD от тех же ступеней нагрузки будут вдвое меньше приращений длины AB.

Если же мы повторим опыты со стержнями из того же материала, но с иной площадью поперечного сечения, то увидим, что удлинения меняются обратно пропорционально площади.

Таким образом, опыты приводят к заключению, что пока нагрузка на образец не достигла известного предела, удлинение прямо пропорционально растягивающей силе P, длине образца l и обратно пропорционально площади поперечного сечения F. Обозначая через Δl приращение длины образца от силы P, можем написать формулу, связывающую между собой эти опытные данные:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}, \tag{2.5}$$

где E — коэффициент пропорциональности, различный для разных материалов. Величина Δl называется *абсолютным удлинением* стержня от силы P. Формула (2.5) носит название *закона Гука*, по имени учёного, впервые открывшего этот закон пропорциональности в 1660 г.

Зависимость (2.5) можно представить в ином виде. Разделим обе части этой формулы на первоначальную длину стержня l:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{EF};$$

отношение $\frac{\Delta l}{l}$ — абсолютного удлинения к первоначальной длине — называется *относительным удлинением*; оно обозначается буквой ε.

Относительное удлинение является отвлечённой величиной, как отношение двух длин Δl и l, и по своему числовому значению равно удлинению каждой единицы длины стержня. Подставив в предыдущую формулу вместо $\frac{\Delta l}{l}$ величину ε, а вместо $\frac{P}{F}$ — величину нормального напряжения σ, получаем иное выражение закона Гука:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{2.6}$$

или

$$\sigma = \varepsilon E. \tag{2.7}$$

Таким образом, нормальное напряжение при растяжении или сжатии прямо пропорционально относительному удлинению или укорочению стержня.

Коэффициент пропорциональности E, связывающий нормальное напряжение и относительное удлинение, называется *модулем упругости* при растяжении материала. Чем *больше* эта величина, тем *менее* растягивается стержень при прочих равных условиях (длине, площади, силе P). Таким образом, физически модуль E характеризует *сопротивляемость* материала упругой *деформации* при растяжении.

Так как ε — относительное удлинение — является отвлечённой величиной, то из формулы (2.7) следует, что модуль выражается в тех же единицах, что и напряжение σ, т. е. в единицах силы, делённых на единицу площади.

Для стали мы можем вычислить величину этого модуля, пользуясь результатами опыта, приведёнными в таблице 1. Среднее удлинение образца до нарушения пропорциональности от нагрузки 0,5 *т* равнялось 0,0136 *мм*, длина l была равна 100 *мм*, наконец, площадь F равнялась 191,2 *мм*^{2}. Из формулы (2.5) получаем следующее выражение для E:

$$E = \frac{Pl}{\Delta lF};$$

подставляя $P = 500$ *кг*, $l = 100$ *мм*, $\Delta l = 0{,}0136$ *мм*, $F = 191{,}2$ *мм*^{2}, получаем:

$$E = \frac{500 \cdot 100 \cdot 10\,000}{191{,}2 \cdot 136} = 19\,200 \text{ кг/мм}^2 = 1\,920\,000 \text{ кг/см}^2.$$

Надо заметить, что величина модуля упругости материала E даже для одного и того же материала не является постоянной, а несколько колеблется. Для некоторых материалов величина модуля оказывается одинаковой как при растяжении, так и при сжатии (сталь, медь), в других случаях — различной для каждой из этих деформаций. В обычных расчётах этой разницей пренебрегают и принимают для громадного большинства материалов одно и то же значение E как при растяжении, так и при сжатии.

Надо иметь в виду, что закон Гука представлен формулой, которая только приближённо отражает результаты опытов, схематизируя их; поэтому он не представляет собой совершенно точной зависимости.

Все материалы при растяжении или сжатии дают величины деформаций, более или менее отклоняющиеся от этого закона. Для некоторых материалов (большинство металлов) эти отклонения ничтожно малы, и можно считать, что осуществляется полная пропорциональность между деформацией и нагрузкой; для других (чугун, камень, бетон) — отклонения значительно больше.

Однако для *практических* целей мы можем пренебречь наблюдающимися небольшими отклонениями от формул (2.5) и (2.6) и пользоваться ими при вычислении деформаций стержней.

Средние величины модуля E для ряда материалов даны в таблице 2. Более подробные данные приведены в таблице в конце книги.

Таблица 2. **Значения модуля упругости.**

Наименование материала	E в миллионах $кг/см^2$
Сталь	2,0
Чугун (серый, белый)	1,15 ÷ 1,60
Медь и её сплавы (латунь, бронза)	1,0
Алюминий и дуралюмин	0,7
Каменная кладка:	
из гранита	0,09
» известняка	0,06
» кирпича	0,03
Бетон	0,10 ÷ 0,30
Дерево:	
вдоль волокон	0,1
поперёк волокон	0,005
Каучук	0,00008
Целлулоид	0,0193 ÷ 0,0174

Из рассмотрения формулы (2.5) ясно, что чем больше её знаменатель, тем менее растяжим (податлив) или, как говорят, тем более жёсток стержень, поэтому знаменатель формулы (2.5), величина EF, называется *жёсткостью стержня при растяжении или сжатии.* Мы видим, что жёсткость при растяжении или сжатии зависит, с одной стороны, от *материала* стержня, характеризуемого величиной его модуля упругости E, а с другой стороны, от *размеров поперечного* сечения стержня, характеризуемых величиной площади его поперечного сечения F. Иногда бывает удобно пользоваться понятием *относительной жёсткости*, которая равна $\frac{EF}{l}$, т. е. отношению жёсткости к длине стержня.

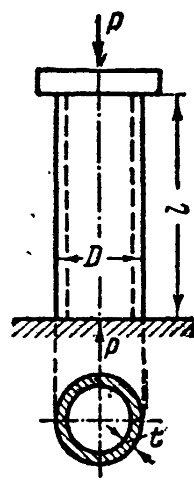
Формулы (2.5) и (2.6) позволяют определить удлинения и укорочения, которые получает тот или иной стержень конструкции при

растяжении или сжатии. Обратно, зная эти удлинения, размеры и материал стержня, можно вычислить нормальные напряжения, которые в нём возникают. Таким образом, для вычисления напряжений σ мы имеем два пути: если известны внешние силы P, растягивающие или сжимающие стержень, то σ вычисляется по формуле

$$\sigma = \frac{P}{F}; \tag{2.1}$$

если же внешние силы неизвестны, а можно измерить удлинение стержня, то σ определяется формулой

$$\sigma = \varepsilon E. \tag{2.7}$$



Фиг. 10.

Величина относительного удлинения может быть вычислена, если мы измерим абсолютное удлинение Δl участка стержня длиной l и применим формулу

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Вторым приёмом определения напряжений приходится пользоваться довольно часто при решении целого ряда задач, как это будет показано ниже.

Для иллюстрации метода подбора сечения и определения деформаций решим два примера.

Пример 1. Трубчатая чугунная колонна с наружным диаметром $D=25$ *см* сжата силой $P=50$ *т*. Допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma]=300$ *кг/см²*, длина колонны $l=3{,}5$ *м*. Найти толщину стенок и абсолютное укорочение колонны; модуль $E=1\,200\,000$ *кг/см²*.

Величина рабочей площади колонны (заштрихованное кольцо на фиг. 10) определится из формулы (2.3):

$$F \geqslant \frac{P}{[\sigma]} = \frac{50\,000}{300} = 167 \text{ см}^2.$$

Площадь кольца равна

$$F = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2),$$

где d — внутренний диаметр колонны.

Тогда

$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4F}{\pi}} = 20{,}2 \text{ см}.$$

Толщина стенок будет равна

$$t = \frac{D-d}{2} = \frac{25-20{,}2}{2} = 2{,}4 \approx 2{,}5 \text{ см}$$

и окончательно $d = 20$ *см*. Абсолютная величина укорочения колонны определяется формулой (2.5)

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF},$$

где

$$F = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(25^2 - 20^2) = 177 \text{ см}^2,$$

следовательно,

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} = \frac{50\,000 \cdot 350}{177 \cdot 1\,200\,000} = 0{,}082 \ \textit{см} \approx 0{,}8 \ \textit{мм}.$$

Полученное укорочение оказывается весьма малым по сравнению с длиной колонны. Можно было бы думать, что для инженера такие изменения размеров конструкции не имеют практического значения. Однако это не так. Небольшие изменения длины колонны под нагрузкой могут вызвать, как это будет показано дальше, значительные изменения напряжения в частях конструкции, поддерживаемых этой колонной.

Пример 2. При испытании моста возникла необходимость в измерении напряжений, появившихся в элементе фермы моста при нагружении его поездом. Для этого измерялось увеличение длины l между двумя точками, отмеченными на данном элементе. Измерение производилось прибором, увеличивающим действительные деформации в $n = 1000$ раз. Длина $l = 10$ *см*; модуль $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}. Перемещение стрелки прибора по шкале при нагружении моста равнялось $a = 20$ *мм*. Найти напряжение.

Для вычисления напряжения в этом случае придётся воспользоваться формулой (2.7):

$$\sigma = \varepsilon E;$$

применить формулу $\sigma = \frac{P}{F}$ невозможно, так как сила P неизвестна.

Относительное удлинение ε равно

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Абсолютное же удлинение равно перемещению a стрелки прибора, разделённому на коэффициент увеличения прибора n:

$$\Delta l = \frac{a}{n}.$$

Таким образом,

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta l}{l} E = \frac{aE}{nl} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^6}{10^3 \cdot 10} = 400 \ \textit{кг/см}^2.$$

§ 9. Коэффициент поперечной деформации.

Стержни, работающие на растяжение или сжатие, испытывают помимо *продольных* деформаций и *поперечные*.

Как показывает опыт, при растяжении бруска (фиг. 11) длина его увеличивается на величину Δl, ширина же уменьшается на величину $\Delta b = b - b_1$. Относительная продольная деформация равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l};$$

относительная поперечная деформация равна

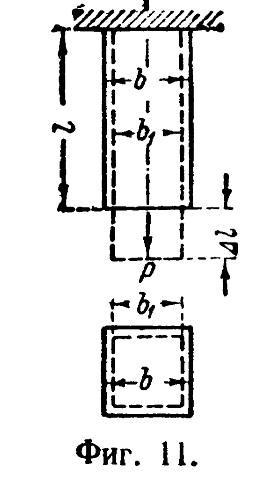
$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b}.$$

При сжатии бруска продольной деформацией является укорочение, поперечной — удлинение. Опыты показывают, что для большинства материалов ε_1 в $3 \div 4$ раза меньше, чем ε.

Абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации ε_1 к относительной продольной ε называется *коэффициентом поперечной деформации* или *коэффициентом Пуассона* μ:

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}. \tag{2.8}$$

Коэффициент поперечной деформации μ, так же как и модуль упругости E, является *характеристикой упругих свойств материала.* Для материалов, упругие свойства которых одинаковы во всех направлениях, упругие постоянные E и μ полностью характеризуют эти свойства. Такие материалы называют *изотропными.* С достаточной для целей практики точностью к ним могут быть отнесены сталь и другие металлы, большинство естественных камней, бетон, каучук, неслоистые пластмассы.



Фиг. 11.

Наряду с материалами изотропными существуют и *анизотропные* материалы, т. е. такие, свойства которых в различных направлениях различны. К таким материалам относятся в первую очередь дерево, слоистые пластмассы, некоторые камни, ткани и другие. Одно значение E и μ не может охарактеризовать их упругие свойства, для них необходимо иметь ряд значений упругих характеристик в различных направлениях.

Для измерения числовой величины μ необходимо при растяжении или сжатии бруска измерять одновременно продольные и поперечные деформации. Обычно эти измерения производятся при растяжении образца, взятого в виде длинной и широкой пластинки (металлы), или при сжатии призматических образцов (камень).

Рассмотрим определение коэффициента поперечной деформации в следующем примере.

Пример 3. При растяжении стального образца с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника со сторонами 80 *мм* и 3 *мм* продольное удлинение, измеренное на длине 100 *мм*, равнялось 0,05 *мм*; поперечное сжатие на длине 60 *мм* при той же нагрузке было равно 0,0093 *мм*. Определим коэффициент поперечной деформации.

Относительная продольная деформация равна

$$\varepsilon = \frac{0{,}05}{100} = 5 \cdot 10^{-4};$$

относительная поперечная деформация равна

$$\varepsilon_1 = -\frac{0{,}0093}{60} = -1{,}55 \cdot 10^{-4}.$$

Абсолютное отношение $\left|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right|$ даёт величину коэффициента поперечной деформации μ:

$$\mu = \frac{1{,}55}{5} = 0{,}31.$$

Величины коэффициента поперечной деформации для различных материалов при деформировании их в пределах упругости даны в таблице 3.

Таблица 3. **Значения коэффициента поперечной деформации.**

Название материала	μ	Название материала	μ
Сталь	0,25 — 0,33	Золото	0,42
Медь	0,31 — 0,34	Серебро	0,39
Бронза	0,32 — 0,35	Стекло	0,25
Чугун	0,23 — 0,27	Камни	0,16 — 0,34
Свинец	0,45	Бетон	0,08 — 0,18
Латунь	0,32 — 0,42	Каучук	0,47
Алюминий	0,32 — 0,36	Пробка	0,00
Цинк	0,21	Фанера	0,07
		Целлулоид	0,39

Зная μ, можно вычислить изменение объёма образца при растяжении или сжатии. Длина образца после деформации равна $l(1+\varepsilon)$. Площадь после деформации равна $F(1-\varepsilon\mu)^2$. Объём после деформации равен

$$V_1 = Fl(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2 = V(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2,$$

где V — первоначальный объём.

Так как ε до предела пропорциональности — малая величина, то квадратами её пренебрегаем. Тогда объём V_1 равен

$$V_1 = V[1+\varepsilon(1-2\mu)].$$

Относительное изменение объёма равно

$$\frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon(1-2\mu).$$

Пример 4. Вычислим относительное увеличение объёма для растянутого стержня из малоуглеродистой стали. Модуль упругости $E = 2\cdot 10^6$ *кг/см²*; коэффициент поперечной деформации $\mu = 0{,}3$; напряжение растяжения равно допускаемому для малоуглеродистой стали, а именно $\sigma = 1400$ *кг/см²*. Увеличение объёма равно

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{\sigma}{E}(1-2\mu) = \frac{1400}{2\cdot 10^6}[1 - 2\cdot 0{,}3] = 2{,}8\cdot 10^{-4} = 0{,}028\%$$

— очень малая величина.

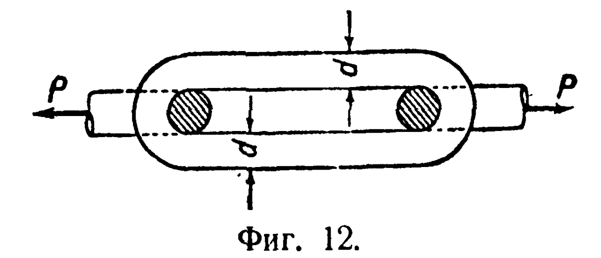
Если коэффициент поперечной деформации $\mu = 0{,}5$, то объём при деформации не меняется. Так как для большинства материалов $\mu < 0{,}5$, то растяжение сопровождается увеличением, а сжатие —

уменьшением объёма. Для резины $\mu \approx 0{,}5$, и объём её при растяжении почти не меняется.

Практическое значение появления поперечных деформаций в связи с продольными чрезвычайно велико. Это значение в дальнейшем будет подробно освещено.

§ 10. Примеры.

Пример 5. Цепь, служащая для подъёма грузов $P = 4$ *т*, сделана (фиг. 12) из круглой стали с пределом прочности $\sigma_в = 37$ *кг/мм²*. Коэффициент запаса $k = 6$. Найти необходимый диаметр звена d, ограничившись учётом усилий растяжения в ветвях цепи. В закруглённых частях возникнут напряжения от их изгиба, метод определения которых будет изложен в главе XXXI.



Фиг. 12.

Так как сила P действует по оси звена, то она распределяется поровну между обеими его сторонами. Условие, определяющее площадь каждой ветви звена, имеет вид

$$F = \frac{\frac{P}{2}}{[\sigma]}.$$

Допускаемое напряжение $[\sigma]$ равно

$$[\sigma] = \frac{\sigma_в}{k} = \frac{3700}{6} = 617 \text{ кг/см}^2.$$

Таким образом, площадь сечения ветви будет равна

$$F = \frac{\frac{P}{2}}{[\sigma]} = \frac{2000}{617} = 3{,}24 \text{ см}^2,$$

а диаметр стержня звена равен

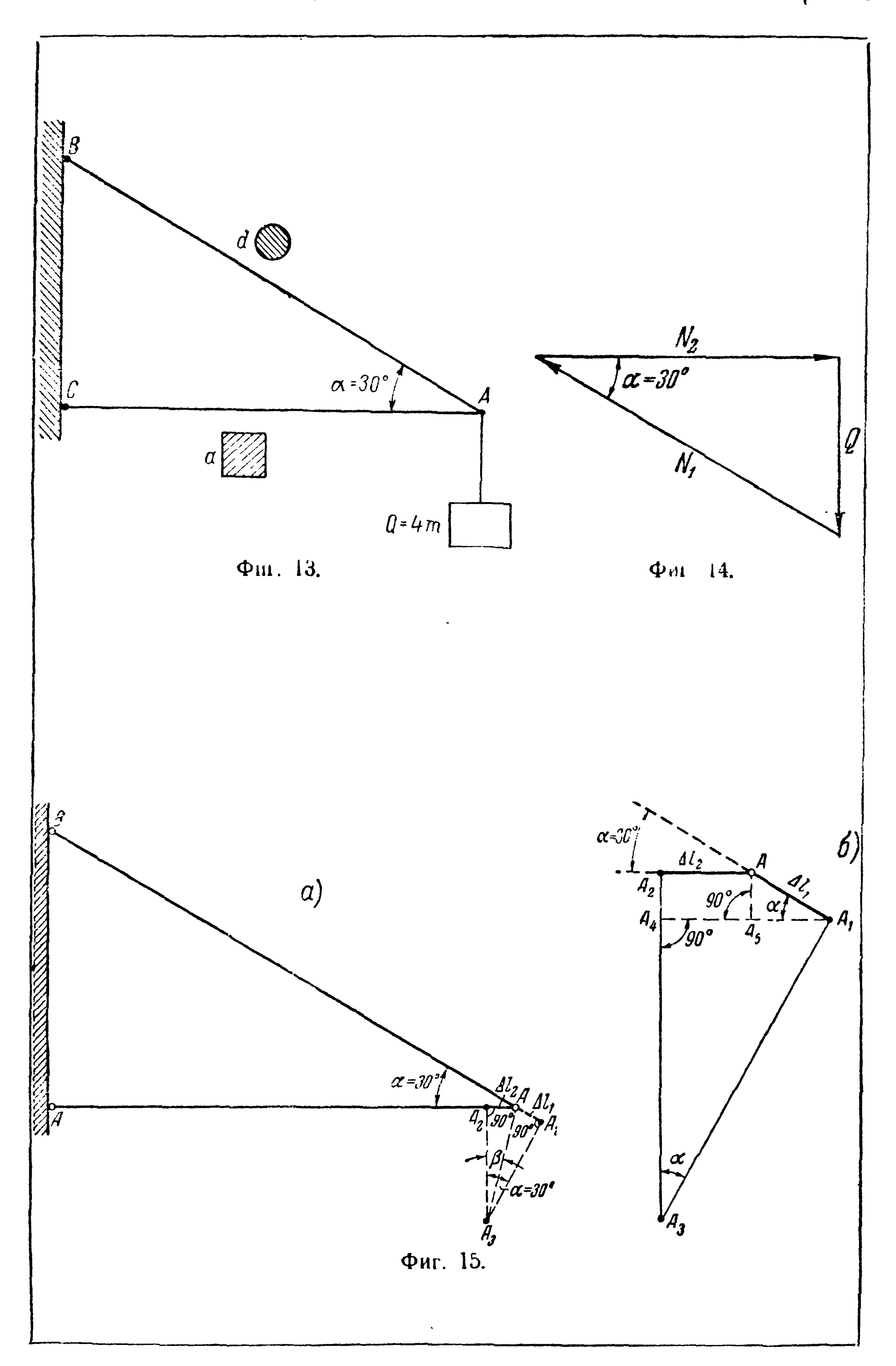
$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3{,}24}{\pi}} = 2{,}03 \approx 2{,}1 \text{ см}.$$

Пример 6. К кронштейну ABC, состоящему из деревянного стержня AC и железной тяги AB, подвешен в точке A груз $Q = 4$ *т* (фиг. 13). Сечение тяги AB — круглое, стержня AC — квадратное. Каковы должны быть диаметр d стержня AB и стороны квадрата a (стержень AC), если допускаемые напряжения для дерева $[\sigma_-] = 25$ *кг/см²*, а для стали $[\sigma_+] = 900$ *кг/см²* ($[\sigma_-]$ — допускаемое напряжение на сжатие, $[\sigma_+]$ — на растяжение); найти вертикальное и горизонтальное перемещения точки A. Длина AC равна $l_2 = 1$ *м*.

Усилия N_1 и N_2 в стержнях AB и AC находим из условия равновесия шарнира A, к которому приложена известная сила Q и неизвестные усилия N_1 и N_2.

Построив треугольник равновесия для этих сил (фиг. 14), получаем

$$N_1 = \frac{Q}{\sin 30^\circ} 2Q = 8 \text{ т}; \qquad N_2 = Q \operatorname{ctg} 30^\circ = Q\sqrt{3} = 6{,}93 \text{ т}.$$



Фиг. 13.

Фиг. 14.

Фиг. 15.

Потребные площади сечений стержней AB и AC равны

$$F_1 = \frac{N_1}{|\sigma_+|} = \frac{8000}{900} = 8{,}89 \text{ см}^2; \quad F_2 = \frac{N_2}{|\sigma_-|} = \frac{6930}{25} = 277 \text{ см}^2.$$

Диаметр тяги равен

$$d = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 8{,}89}{\pi}} = 3{,}34 \text{ см} \approx 3{,}4 \text{ см};$$

сторона квадрата равна

$$a = \sqrt{F_2} = \sqrt{277} = 16{,}6 \text{ см} \approx 17 \text{ см};$$

обе величины приняты с округлением — для стального стержня до целых *мм*, для деревянного до *см*.

Для определения перемещения f точки A разъединим в ней стержни и изобразим их новые длины BA_1 и CA_2, увеличив и уменьшив старые на $\Delta l_1 = AA_1$ и $\Delta l_2 = AA_2$, не меняя пока направления стержней (фиг. 15, *а*). Для того чтобы найти новое положение точки A, сведём вместе деформированные стержни, вращая их около точек B и C. Точки A_1 и A_2 будут перемещаться по дугам A_1A_3 и A_2A_3, которые по их малости могут быть приняты за прямые, перпендикулярные к BA_1, и CA_2. Тогда горизонтальное перемещение точки A будет равно

$$f_2 = AA_2 = \Delta l_2,$$

а вертикальное (фиг. 15, *б*)

$$f_1 = A_2A_3 = A_2A_4 + A_4A_3.$$

Отрезок

$$A_2A_4 = AA_5 = \Delta l_1 \sin \alpha,$$

а

$$A_4A_3 = A_1A_4 \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Но $A_1A_4 = A_1A_5 + A_5A_4 = \Delta l_1 \cos \alpha + \Delta l_2$, так что

$$A_4A_3 = (\Delta l_1 \cos \alpha + \Delta l_2) \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\Delta l_1 \cos^2 \alpha + \Delta l_2 \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Тогда

$$f_1 = A_2A_4 + A_4A_3 = \Delta l_1 \sin \alpha + \frac{\Delta l_1 \cos^2 \alpha + \Delta l_2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2 \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Деформации стержней определяются формулами

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{6930 \cdot 100}{10^5 \cdot 17^2} = 2{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ см},$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{8000 \cdot 100 \cdot 2}{2 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 3{,}4^2}{4} \cdot \sqrt{3}} = 5{,}07 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$

Таким образом, горизонтальное перемещение точки A равно $f_2 = 0{,}24$ *мм*, вертикальное

$$f_1 = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{0{,}507 + 0{,}24 \frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}5} = 1{,}43 \text{ мм},$$

а полное перемещение AA_3 равно

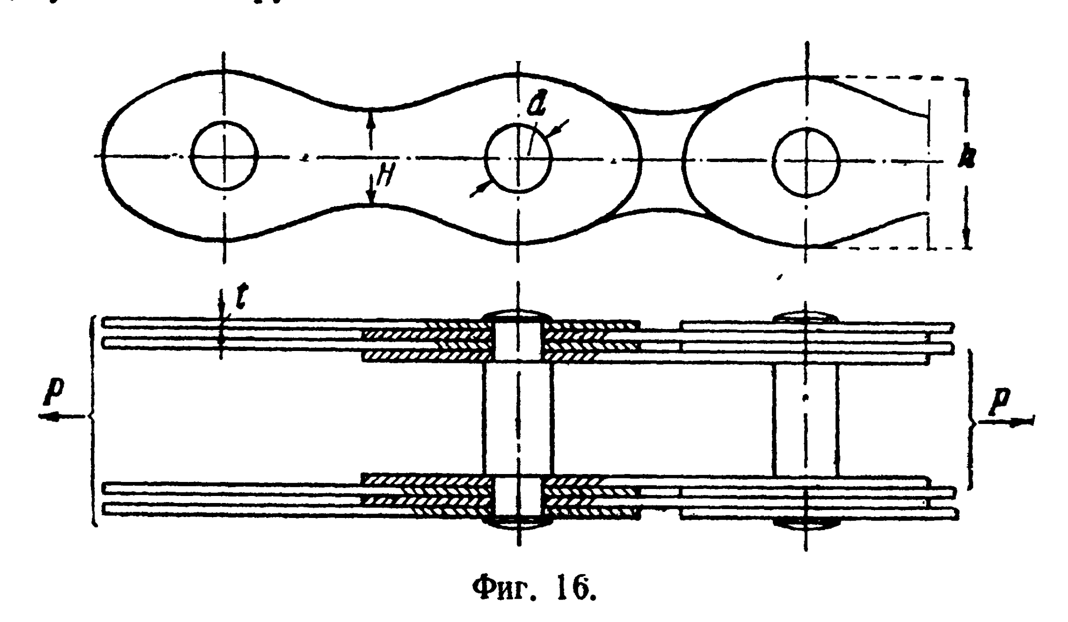
$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{1{,}43^2 + 0{,}24^2} = 1{,}45 \text{ мм}.$$

Пример 7. Найти допускаемую нагрузку P для цепи, составленной из четырёх пластинок, каждая толщиной $t = 4{,}5$ *мм*, шириной $h = 65$ *мм* и $H = 40$ *мм* с отверстием для болта $d = 30$ *мм* (фиг. 16). Допускаемое напряжение $[\sigma] = 800$ *кг/см*^{2}.

Опасным сечением пластинки является сечение цепи, ослабленное отверстием для болта, так как ширина её в этом месте, за вычетом отверстия, будет $65 - 30 = 35$ *мм*, что меньше ширины посредине её длины, равной 40 *мм*. Рабочая площадь цепи в опасном месте равна

$$F = 4 \cdot 4{,}5\,[65 - 30] = 630 \text{ мм}^2 = 6{,}30 \text{ см}^2.$$

Допускаемая нагрузка $P = 800 \cdot 6{,}3 = 5040$ *кг* ≈ 5 *т*.



Фиг. 16.

Пример 8. Трубчатая чугунная колонна проходит через два этажа. Диаметр её (наружный) $D = 25$ *см*; толщина стенок $t = 2{,}5$ *см*. Верхняя часть её имеет длину $l_1 = 3{,}0$ *м*, нижняя $l_2 = 4{,}0$ *м*. На верхнее сечение центрально действует нагрузка $P_1 = 25$ *т*; на высоте l_2 на колонну добавляется нагрузка от междуэтажного перекрытия $P_2 = 35$ *т*. Найти напряжения в сечениях верхней и нижней частей колонны и найти общее укорочение её при модуле упругости $E = 1{,}3 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}.

Проведём сечение в пределах длины l_1; верхняя отсечённая часть находится в равновесии под действием силы P_1 и нормальных напряжений σ', действующих по проведённому сечению. Условие равновесия имеет вид

$$\sigma' F = P_1.$$

Отсюда $\sigma' = \frac{P_1}{F}$; площадь сечения колонны равна

$$F = \pi (D - t) \cdot t = \pi \cdot 22{,}5 \cdot 2{,}5 = 177 \text{ см}^2;$$

тогда

$$\sigma' = \frac{25\,000}{177} = 141 \text{ кг/см}^2.$$

Проводим сечение в пределах длины l_2; верхняя отсечённая часть колонны находится в равновесии под действием напряжения σ'' и силы $P_1 + P_2$; отсюда

$$\sigma'' F = P_1 + P_2 \quad \text{и} \quad \sigma'' = \frac{P_1 + P_2}{F} = \frac{60\,000}{177} = 340 \text{ кг/см}^2.$$

Так как напряжения в нижней и верхней частях колонны различны, то её полное укорочение может быть вычислено как сумма укорочений обеих

частей. Для верхней части, сжатой силами P_1, укорочение равно

$$\Delta l_1 = \frac{P_1 l_1}{EF} = \frac{25\,000 \cdot 300}{1{,}3 \cdot 10^6 \cdot 177} = 0{,}33 \text{ мм};$$

для нижней, сжатой силами $P_1 + P_2$, укорочение равно

$$\Delta l_2 = \frac{(P_1 + P_2)\, l_2}{EF} = \frac{60\,000 \cdot 400}{1{,}3 \cdot 10^6 \cdot 177} = 1{,}04 \text{ мм}.$$

Полное укорочение равно

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{P_1 l_1}{EF} + \frac{(P_1 + P_2)\, l_2}{EF} = 0{,}33 + 1{,}04 = 1{,}37 \approx 1{,}4 \text{ мм}.$$

Это укорочение можно подсчитать и иначе. Сила P_1 и вызываемая ею реакция сжимают колонну по всей её длине $l = l_1 + l_2$, сила же P_2 и вызываемая этой силой реакция сжимают колонну лишь на длине l_2. Полное укорочение получится как сумма укорочений, вызываемых каждой из сил в отдельности, и будет равно

$$\Delta l = \frac{P_1 (l_1 + l_2)}{EF} + \frac{P_2 l_2}{EF} = \frac{(P_1 + P_2)\, l_2}{EF} + \frac{P_1 l_1}{EF}.$$

Как и следовало ожидать, пришли к выражению, уже полученному ранее.

ГЛАВА III.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ И ОСНОВЫ ВЫБОРА ДОПУСКАЕМЫХ НАПРЯЖЕНИЙ.

§ 11. Диаграмма растяжения. Механические характеристики материала.

В предыдущей главе при определении размеров поперечного сечения и вычислении деформаций мы встретились с рядом величин, характеризующих материал не только в пределах пропорциональности (модуль упругости, предел пропорциональности), но и в стадии разрушения (предел прочности). Для полного представления о механических свойствах материала при его растяжении и сжатии до разрушения необходимо изучение на опыте явлений, которые при этом процессе происходят.

С точки зрения различия в механических качествах при простом растяжении и сжатии и при обычной температуре материалы могут быть *хрупкими* или *пластичными*. Хрупкие материалы разрушаются при очень малых остаточных деформациях. У пластичных же материалов разрушение наступает лишь после значительной остающейся деформации. К первому типу материалов относятся, например, чугун, камень, бетон и др. К пластичным материалам относятся малоуглеродистая сталь, медь и др.

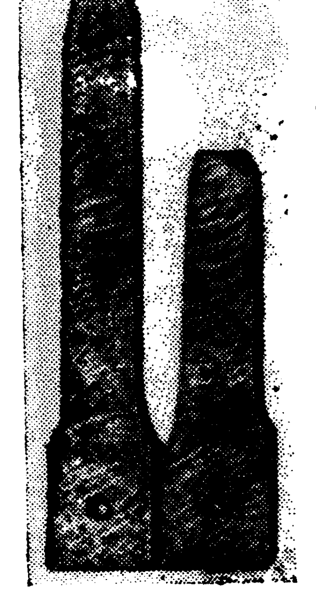
Выясним сначала поведение обоих типов материалов в опыте на растяжение вплоть до разрушения. Для этого опыта изготовляется образец призматической формы круглого или прямоугольного сече-

ния. На рабочей части образца наносят деления через каждый сантиметр или доли сантиметра, чтобы иметь возможность после опыта судить об изменении длины образца. Образец помещают в машину и закрепляют его концы. Медленно перемещая один конец образца в направлении его оси, стержень растягивают нагрузкой, которая возрастает постепенно, без толчков и ударов. При опыте отмечают ряд последовательных величин нагрузки и измеряют соответствующее им увеличение длины l, намеченной на образце.

Фиг. 17.

Результаты измерений нагляднее всего можно представить в виде так называемой диаграммы растяжения; на большинстве машин имеется приспособление, автоматически зачерчивающее эту диаграмму при растяжении образца. При вычерчивании диаграммы по вертикальной оси откладываются в определённом масштабе нагрузки, а по горизонтальной — абсолютные удлинения.

При разрыве образца из пластичного материала — малоуглеродистой стали — диаграмма имеет вид, показанный на фиг. 17. Первая часть диаграммы до точки A, соответствующей пределу пропорциональности, представляет собой прямую линию.



Фиг. 18.

Ордината OA_1 представляет собой величину растягивающей силы, соответствующую *пределу пропорциональности* $\sigma_п$, т. е. тому наибольшему напряжению, превышение которого вызывает отклонение от закона Гука; для малоуглеродистой стали величина $\sigma_п$ равна примерно 2000 *кг/см*^{2}.

При увеличении растягивающей силы за величину OA_1 деформация начинает расти быстрее нагрузки, — диаграмма имеет криволинейный вид с выпуклостью вверх. Далее наблюдается резкое изменение в работе материала; при некотором значении растягивающей силы OC_1 материал «течёт»; для увеличения деформации почти не нужно увеличивать растягивающую силу. На диаграмме образуется горизонтальная (или почти горизонтальная) площадка. *Напряжение, при котором происходит это течение материала — рост деформаций при постоянной (примерно) нагрузке, — называется пределом текучести* $\sigma_т$. Для изучаемого материала эта величина равна около 2400 *кг/см*^{2}.

Во время течения материала на поверхности образца появляются в более или менее резкой степени так называемые линии Людерса, которые легко обнаружить путём протравливания образца. Эти линии

вызываются взаимными перемещениями частиц материала при наступлении значительных деформаций образца.

После образования площадки текучести материал вновь начинает сопротивляться дальнейшему растяжению, и для увеличения удлинения Δl приходится увеличивать силу. Точка D диаграммы соответствует наибольшей величине нагрузки.

В этот момент поведение образца ещё раз резко меняется. До этого в удлинении участвовал весь стержень; каждая единица его длины удлинялась примерно одинаково; точно так же во всех сечениях было одинаковое уменьшение поперечных размеров образца.

С момента, когда нагрузка достигает величины OD_1, деформация в основном сосредоточивается в одном месте образца; небольшой участок образца около этого места подвергается в дальнейшем наибольшему напряжению; это влечёт за собой местное сужение поперечного сечения, образуется так называемая «шейка» (фиг. 19).

Вследствие уменьшения площади в деформирующейся части для дальнейшего удлинения бруска нужна всё меньшая и меньшая сила. Наконец, при нагрузке OK_1 происходит разрыв.

Если мы приостановим опыт при нагрузке, меньшей OA_1, и разгрузим образец, то при разгрузке зависимость между силой и удлинением будет выражаться той же прямой, что и при нагрузке OA. После удаления груза удлинение исчезает, — мы имели лишь *упругую* деформацию.

Фиг. 19.

Если мы произведём разгрузку образца от некоторой точки Z диаграммы, лежащей между C и D, то при разгрузке диаграмма будет изображаться прямой ZO_1, примерно параллельной прямой OA. Таким образом, образец в этом случае не вернётся к первоначальным размерам; отрезок O_1O_2 будет представлять *упругое* удлинение, попрежнему меняющееся пропорционально нагрузке с прежним модулем упругости; отрезок OO_1 — *остающееся* удлинение и отрезок OO_2 — *полное* удлинение при нагрузке OZ_1. Можно найти такую нагрузку OB_1, до которой мы будем иметь лишь упругие деформации. Соответствующая точка B диаграммы обычно лежит выше, но очень близко к точке A, отвечающей пределу пропорциональности. *Напряжение, превышение которого вызывает незначительные* (*порядка* $0{,}001 \div 0{,}003\%$) *остаточные деформации, называется пределом упругости* σ_y; на диаграмме (фиг. 17) нагрузка, вызывающая это напряжение, измеряется ординатой OB_1.

Точки A и B настолько близки друг к другу, что обычно считают предел упругости и предел пропорциональности совпадающими. Поэтому зачастую говорят, что материал следует закону Гука, пока не достигнет предела упругости, хотя правильнее было бы сказать — предела пропорциональности.

Наибольшая величина растягивающей образец силы изображается ординатой OD_1; она часто называется *разрушающей нагрузкой,* так как необходима для того, чтобы *началось* разрушение; *окончательное* же разрушение происходит при нагрузке, изображаемой на диаграмме ординатой точки *K*. *Напряжение, вызванное наибольшей нагрузкой, носит название предела прочности или временного сопротивления* $\sigma_в$. Предел прочности, полученный как частное от деления наибольшего груза на первоначальную площадь поперечного сечения образца, характеризует величину тех сил, которые необходимы, чтобы довести стержень из рассматриваемого материала до разрушения при растяжении; для малоуглеродистой стали эта величина достигает $\sim$4000 *кг/см*^{2}.

Изучая диаграмму, мы наметили на ней целый ряд ординат, выражающих величину нагрузок, связанных с различными механическими характеристиками материала. В таблице 4 дана сводка этих нагрузок и соответствующих им характеристик (напряжений) с их обозначениями. Для получения любого из указанных в таблице пределов соответствующая нагрузка делится на *первоначальную* площадь поперечного сечения.

Таблица 4. **Механические характеристики материалов.**

Нагрузка	Название соответствующего напряжения и его обозначение
Нагрузка, соответствующая концу прямолинейного участка OA_1	Предел пропорциональности $\sigma_п$
Нагрузка, соответствующая появлению остаточных деформаций OB_1	Предел упругости $\sigma_у$
Нагрузка, соответствующая явлению текучести (возрастание деформации при постоянной нагрузке) OC_1	Предел текучести $\sigma_т$
Наибольшая нагрузка OD_1	Предел прочности или временное сопротивление $\sigma_в$

Все эти механические характеристики (пределы пропорциональности, упругости, текучести и прочности) характеризуют способность материала сопротивляться стремлению внешних сил деформировать и разрушать образец при растяжении.

Абсциссы диаграммы испытания характеризуют иное свойство материала, а именно, его способность в большей или меньшей степени деформироваться, прежде чем наступит разрушение.

Отрезок O_3O_4 (фиг. 17) даёт нам величину упругой деформации образца к моменту разрыва, исчезающей в тот же момент, как разрушение произошло. Длина же $OO_3 = \Delta l_0$ представляет собой величину остающихся удлинений участка l образца после разрыва. Эта величина тем больше, чем больше длина выбранного для измерений участка и чем *пластичнее* материал.

Отношение удлинения Δl_0 к первоначальной длине участка l принимается за *меру пластичности* материала, т. е. его способности испытывать большие деформации при разрушении.

Величина этого отношения, выраженная в процентах, обозначается буквой δ и называется *остаточным относительным удлинением* образца после разрыва и для обычно применяемых сортов стали колеблется в пределах от 8 до 28%. Таким образом,

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l} \cdot 100.$$

Следует отметить, что величина остаточного относительного удлинения образца в значительной степени зависит от формы образца, главным образом от *отношения его длины к площади поперечного сечения*. Поэтому в лабораторной практике принято измерять, после разрыва образца, остаточное удлинение не на всей его длине, а лишь на некоторой её части, называемой расчётной. В образцах с круглым поперечным сечением расчётная длина чаще всего назначается равной $10d$, иногда $5d$. В образцах с прямоугольным поперечным сечением расчётная длина назначается так, чтобы при круглом поперечном сечении той же площади F, что и прямоугольное, отношение длины к диаметру оставалось прежним. Например, соответственно принятой для образца круглого сечения длине в $10d$, для образца с прямоугольным поперечным сечением за расчётную длину следует принять $11{,}3\sqrt{F}$. Образцы изготовляются так, что их длина между головками несколько превышает принятую расчётную.

Для оценки пластичности материала при испытании на растяжение служит и другая величина, так называемое *остаточное относительное сужение*. После достижения наибольшей нагрузки на одном из участков стержня начинается образование «шейки», и сечение образца в месте разрыва обычно имеет меньшую площадь, чем первоначальное (фиг. 19). Назовём первоначальную площадь сечения F_0, а площадь в месте разрыва F_1; величина

$$\psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0} \cdot 100$$

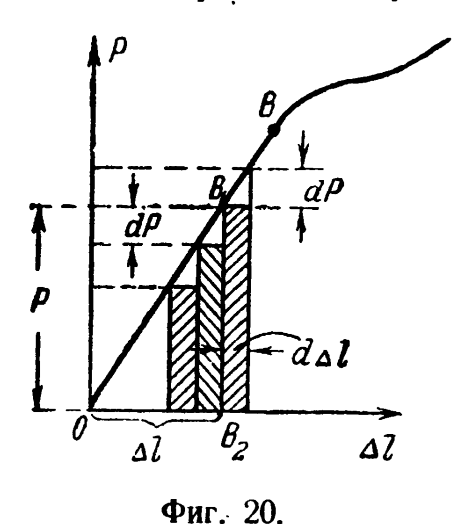
(в процентах) носит название *относительного сужения* после разрыва. Чем эта величина больше, тем материал пластичнее.

Наконец, диаграмма на фиг. 17 даёт нам возможность установить ещё одну механическую характеристику материала, связанную с его сопротивлением ударам[1]). Это сопротивление оказывается тем бóльшим, чем больше работа, которую нужно затратить, чтобы разорвать образец. Поэтому в качестве характеристики способности материала сопротивляться действию внезапного приложения нагрузки

---

[1]) Подробнее см. § 233.

можно взять величину работы, которую надо затратить на растяжение образца до предела упругости или до разрыва. Оказывается, что эта работа в определённом масштабе выражается площадью диаграммы растяжения (фиг. 17).



Фиг. 20.

Рассмотрим часть этой диаграммы в пределах применимости закона Гука (фиг. 20). При растяжении закреплённого одним концом образца перемещение другого его конца под действием постепенно возрастающей силы P равно тоже постепенно растущему удлинению $\Delta l = \frac{Pl}{EF}$; эта зависимость выражается прямой OB.

Какому-либо значению силы P (отрезок B_1B_2) соответствует удлинение Δl (отрезок OB_2 на фиг. 20). Увеличим нагрузку на dP; удлинение увеличится на $d\Delta l$ и растягивающая сила, средняя величина которой при этом равна $P + \frac{1}{2}dP$, совершит работу

$$dA = \left(P + \frac{1}{2}dP\right)d\Delta l = P \cdot d\Delta l + \frac{1}{2}dP \cdot d\Delta l.$$

Отбрасывая малую величину второго порядка $\frac{1}{2}dP \cdot d\Delta l$, получаем

$$dA = P \cdot d\Delta l.$$

Графически работа dA изображается площадью заштрихованного прямоугольника высотой P и основанием $d\Delta l$.

Рассматривая *постепенное* возрастание силы P, как ряд последовательных прибавлений элементарных нагрузок dP, получим, что работа, производимая внешними силами при *постепенном* растяжении образца, представится суммой элементарных прямоугольников (фиг. 20). При *непрерывном* увеличении P, т. е. при dP и $d\Delta l$ бесконечно малых, эта сумма для определённых значений P и Δl обратится в площадь треугольника OB_1B_2, равную

$$\frac{1}{2}B_1B_2 \cdot OB_2 = \frac{1}{2}P\Delta l.$$

Таким образом, величина работы, совершённой при упругом удлинении бруска на величину Δl, выразится формулой

$$A = \frac{1}{2}P\Delta l \tag{3.1}$$

и графически представится площадью соответствующей части диаграммы растяжения.

Такие же рассуждения можно применить и к полной площади диаграммы (фиг. 17). Вся площадь выражает собой полную работу $A_в$, затраченную для разрыва образца длиной l и площадью F.

Чтобы получить величину, характеризующую с одной стороны лишь *материал*, а не *образец*, принято делить работу A на объём образца. Отношение $a=\frac{A}{F_0 l}$ называется *удельной работой упругой деформации* растяжения.

Аналогично можно определить *полную удельную работу* $a_в=\frac{A_в}{F_0 l}$; это та работа, которую необходимо затратить, чтобы разорвать образец. Чем эта величина больше, тем надёжнее воспринимает материал ударное и внезапное действие нагрузки.

Выше мы видели, что материал образца после перехода за предел текучести продолжает испытывать упругие деформации, следующие по-прежнему закону Гука; к ним лишь добавляются остаточные деформации. Это обстоятельство обнаруживается при разгрузке образца после перехода за предел текучести (точка Z диаграммы на фиг. 17).

Если образец после такой разгрузки сразу начать вновь растягивать, то диаграмма при нагрузке изобразится почти той же прямой O_1Z, параллельной OA, что и при разгрузке, а после точки Z— той же кривой ZDK, которая была бы при отсутствии разгрузки. Таким образом, если сравнить диаграмму растяжения $OCZDK$ для образца, не подвергавшегося разгрузке, с диаграммой O_1ZDK для образца из того же материала, предварительно нагружённого до точки Z и разгружённого до точки O_1, то мы видим, что *предел пропорциональности повышается* до того напряжения, на которое предварительно был нагружен образец, а *остаточная деформация после разрыва уменьшается* на величину OO_1, т. е. на ту величину остаточной деформации, которая была приобретена при предварительном нагружении.

Такое повышение предела пропорциональности и уменьшение остаточной деформации после разрыва, вызванное предварительным нагружением за предел текучести с последующей разгрузкой, носит название *наклёпа*. При наклёпе как бы отрезается соответствующая часть диаграммы растяжения, что понижает и полную удельную работу $a_в$. В действительности явление происходит много сложнее описанной здесь упрощённой схемы. В частности, если после разгрузки дать образцу «отдохнуть», не сразу начать нагружение, а спустя один-два часа, то соответствующая часть диаграммы ZDK пройдёт несколько *выше,* чем при отсутствии отдыха.

§ 12. Диаграмма напряжений.

Приведённая на фиг. 17 диаграмма иллюстрирует поведение материала при данных размерах образца; поэтому для получения графика, характеризующего непосредственно изучаемый материал, диаграмму растяжения несколько видоизменяют.

Ординаты кривой фиг. 17, изображающие нагрузки, делят на первоначальную (до опыта) площадь сечения образца F_0, а абсциссы Δl — на расчётную длину l. Таким образом, в новой диаграмме по вертикали откладываются напряжения

$$\sigma = \frac{P}{F_0},$$

а по горизонтали — относительные удлинения

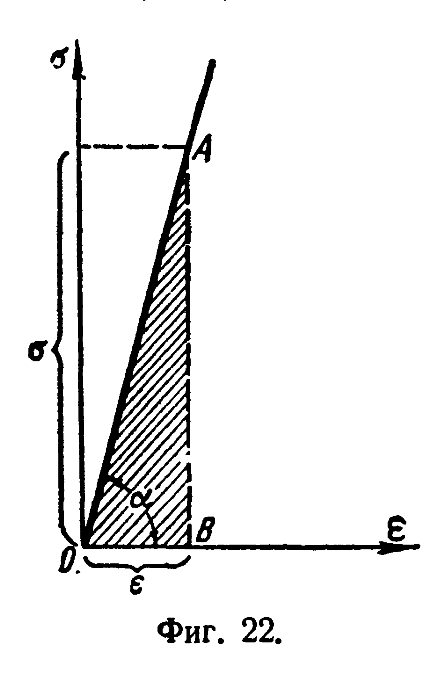
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Фиг. 21.

Такая диаграмма изображена на фиг. 21; она носит название *диаграммы напряжений при растяжении* для данного материала. По очертанию она подобна диаграмме фиг. 17: на ней нанесены все величины напряжений, характеризующие механические свойства материала: пределы пропорциональности $\sigma_п$, текучести $\sigma_т$, прочности $\sigma_в$.

Если мы будем рассматривать часть этой диаграммы OA до предела пропорциональности, то при некотором напряжении σ и соответствующем ему относительном удлинении ε площадь треугольника OAB (фиг. 22), равная $\frac{\sigma\varepsilon}{2}$, будет выражать удельную работу деформации при растяжении материала до напряжения σ. В самом деле,

$$\frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{P\Delta l}{2Fl} = a.$$



Фиг. 22.

Зная, что $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, можно представить выражение для удельной работы деформации в пределах упругости в таком виде:

$$a = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \qquad (3.2)$$

По аналогии вся площадь диаграммы фиг. 21 представляет собой удельную работу деформации $a_в$ при разрыве образца изучаемого материала. Эту величину можно представить себе как произведение длины диаграммы δ на наибольшую ординату $\sigma_в$ и на некоторый коэффициент η, характеризующий отношение площади диаграммы к площади прямоугольника со сторонами δ и $\sigma_в$:

$$a_в = \eta\sigma_в\delta. \qquad (3.3)$$

Таким образом, *удельная работа при разрыве до известной степени характеризуется произведением предела прочности на относительное удлинение после разрыва.* Поэтому часто оценивают способность материала сопротивляться ударам по величине произведения $\sigma_в \delta$.

Из диаграммы фиг. 22 видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E.$$

Таким образом, модуль E графически изображается тангенсом угла наклона к оси абсцисс прямолинейной части диаграммы растяжения.

Величина предела прочности при разрыве пластичных материалов в известной степени связана с их свойством, называемым *твёрдостью.* Твёрдость — это свойство материала сопротивляться проникновению в него других тел.

Одним из наиболее распространённых методов является определение твёрдости по Бринелю. При этом способе характеристикой твёрдости является так называемое «число твёрдости», определяемое при помощи вдавливания в материал шарика из закалённой стали. «Числом твёрдости по Бринелю» называется частное от деления величины вдавливающей силы P на шаровую поверхность лунки отпечатка:

$$H_{\text{Б}} = \frac{P}{\pi D h} = \frac{2P}{\pi D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)},$$

где D — диаметр шарика, d — диаметр отпечатка, h — глубина его. Для малоуглеродистой стали это число равно $H_{\text{Б}} = 100 \div 120$ *кг/мм²*, для рельсовой стали $H_{\text{Б}} = 200 \div 220$ *кг/мм²*, для твёрдой закалённой стали $H_{\text{Б}}$ достигает $400 \div 450$ *кг/мм²*. Между числом твёрдости по Бринелю и величиной предела прочности стали при разрыве установлена довольно отчётливая эмпирическая зависимость:

$$\sigma_в \approx 0{,}36 H_{\text{Б}}.$$

Таким образом, определение предела прочности стали путём изготовления специальных образцов и разрыва их можно заменить определением твёрдости — «бринелированием». Этим способом широко пользуются на практике.

Из прочих методов определения твёрдости упомянем тоже довольно распространённый метод Роквелла. Он состоит во вдавливании в материал алмазного конуса или закалённого шарика диаметром 1,59 *мм*.

Характеристикой твёрдости в этом способе является глубина вдавливания при повышении нагрузки от начальной (небольшой) величины до окончательной.

§ 13. Истинная диаграмма растяжения.

Диаграмму напряжений при растяжении, показанную на фиг. 21, можно рассматривать как характеризующую свойства данного материала при растяжении.

Эта характеристика механических свойств материала является однако *условной*. Если в начале испытания площадь поперечного сечения образца почти не изменяется, то, начиная с напряжений, равных пределу текучести, наступает заметное уменьшение этой площади, сначала равномерное по всей длине, а с момента перехода за предел прочности — местное. Таким образом, ординаты кривой фиг. 21 на участке за пределом текучести представляют собой условные напряжения, отнесённые не к *действительной* площади сечения, а к *первоначальной*.

Точно так же абсциссы диаграммы фиг. 21 до достижения предела прочности зависят лишь от способности материала удлиняться; после же образования шейки величина относительного удлинения зависит и от соотношения размеров образца (длины и диаметра) и, таким образом, не является уже характеристикой только материала. Поэтому, чтобы получить график, более точно характеризующий свойства самого материала, строят так называемую диаграмму истинных напряжений. Она иллюстрирует связь между напряжениями и деформациями в том сечении образца, где происходит разрыв.

Для построения диаграммы истинных напряжений необходимо отмечать в разные моменты опыта величину силы, растягивающей образец, и одновременно измерять поперечные размеры образца в наиболее суженном месте.

Фиг. 23.

По этим размерам вычисляем действительную площадь образца для каждого момента измерений. Пусть эта площадь равна F_t, а растягивающая сила P_t; первоначальная же площадь образца пусть была F_0. По оси абсцисс откладываем в процентах величину относительного сужения

$$\psi_t = \frac{F_0 - F_t}{F_0},$$

а на соответствующей ординате — величину истинного напряжения

$$\sigma_и = \frac{P_t}{F_t}.$$

На фиг. 23 представлена такая диаграмма истинных напряжений для образца рельсовой стали. Как видно из этой диаграммы, напряжение $\sigma_и$ возрастает до *самого разрыва*, сначала быстро, после же достижения

наибольшего груза (точка A) менее резко. В момент разрыва напряжение, отнесённое к действительной площади сечения, оказывается бо́льшим предела прочности, вычисленного обычным способом. В приведённом примере предел прочности равен 67,7 *кг/мм*², а напряжение при разрыве 102,1 *кг/мм*².

Однако было бы ошибкой использовать эту последнюю величину для вычисления тех наибольших сил, которые может выдержать стержень до разрыва, что для нас и интересно с практической точки зрения. Это видно из обычной диаграммы растяжения фиг. 17; наибольший груз, выдерживаемый образцом, соответствует не моменту разрыва, а более раннему; величина этого груза для образца данной площади и характеризуется пределом прочности. Повышение же действительных напряжений между точками, соответствующими наибольшему грузу и моменту разрыва, связано с резким уменьшением рабочей площади образца, т. е. практически с процессом его разрушения.

Пользуясь диаграммой истинных напряжений, можно установить ряд новых механических характеристик.

Ординаты истинной диаграммы характеризуют способность материала сопротивляться пластической деформации.

Для продолжения пластической (остаточной) деформации нам приходится давать материалу всё большее и большее напряжение; по мере роста пластической деформации материал оказывает ей всё большее сопротивление. Это явление называется *упрочнением*. Способность материала к упрочнению характеризуется крутизной подъёма истинной диаграммы.

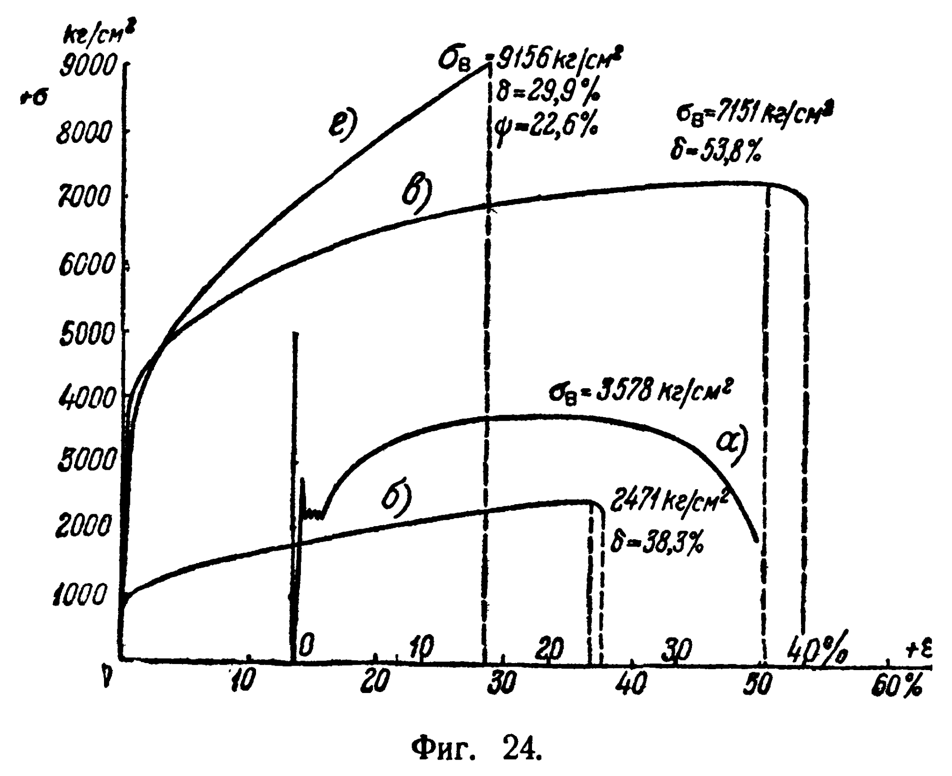
Ордината в точке A в момент достижения наибольшего груза называется *истинным пределом прочности* или *истинным временным сопротивлением*. Ордината в конце кривой при разрыве образца называется *напряжением при разрыве*.

Абсциссы истинной диаграммы характеризуют способность материала к пластической деформации, выраженной относительным сужением. До точки A это сужение площади по всей длине образца может считаться одинаковым; оно называется *равномерным сужением* и характеризует способность материала к общей деформации при разрыве. Разность между полным сужением и равномерным характеризует способность материала к местным деформациям (шейка) и называется *местным сужением*.

§ 14. Диаграммы растяжения для пластичных и хрупких материалов.

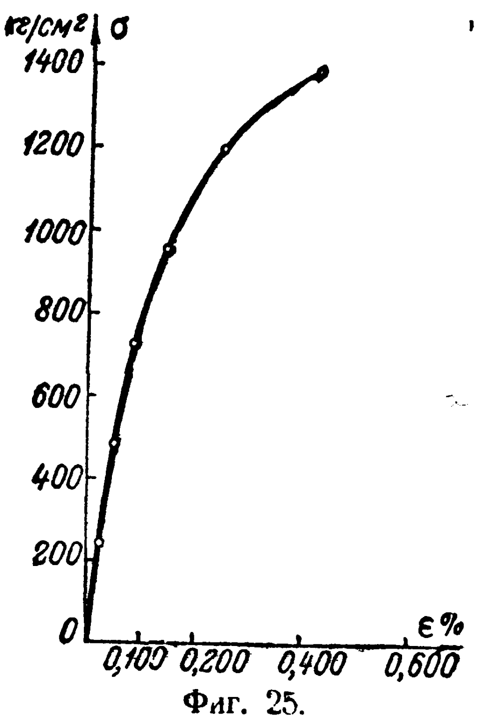
В предыдущих параграфах рассмотрена физическая картина явлений при растяжении образцов из пластичного материала типа малоуглеродистой стали. Для других видов материалов, дающих при растяжении пластическую деформацию, получаются диаграммы напряжений примерно того же вида, что и на фиг. 21.

Некоторые сорта стали (специальные), медь, бронза не имеют площадки текучести. Прямая часть диаграммы переходит непосредственно в криволинейную. Для примера диаграммы напряжений литой стали (*а*), бронзы (*б*), никелевой стали (*в*) и марганцевой стали (*г*) показаны на фиг. 24.



Фиг. 24.

Для материала, диаграмма растяжения которого не имеет площадки текучести, за величину предела текучести условно принято считать напряжение, при котором остаточное относительное удлинение образца достигает примерно такой же величины, как при наличии ясно выраженной площадки текучести. За эту величину остаточного относительного удлинения принимают обычно $0{,}2\%$.



Фиг. 25.

Хрупкие материалы характеризуются тем, что разрушение происходит уже при небольших деформациях. При растяжении образца из такого типично хрупкого материала, как чугун, мы до самого момента разрыва наблюдаем лишь незначительные деформации; разрушение происходит внезапно; относительное удлинение и относительное сужение после разрыва оказываются очень малыми. Диаграмма напряжений при растяжении для чугуна дана на фиг. 25. Обращаем внимание на то, что по сравнению с диаграммами фиг. 24 горизонтальный масштаб диаграммы

фиг. 25 увеличен примерно в 40 раз, а вертикальный — примерно в 6 раз.

Как правило, хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению; их предел прочности на разрыв оказывается малым по сравнению с пределом прочности пластичных материалов.

Зависимость деформаций от напряжений при растяжении хрупких материалов обычно плохо изображается законом Гука; на диаграмме вместо прямолинейного участка мы уже при низких напряжениях получаем слегка искривлённую линию, т. е. не наблюдается строго линейной пропорциональности между силой или напряжением и соответствующей деформацией.

Таким образом, модуль упругости E, равный (§ 12) тангенсу угла наклона относительно оси абсцисс касательной к диаграмме напряжений, собственно говоря, нельзя считать для таких материалов постоянной величиной; он меняется в зависимости от величины того напряжения, для которого мы вычисляем деформацию. Чем эти напряжения больше, тем модуль меньше или больше, в зависимости от того, куда направлена выпуклость кривой диаграммы — вверх или вниз.

Фиг. 26.

Однако в пределах тех напряжений, при которых материал обычно работает в сооружениях, наблюдающиеся отклонения от закона Гука незначительны. Поэтому при практических расчётах заменяют криволинейную часть диаграммы соответствующей хордой (фиг. 26) и считают модуль E постоянным. Это тем более допустимо, что механические характеристики хрупких материалов изменяются для отдельных образцов в более широких пределах, чем характеристики пластичных материалов; поэтому нет смысла пользоваться более точными выражениями зависимости между напряжениями и деформациями.

§ 15. Характер разрушения при сжатии пластичных и хрупких материалов. Диаграмма сжатия.

При изучении сопротивления материалов сжатию приходится применять образцы в виде кубика или цилиндра с высотой, немного большей диаметра. Для более длинных образцов в опытах трудно избежать искривления.

Размеры образцов для разных материалов различны и колеблются в пределах (ребро кубика) от 2 *см* (дерево) до 20—30 *см* (бетон).

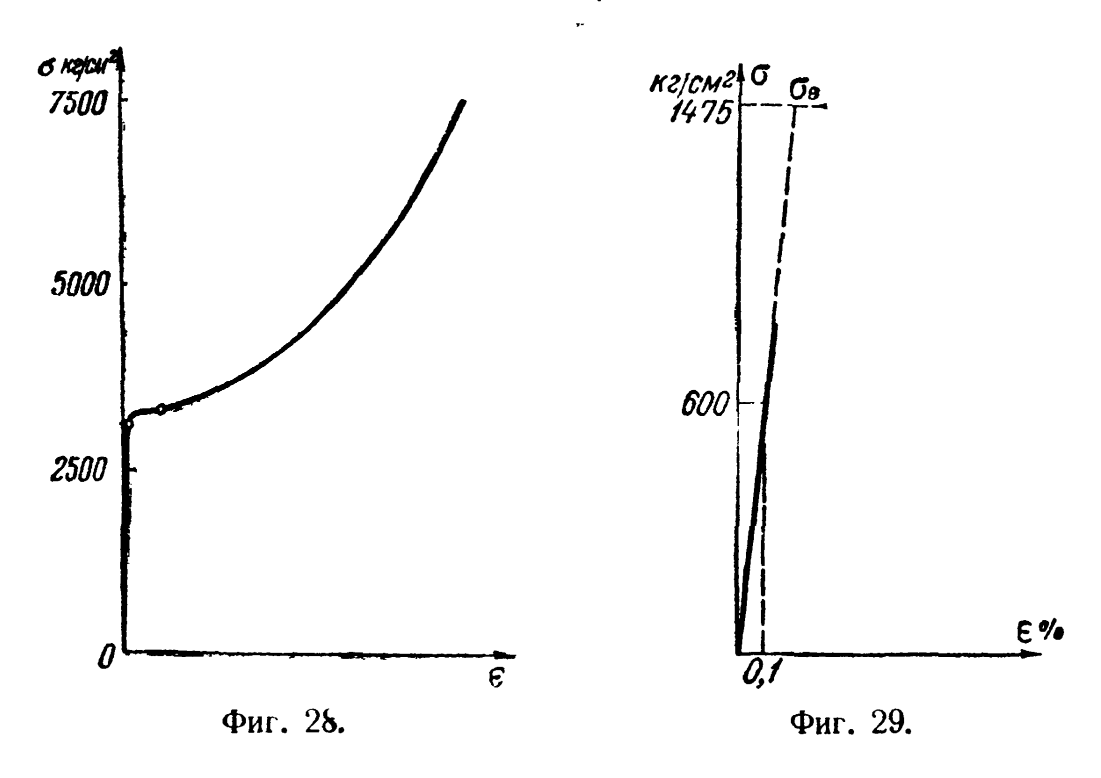
При сжатии цилиндрика из пластичного материала при напряжениях ниже предела пропорциональности или текучести материал

ведёт себя так же, как при растяжении. Величины предела пропорциональности (а также текучести для стали) и модуля упругости для пластичных материалов при сжатии и растяжении примерно одинаковы.

Фиг. 27.

После перехода за предел пропорциональности появляются заметные остаточные деформации, выражающиеся в укорочении образца и увеличении диаметра. Благодаря трению между опорными плитами пресса и основаниями образца затрудняются поперечные деформации материала у торцов образца; он принимает бочкообразную форму (фиг. 27). По мере увеличения площади поперечного сечения приходится для дальнейшей деформации всё увеличивать нагрузку, образец продолжает сжиматься, обращаясь в лепёшку. Напряжения, аналогичного пределу прочности при разрыве, наблюдать не приходится.

Типичная диаграмма напряжений при сжатии для пластичного материала (малоуглеродистая сталь) показана на фиг. 28. При сжатии пластичных материалов, как и при их растяжении, имеет место явление наклёпа.

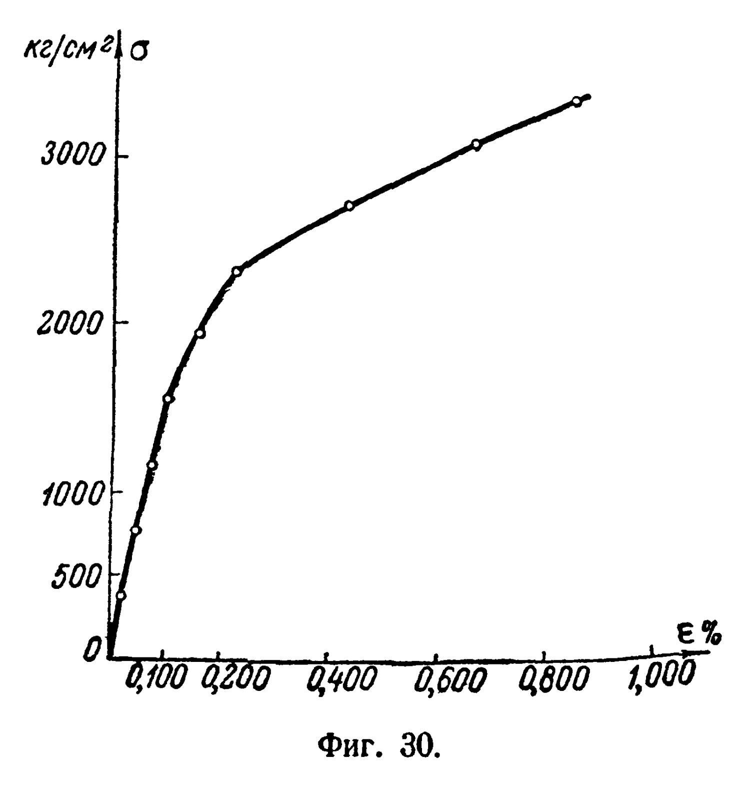


Фиг. 28. Фиг. 29.

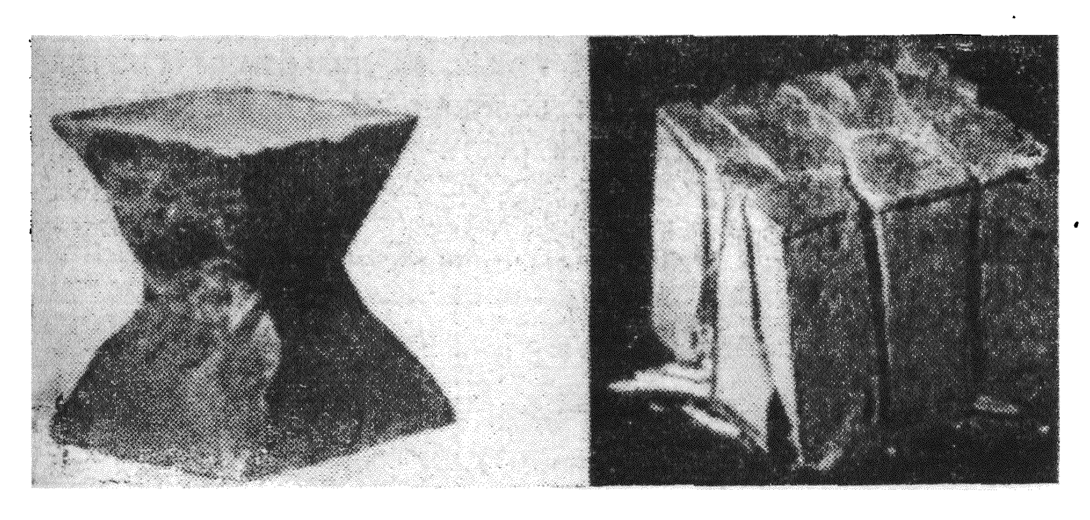
Хрупкие материалы — камень, чугун, бетон — при сжатии разрушаются так же, как и при растяжении, при весьма малых деформациях. На фиг. 29 показана диаграмма напряжений при сжатии каменного образца (кубик размерами $10 \times 10 \times 10$ *см*, гранит). На фиг. 30 дана диаграмма напряжений при сжатии чугуна. Здесь также обращаем внимание на то, что масштабы диаграмм фиг. 29

и 30, в особенности горизонтальный, значительно увеличены по сравнению с масштабом диаграммы фиг. 28.

Характер разрушения образцов камня показан на фиг. 31; раздробленный образец представляет собой усечённые пирамиды, соединённые меньшими основаниями. Эта форма разрушения зависит от наличия при опыте сил трения между образцом и опорными плитами пресса. Если уничтожить это трение, например, путём смазывания парафином торцов кубика, то характер разрушения камня будет иным: камень будет разделяться на части трещинами, параллельными действию сжимающей силы (фиг. 32). Разрушающая нагрузка для такого кубика будет меньше, чем для кубика, испытанного обычным путём, без смазки. Таким образом, при испытании на сжатие величина предела прочности оказывается в значительной мере *условной* характеристикой прочности материала. Это



Фиг. 30.



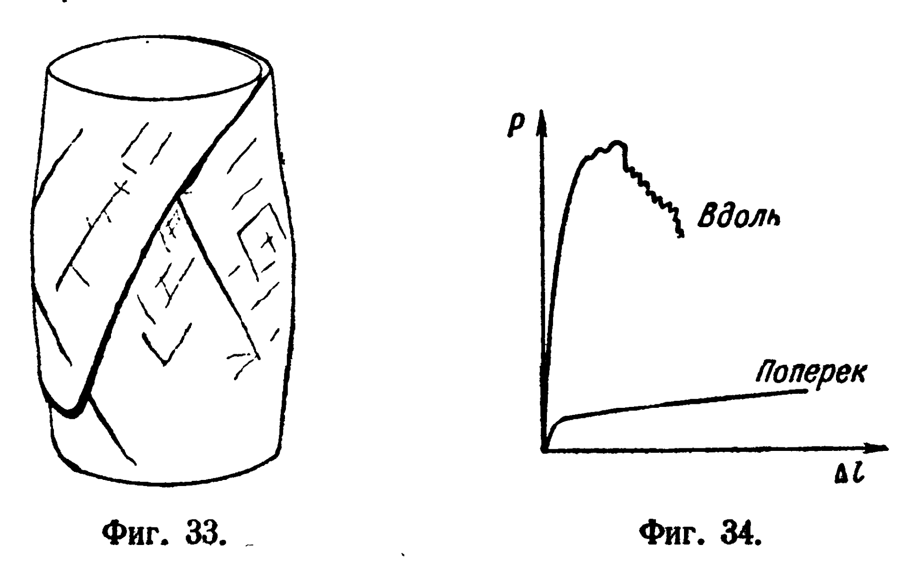
Фиг. 31. Фиг. 32.

обстоятельство приходится учитывать при назначении коэффициента запаса.

При медленном ведении опыта на сжатие для образцов призматической формы из бетона или из каменной кладки подмечено, что разрушение начинается с появления продольных, параллельных направлению силы трещин. Таким образом, можно сказать, что *материал*

сжимаемого образца разрушается, повидимому, от нарушения сопротивления отрыву отдельных его частей.

Для чугуна характер разрушения близок к тому, который наблюдается для камня. Вид раздробленного сжатием вдоль оси чугунного цилиндра показан на фиг. 33. *Необходимо отметить, что хрупкие материалы обычно сопротивляются сжатию гораздо лучше, чем растяжению.*



Фиг. 33. Фиг. 34.

При сжатии образцов дерева получаются резко различные результаты в зависимости от направления сжатия по отношению к волокнам; дерево — материал, называемый *анизотропным*, т. е. обладающим разными свойствами в разных направлениях. При сжатии дерева вдоль волокон предел прочности оказывается примерно в 10 раз больше, чем при сжатии поперёк волокон, а деформация значительно меньше. На фиг. 34 показаны диаграммы сжатия деревянного кубика вдоль и поперёк волокон. В таблице 5 приведены данные о пределах прочности при растяжении и сжатии важнейших материалов.

Таблица 5. **Пределы прочности в** ***кг/см²*****.**

Наименование материала	При растяжении	При сжатии
Сталь для конструкций (в мостах, зданиях)	3 800 — 4 200	—
Сталь машиноподелочная (углеродистая) .	3 200 — 8 000	—
Рельсовая сталь	7 000 — 8 000	—
Специальные стали для машиностроения .	7 500 — 19 000	—
Чугун (серый)	1 700 — 2 500	6 000 — 10 000
Сплавы меди (латунь, бронза)	2 200 — 5 000	—
Дерево (сосна)	800	400
Естественные камни	—	100 — 5 000
Бетон	—	50 — 350

Более подробные сведения даны в приложении в конце книги.

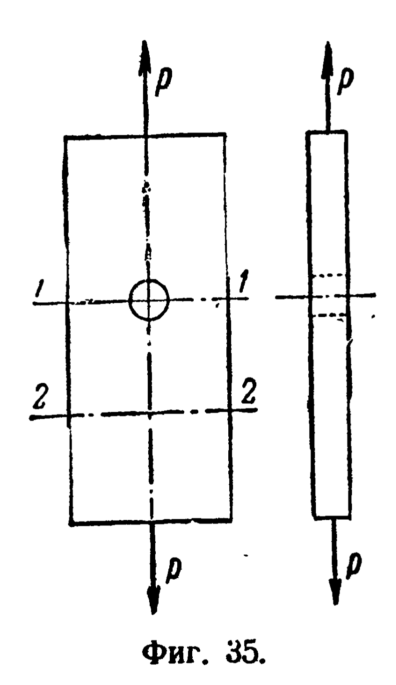
§ 16. Сравнительная характеристика механических свойств пластичных и хрупких материалов.

Основная разница между хрупкими и пластичными материалами заключается в том, что хрупкие материалы разрушаются при очень небольших деформациях, в то время как окончательное разрушение пластичных материалов происходит лишь после значительных изменений формы. В связи с этим площади диаграмм для пластичных материалов значительно больше, чем для хрупких.

Для разрушения пластичных материалов необходимо затратить гораздо больше работы, чем для хрупких. Поэтому в тех случаях, где задачей конструкции является поглощение возможно большей кинетической энергии удара без разрушения, пластичные материалы оказываются более подходящими.

Хрупкие материалы очень легко разрушаются при действии удара именно потому, что их удельная работа деформации очень мала. При спокойной же, постепенно возрастающей сжимающей нагрузке те же хрупкие материалы способны иногда безопасно брать на себя значительно бóльшие напряжения, чем пластичные, благодаря своей способности давать очень малые изменения формы до напряжений, близких даже к пределу прочности.

Вторым характерным признаком, разделяющим оба типа материалов, является тот признак, что для пластичных материалов можно считать почти одинаковым их поведение в первых стадиях деформации при растяжении и сжатии. Громадное же большинство хрупких материалов сопротивляется растяжению много хуже, чем сжатию. Это в значительной мере ограничивает область применения хрупких материалов или требует специальных мер при работе их на растяжение, например усиления бетона сталью в растянутых элементах.

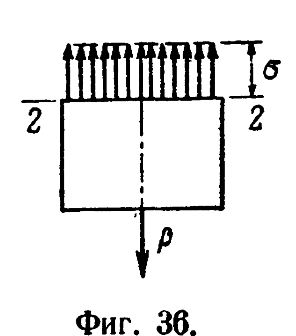


Фиг. 35.

Резкая разница между пластичными и хрупкими материалами обнаруживается в их поведении по отношению к так называемым *местным напряжениям*. Под местными напряжениями мы подразумеваем такие, которые распространяются на сравнительно малую часть поперечного сечения элемента. Обычно эти напряжения вызываются каким-либо резким изменением размеров или формы поперечных сечений по длине стержня.

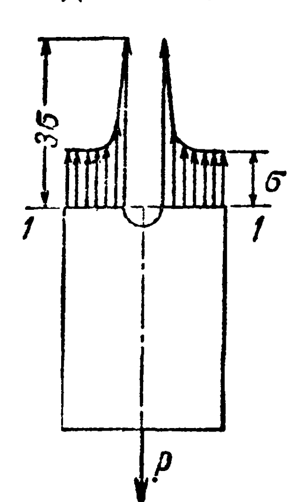
Так, если мы будем растягивать стержень, ослабленный отверстием (фиг. 35), то в сечении *2—2*, достаточно удалённом от отверстия, распределение напряжений будет равномерным: $\sigma = \frac{P}{F}$.

Это распределение показано на фиг. 36. Если же мы возьмём сечение *1—1*, наиболее ослабленное, то, в случае достаточно большой ширины стержня, в нём распределение нормальных напряжений будет таким, как показано на фиг. 37, т. е. в частях сечения около отверстия напряжение будет примерно равно 3σ; однако такое резкое повышение напряжений распространяется на ***весьма небольшую*** часть сечения, лишь около отверстия.



Фиг. 36.

На всей остальной площади сечения напряжения остаются равными σ, как будто ослабления не было. Таким образом, наличие небольшого отверстия в стержне вызывает очень большие местные напряжения, захватывающие, однако, очень малую часть площади поперечного сечения. Подобные же местные перенапряжения вызываются всякими надрезами, выточками и царапинами на поверхности стержня, винтовой нарезкой, следами от обработки резцом и т. п. У дна этих нарезок и царапин материал испытывает значительно бо́льшие напряжения, чем по всему прочему сечению. Эти выводы верны, пока материал следует закону Гука, а деформации, сопровождающие напряжения, малы.



Фиг. 37.

Коэффициент повышения наибольших местных напряжений по отношению к общим называется *коэффициентом концентрации* и обозначается $\alpha_к$:

$$\alpha_к = \frac{\sigma_м^{max}}{\sigma}.$$

Так как у хрупких материалов мы не получаем значительных деформаций почти до самого разрушения, то изображённая картина распределения напряжений будет иметь место при сжатии или растяжении стержня из такого материала всё время, т. е. пока наибольшие напряжения не достигнут предела прочности[1]). В связи с этим стержень из хрупкого материала при наличии местных напряжений разрушится или даст хотя бы трещины при значительно меньших величинах *средних* нормальных напряжений $\sigma = \frac{P}{F}$, чем такой же стержень при отсутствии местных напряжений. Последние, таким образом, резко понижают прочность хрупких материалов.

Пластичные материалы гораздо менее восприимчивы к влиянию этих местных перенапряжений. Представим себе, что мы будем растягивать стержень, показанный на фиг. 35, при условии, что материал его — малоуглеродистая сталь. Пока местные напряжения, равные 3σ, будут ниже предела текучести, будет сохраняться та (или почти та —

[1]) Мы рисуем несколько упрощённую схему работы стержня.

на протяжении между пределами пропорциональности и текучести) картина распределения напряжений, которая показана на фиг. 37. Как только наибольшие напряжения у краёв отверстия дойдут до предела текучести, тотчас же в этих точках начнут появляться остаточные деформации, — некоторое время материал будет деформироваться *без дальнейшего повышения* напряжений. После того как эти деформации достигнут определённой величины, иначе говоря, после того как будет пройдена площадка текучести, — начнётся упрочнение, напряжения вновь начнут увеличиваться, но медленнее, чем до наступления текучести.

В остальной части сечения, работающей при напряжениях ниже предела текучести, эти напряжения при дальнейшем увеличении нагрузки будут расти и догонять остановившиеся на некоторое время в своём росте напряжения у краёв отверстия. Таким образом, к тому моменту, когда средние напряжения достигнут предела текучести, при условии достаточно длинной площадки текучести, действительные напряжения в значительной степени выравнятся, — не будет резкой разницы в их величине у края отверстия и по остальному сечению. При короткой площадке текучести такое выравнивание будет менее значительным из-за явления упрочнения, так как напряжения у края отверстия вновь начнут расти ещё до того, как в остальной части сечения будет достигнут предел текучести.

При дальнейшем растяжении стержня частичное выравнивание напряжений отчасти сохранится, и наибольшие грузы для стержней, ослабленного и не ослабленного отверстием, для пластичного материала, будут значительно менее разниться, чем для подобных стержней из хрупкого материала. Таким образом, в стержнях из пластичного материала местные перенапряжения значительно слабее отзываются на прочности при статической нагрузке, чем в стержнях из хрупкого материала. Поэтому, например, при испытании образцы из углеродистой (менее пластичной) стали требуют гораздо более тщательной отделки поверхности, чем образцы из малоуглеродистой стали. Роль пластичности по отношению к местным напряжениям заключается в том, что она как бы выравнивает эти напряжения.

Нами описана значительно упрощённая схема работы стержня с отверстием. На самом деле, выравниванию напряжений препятствует не только явление упрочнения, но и изменение напряжённого состояния в месте концентрации, переход его из линейного напряжённого состояния в объёмное. Такое сложное напряжённое состояние будет исследовано в дальнейшем в гл. VII.

Наконец, ещё одно обстоятельство обусловливает выбор того или другого типа материала при практическом применении. Зачастую при сборке конструкции бывает необходимо несколько погнуть или исправить искривлённый элемент. Так как хрупкие материалы выдерживают без разрушения лишь очень малые деформации, то подобные операции с ними обычно ведут к появлению трещин. Пластичные же

материалы, имеющие способность принимать значительные деформации без разрушения, обычно без всяких затруднений допускают такие изгибы и исправления.

Таким образом, хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению и ударам, очень чувствительны к местным напряжениям и не переносят исправлений формы изготовленных из них элементов.

Пластичные же материалы этими недостатками не обладают; таким образом, пластичность является одним из самых важных и желательных качеств материала.

У хрупких материалов имеется то достоинство, что они обычно дешевле и зачастую обладают высоким пределом прочности сжатию, что может быть использовано при спокойной нагрузке.

Таким образом, хрупкие и пластичные материалы обладают резко разнящимися, противоположными свойствами в отношении их сопротивления простому сжатию и растяжению. Однако эта разница является лишь *относительной*. Хрупкий материал может получить свойства пластичного, и наоборот. Эти свойства — хрупкость и пластичность — зависят от способа обработки материала, от вида напряжённого состояния и температуры. Камень, являющийся при простом сжатии типично хрупким материалом, можно заставить деформироваться как пластичный; в некоторых опытах это удавалось при действии на цилиндрический образец камня давлений, приложенных не только по основаниям цилиндра, но и по его боковой поверхности. С другой стороны, малоуглеродистую сталь, пластичный материал, можно поставить в такие условия работы, например при низких температурах, что она даёт совершенно хрупкое разрушение.

Таким образом, характеристики «хрупкий», «пластичный», которые мы даём материалам на основании опытов на растяжение и сжатие, относятся лишь к поведению этих материалов при *обычных температурах* и лишь при сопротивлении *указанным видам деформаций*. Вообще же хрупкий материал может перейти в пластичный, и наоборот. Поэтому правильнее говорить не о «хрупком» и «пластичном» материале, а о *хрупком* или *пластичном состояниях* материала.

Необходимо отметить, что уже сравнительно небольшое повышение пластичности хрупкого материала (хотя бы до 2% относительного удлинения при разрыве) позволяет применять его в целом ряде случаев, исключавшихся для хрупких материалов (в частях машин).

Поэтому работа над повышением пластичности таких материалов, как бетон, чугун, заслуживает самого серьёзного внимания.

Подробнее вопрос о причинах хрупкого и пластичного состояния материала рассмотрен в главе XXXVIII.

§ 17. Основания для выбора коэффициента запаса прочности.

А. В предыдущих параграфах подробно изучены способы вычисления напряжений, определения механических свойств материалов при растяжении и сжатии и даны указания о выборе того или иного типа материала (пластичного или хрупкого) в зависимости от условий работы конструкции.

Для установления величины допускаемых напряжений, пригодных в разных случаях действия нагрузки, приведённых пока данных всё же не вполне достаточно. Все величины, характеризующие механические свойства материала (предел прочности, относительное удлинение, предел пропорциональности и т. п.), получаются из опытов в лаборатории при действии *статической* нагрузки, т. е. возрастающей постепенно, без толчков, ударов и перемен знака. Точно так же формулы, связывающие величину нормальных напряжений σ с величиной сжимающих или растягивающих сил P, выведены для случая статического действия этих сил; предполагалось, что внешние силы и напряжения, приложенные к отсечённой части стержня, взаимно уравновешиваются. Между тем в целом ряде случаев приходится иметь дело с нагрузками, действующими ударно или систематически меняющимися.

Влияние ударно приложенной нагрузки сказывается двояко по сравнению со статической: с одной стороны, хрупкие и пластичные материалы различно реагируют как *материалы* на ударное действие нагрузок; с другой стороны, и *напряжения* оказываются в этом случае другими, чем при статических нагрузках. Подробнее этот вопрос будет разобран в главах о динамическом действии нагрузок. Здесь мы обратим внимание только на то обстоятельство, что при динамическом действии нагрузок напряжения обычно будут *бо́льшими,* чем при статическом действии тех же нагрузок. Это положение подтверждается опытами и может быть доказано теоретически, что и будет сделано в отделе X.

Отношение напряжения $\sigma_д$, вызванного динамическим действием нагрузки, к напряжению σ, вызванному статическим действием той же нагрузки, носит название *динамического коэффициента* и обозначается $K_д$:

$$\frac{\sigma_д}{\sigma} = K_д.$$

Величина динамического коэффициента зависит от характера динамичности нагрузки и в ряде случаев достигает весьма больших значений.

Б. Сопротивление материалов действию нагрузок, систематически изменяющих свою величину или величину и знак, значительно отличается от сопротивления материалов статическому и ударному действию нагрузок.

Если, например, стальной стержень мы будем подвергать большое число раз попеременно растяжению и сжатию, то обнаружим,

что после определённого количества перемен напряжений стержень в некоторых случаях даст трещину и затем разрушится при напряжениях, значительно меньших предела прочности. Даже в случае пластичного материала остаточная деформация образца, разрушенного подобным образом, оказывается весьма незначительной — происходит хрупкий излом.

Явление разрушения материала при действии переменных напряжений, меньших, чем предел прочности, называется явлением *усталости*. Это название не отвечает физической природе явления, однако оно настолько укоренилось, что применяется и в настоящее время.

Опыты показывают, что при переменном растяжении и сжатии, по мере понижения величины действующей силы возрастает число перемен этой силы, необходимое для того, чтобы вызвать разрушение образца. Для каждого материала существует такое максимальное значение нормального напряжения σ, при котором образец выдерживает практически неограниченное число перемен усилий, не разрушаясь. Это напряжение обозначается $\sigma_к$ и называется *пределом выносливости* или *пределом усталости*. Пока действительные напряжения в элементе не превзошли этого предела, разрушения не произойдёт, сколько бы раз напряжение не меняло свою величину.

Таким образом, в случае систематически меняющихся нагрузок оказывается необходимым установить новую механическую характеристику материала — предел выносливости; эта величина определяет способность материала сопротивляться переменным напряжениям. Подробное изучение вопросов усталости материала при разных видах нагрузок будет дано в главе XXXVII.

Всё изложенное необходимо учитывать при выборе допускаемых напряжений на растяжение и сжатие или, что всё равно, при определении коэффициента запаса k в формуле (см. §§ 4 и 7):

$$[\sigma] = \frac{\sigma_в}{k}. \tag{3.4}$$

Этот коэффициент должен быть выбран с тем расчётом, чтобы величина нормальных напряжений, действующих по всему сечению, не превосходила предела упругости (или текучести) материала, иначе наш стержень получит остаточные деформации, а при действии переменных нагрузок не превосходила предела выносливости, который обычно ниже предела текучести.

При ударной нагрузке следует учесть, что напряжения обычно повышаются. Так как и в этом случае напряжения всё же обычно вычисляют в предположении статического действия сил, то влияние динамического действия нагрузки приходится учитывать соответствующим увеличением коэффициента запаса.

В. Что касается местных напряжений (см. § 16), то можно мириться с переходом их за предел упругости и текучести в пластичных материалах при отсутствии переменных нагрузок. В этом случае мы

получаем остаточные деформации лишь на протяжении такой небольшой части стержня, что на работе конструкции это обстоятельство не скажется. За счёт появления остаточных деформаций местные напряжения прекращают своё увеличение, отчасти выравниваются. В хрупких материалах этого преимущества нет (§ 16): для них приходится коэффициент запаса назначать повышенным, тем более, что и в отношении сопротивления ударам они стоят значительно ниже пластичных.

При переменных нагрузках, когда мы вынуждены считаться с возможностью развития трещин усталости, учёт величины местных напряжений необходим и может очень резко сказаться на выборе коэффициента запаса даже для пластичных материалов. Для появления трещин усталости необходимо, чтобы в каком-либо месте стержня *действительные* напряжения перешли за предел выносливости. Так как *местные* напряжения выше общих (действующих по большей части сечения), то опасность появления трещины и вызывается тем, что именно местные напряжения перейдут за предел выносливости. Так как подбор сечения мы ведём, исходя из величины наибольших общих напряжений по условию

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} \leqslant [\sigma] = \frac{\sigma_в}{k},$$

то коэффициент запаса для допускаемых *общих* напряжений в этом случае надлежит выбрать так, чтобы *местные* напряжения не превосходили *предела выносливости.* Это во многих случаях требует значительного увеличения коэффициента k по сравнению со случаем статической нагрузки.

Для *пластичных* материалов в тех случаях, когда предел выносливости лежит *выше* предела текучести, можно не учитывать местные напряжения, так как явление текучести уменьшает возможность их распространения, играет как бы роль буфера.

Для *хрупких* материалов, не имеющих площадки текучести, опасность появления трещин усталости при переменных нагрузках остаётся в полной мере, что требует соответствующего увеличения коэффициента запаса по сравнению со статической нагрузкой.

Таким образом, поскольку выбор коэффициента запаса обусловливается свойствами материала и способом приложения внешних сил, хрупкие материалы требуют обычно бóльших коэффициентов запаса, чем пластичные; точно так же эти коэффициенты приходится выбирать бóльшими при динамических и переменных нагрузках, чем при статических.

Г. При выборе допускаемых напряжений приходится учитывать ещё ряд других обстоятельств. Величины сил, входящих в наши расчёты, известны нам не вполне точно; механические свойства материалов дают на практике зачастую значительные колебания;

методы наших расчётов, наши представления о взаимодействии отдельных частей конструкций являются обычно упрощёнными и приближёнными. Коэффициент запаса должен покрыть все эти неточности, неизбежные в наших расчётах.

Чем неоднороднее материал, чем хуже мы знаем действительные нагрузки, чем упрощённее мы представляем себе соединение отдельных элементов конструкции, тем бо́льшим этот коэффициент приходится выбирать. Части машин в работе изнашиваются, поэтому во многих случаях приходится давать «запас на износ». Точно так же в металлических и деревянных инженерных сооружениях приходится учитывать возможность коррозии и загнивания.

С другой стороны, имеются конструкции (самолёты), где необходимо итти до крайних пределов снижения коэффициента запаса с целью уменьшения веса. Точно так же инженеру приходится снижать коэффициент запаса при выполнении работ в обстановке военного времени.

Таким образом, правильный выбор допускаемых напряжений представляет собой весьма сложную задачу, связанную и с методами расчётов, методами исследования материалов, с хозяйственно-экономическими и некоторыми другими факторами. Выбор той или иной величины допускаемого напряжения определяет и расход данного материала, и формы его применения в конструкции; этот выбор регулирует и продолжительность использования сооружений, и область применения тех или других материалов. Поэтому ясно, что в Советском Союзе вопрос о допускаемых напряжениях тесно связан с вопросами регулирования и планирования хозяйственной жизни страны.

Для многих конструкций нормы допускаемых напряжений устанавливаются законом, и инженер должен лишь уметь правильно применять их. В исключительных же обстоятельствах, например в обстановке военного времени, инженеру приходится в некоторых случаях отступать от этих норм; тогда он может руководствоваться общими соображениями, изложенными в настоящем параграфе и в главе XXXVII.

Д. Подводя итог всему сказанному выше, можно формулировать следующие основные соображения.

Коэффициент запаса надо выбирать с тем расчётом, чтобы был *обеспечен* известный запас против появления так называемого *опасного состояния* материала, которое будет *угрожающим* для работы конструкции.

При статической или ударной нагрузке для пластичных материалов такое состояние характеризуется появлением больших остаточных деформаций (явление текучести), для хрупких — появлением трещин, разрушением материала. При повторно-переменной нагрузке опасное состояние характеризуется появлением и развитием трещины усталости. Напряжение, соответствующее наступлению

опасного состояния, мы будем называть условно σ^0. Это напряжение равно:

$$\sigma^0 = \begin{cases} \sigma_т \text{ — пределу текучести — при наступлении текучести пластичного материала,} \\ \sigma_в \text{ — пределу прочности — при разрушении (трещины) хрупкого материала,} \\ \sigma_к \text{ — пределу выносливости — при появлении трещины усталости.} \end{cases}$$

Таким образом, формула (3.4) может быть теперь уточнена и заменена тремя формулами в зависимости от характера опасного состояния материала:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{k_т}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_в}{k_в}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_к}{k_к}, \tag{3.5}$$

где $k_т$, $k_в$, $k_к$ — соответствующие коэффициенты запаса. Эти три формулы можно обобщить в виде

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{k},$$

подразумевая под σ^0 либо $\sigma_т$, либо $\sigma_в$, либо $\sigma_к$, а под k либо $k_т$, либо $k_в$, либо $k_к$.

Однако наша первоначальная формула (3.4) не утратила своего практического значения. Так как пределы текучести и выносливости в известной мере связаны с пределом прочности, то можно для всех видов опасного состояния установить коэффициент запаса и по отношению к пределу прочности $\sigma_в$.

Таковы, в общем, исходные соображения, положенные в основу решения задачи о выборе допускаемых напряжений.

Е. Переходя к вопросу о назначении величины коэффициента запаса, пока ограничимся весьма краткими указаниями. Неоднородность материала, неточность при определении величин сил, неточность расчёта, т. е. *общие факторы,* учитываются так называемым *основным* коэффициентом запаса k_0. Для пластичных материалов (сталь) он принимается обычно равным $k_т = k_0 = 1{,}4 \div 1{,}6$, для хрупких материалов и дерева $k_в = k_0 = 2{,}5 \div 3{,}0$. Остальные факторы, т. е. динамичность нагрузок, переменность их действия и влияние местных перенапряжений, учитываются дополнительными коэффициентами, на которые умножается основной.

При этом надо помнить, что полученное по формуле (3.4) допускаемое напряжение $[\sigma]$ должно сопоставляться с действующим в детали конструкции статическим напряжением без учёта динамичности нагрузки и прочих дополнительных факторов.

Если при назначении допускаемого напряжения учитываются только общие факторы, т. е. коэффициент запаса принимается

равным одному лишь основному, то динамику и местные напряжения учитывают, когда это возможно, в величине действительного напряжения, умножая основное статическое напряжение на коэффициенты динамики и концентрации. Нетрудно убедиться, что в обоих случаях результаты будут одинаковыми.

Примерные значения общего коэффициента запаса по отношению к пределу прочности для различного состояния материала и для различного характера действия нагрузок со включением в него обычной величины влияния динамичности нагрузки и местных напряжений показаны в таблице 6.

Таблица 6. **Коэффициенты запаса.**

Характер нагрузки	Состояние материала	$k_в$
1. Статическая нагрузка	Пластичный материал	2,4 ÷ 2,6
	Хрупкий материал	3,0 ÷ 9,0
2. Ударная нагрузка	Пластичный материал	2,8 ÷ 5,0
3. Переменная нагрузка (растяжение-сжатие одинаковой величины)	Пластичный материал (сталь)	5,0 ÷ 15,0

Эта таблица имеет лишь *ориентировочный* характер; она даёт представление об изменении коэффициента в зависимости от различных обстоятельств. Подробнее о коэффициентах запаса для ударных и переменных нагрузок будет сказано в главах XXXVI и XXXVII.

§ 18. Допускаемые напряжения на растяжение и сжатие для различных материалов.

В предыдущем параграфе нами были выяснены те многочисленные обстоятельства, которые влияют на выбор величины коэффициента запаса прочности и, следовательно, на значение допускаемого напряжения. Ниже, в таблице 7, приводятся ориентировочные величины основных допускаемых напряжений на растяжение и сжатие некоторых главнейших материалов, применяемых в инженерном деле и в машиностроении. Эта таблица составлена на основании действующих в настоящее время в СССР норм. Она не охватывает всего многообразия материалов и условий их работы. В каждом частном случае расчётной практики следует устанавливать допускаемые напряжения в соответствии с официальными техническими условиями и нормами проектирования данной конкретной конструкции или, при их отсутствии, на основании соображений, изложенных в предыдущем параграфе.

Таблица 7. **Ориентировочные величины основных допускаемых напряжений.**

Наименование материала	Допускаемое напряжение в $кг/см^2$	
	на растяжение	на сжатие
Чугун серый в отливках	280—800	1200—1500
Сталь ОС и ст. 2	1400	
Сталь ст. 3	1600	
Сталь ст. 3 в мостах	1400	
Сталь углеродистая конструкционная в машиностроении	600—2500	
Сталь легированная конструкционная в машиностроении	1000—4000 и выше	
Медь	300—1200	
Латунь	700—1400	
Бронза	600—1200	
Алюминий	300— 800	
Алюминиевая бронза	800—1200	
Дюралюмин	800—1500	
Текстолит	300— 400	
Гетинакс	500— 700	
Бакелизованная фанера	400— 500	
Сосна вдоль волокон	70—100	100—120
Сосна поперёк волокон	—	15— 20
Дуб вдоль волокон	90—130	130—150
Дуб поперёк волокон	—	20— 35
Каменная кладка	до 3	4— 40
Кирпичная кладка	до 2	6— 25
Бетон	1—7	10— 90

Материалы, перечисленные в таблице, должны удовлетворять требованиям и нормам (в отношении механической прочности, пластичности, технологии изготовления, химического состава и пр.), содержащимся в соответствующих стандартах (см. приложение в конце книги).

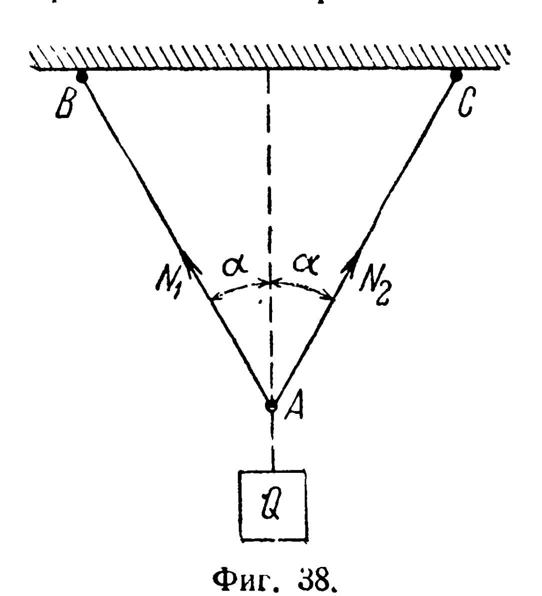
ОТДЕЛ II.
СЛОЖНЫЕ СЛУЧАИ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ.

ГЛАВА IV.
РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ.

§ 19. Статически неопределимые системы.

Умение вычислять деформации стержней при растяжении и сжатии даёт нам возможность установить, насколько изменяются формы и размеры частей конструкций при действии внешних сил. Обычно эти изменения формы настолько незначительны, что кажутся лишёнными практического значения.

Однако есть целый класс конструкций, для которых проверка прочности и определение сечения отдельных элементов невозможны без умения определять деформации; это так называемые *статически неопределимые* конструкции (системы); нахождение усилий в их элементах представляет собой *статически неопределимую задачу.*



Фиг. 38.

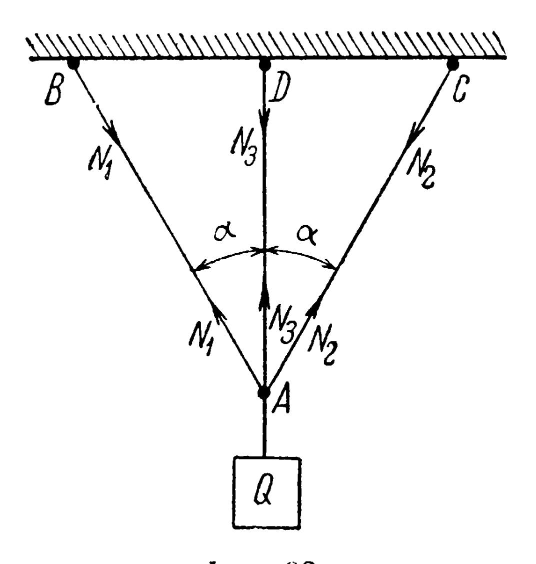
Во всех примерах, которые мы рассматривали до сих пор, усилия, растягивающие или сжимающие стержни, определялись из условий статики твёрдого тела.

Так, в случае подвески груза Q на двух стержнях (фиг. 38) AB и AC мы находим усилия N_1 и N_2, растягивающие эти стержни, из условия равновесия точки A. Три силы, приложенные в точке A, должны удовлетворять двум уравнениям равновесия, а именно: сумма проекций этих сил на каждую из двух координатных осей должна равняться нулю. Таким образом, число неизвестных (два) равно числу уравнений (два), и усилия N_1 и N_2 из этих уравнений могут быть найдены. Эта задача — статически определимая.

Иначе будет обстоять дело, если груз Q будет подвешен на трёх стержнях (фиг. 39). В этом случае точка A находится в равно-

весии под действием четырёх сил: Q, N_3, N_1 и N_2, причём три последние являются неизвестными. Уравнений же равновесия можно написать по-прежнему лишь два. Таким образом, число неизвестных на единицу больше числа уравнений — конструкция однажды статически неопределима, и задача не может быть решена только с помощью уравнений статики.

Необходимое для решения задачи дополнительное уравнение можно составить, пользуясь теми представлениями о свойствах материалов, которые мы получили, переходя от теоретической механики к сопротивлению материалов. Речь идёт об учёте деформируемости материала. Дополнительное уравнение мы сможем найти, изучая те деформации, которые испытывает конструкция. Оказывается, что *всегда* можно найти столько дополнительных уравнений, сколько нам нужно, чтобы полное число уравнений вместе с условиями статики равнялось числу неизвестных.



Фиг. 39.

Эти дополнительные уравнения составляются на основании одного общего принципа, они должны выразить *условия совместности деформаций* системы.

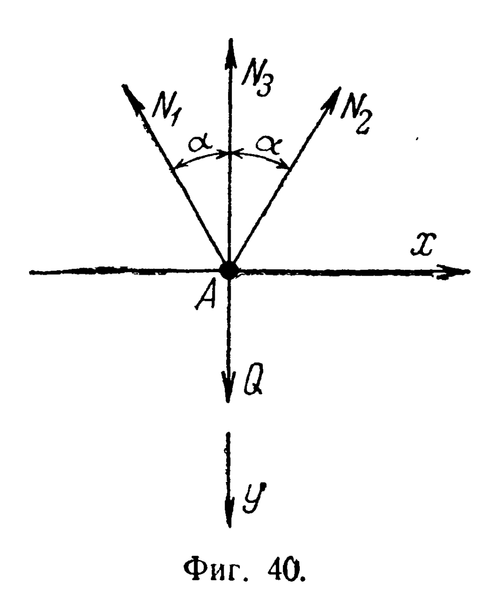
Всякая конструкция деформируется так, что не происходит разрывов стержней, разъединения их друг от друга, или не предусмотренных схемой сооружения перемещений одной части конструкции относительно другой. В этом и заключается ***совместность деформаций*** элементов системы.

Общий метод расчёта статически неопределимых систем таков. Сначала следует выяснить, какие усилия необходимо определить; затем написать все уравнения статики твёрдого тела; после этого — составить дополнительные уравнения в таком числе, чтобы можно было найти все неизвестные усилия.

Ход решения выясним на взятом частном примере (фиг. 39). Пусть крайние стержни, имеющие равные площади поперечных сечений, — стальные, средний же стержень — медный. Длина среднего стержня l_3, крайних l_1; допускаемые напряжения для стали пусть будут $[\sigma_c]$, а для меди $[\sigma_м]$. Требуется установить прочные размеры поперечных сечений этих стержней под действием подвешенного к ним груза Q.

Прежде всего установим силы, действующие на каждый из трёх стержней. Так как в точках A, B, C и D имеются шарниры, все три стержня могут подвергаться только *осевым* усилиям. Считаем эти усилия растягивающими; для их определения мы должны рассмотреть равновесие точки A, к которой приложена единственная

известная сила Q. Схема действия сил на точку и расположение координатных осей даны на фиг. 40. Приравниваем нулю суммы проекций на координатные оси сил, действующих на точку A:



Фиг. 40.

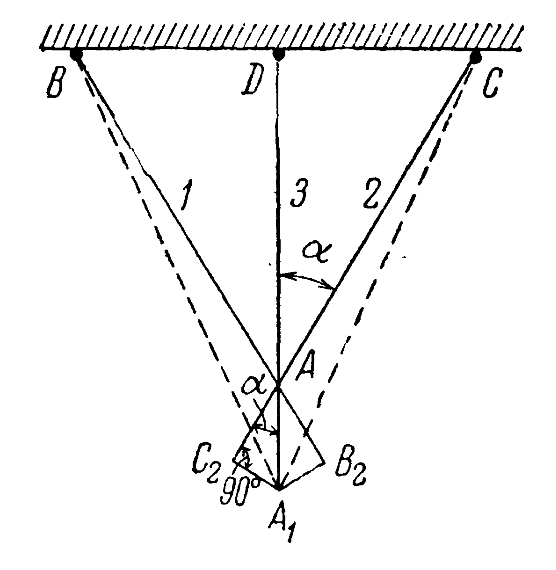
$$N_2 \sin \alpha - N_1 \sin \alpha = 0,$$
$$Q - N_3 - N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha = 0.$$

Из первого уравнения получаем $N_1 = N_2$; подставляя вместо N_2 во второе уравнение величину N_1, получаем:

$$N_3 + 2N_1 \cos \alpha = Q. \qquad (4.1)$$

Теперь у нас осталось *одно* уравнение *с двумя* неизвестными.

Для получения дополнительного уравнения мы должны обратиться к изучению деформаций нашей конструкции. Под действием силы Q все три стержня удлинятся, и точка A опустится. Так как усилия N_1 и N_2 равны между собой и стержни *1* и *2* из одного материала, то при равных длинах стержней их удлинения Δl_1 и Δl_2 будут одинаковы, точка A опустится по вертикали вниз. Удлинение третьего стержня назовём Δl_3.



Фиг. 41.

Изменения длин всех трёх стержней будут совместны, т. е. и после деформации стержни остаются соединёнными в точке A. Для нахождения нового положения этой точки разъединим в ней стержни и изобразим на чертеже (фиг. 41) новые длины крайних стержней CC_2 и BB_2, увеличив их старую длину на величины $\Delta l_1 = AB_2$ и $\Delta l_2 = AC_2$. Для того чтобы найти новое положение точки A, необходимо свести вместе удлинённые стержни CC_2 и BB_2, вращая их вокруг точек B и C. Точки B_2 и C_2 совпадут в точке A_1, двигаясь по дугам C_2A_1 и B_2A_1, которые вследствие малости деформаций можно принять за прямые отрезки, *перпендикулярные* к CC_2 и BB_2.

Новое положение крайних стержней BA_1 и CA_1 показано пунктиром. Так как конец среднего стержня тоже прикреплён к шарниру, то и он перейдёт в точку A_1, и удлинение Δl_3 будет равно отрезку AA_1.

Удлинения всех трёх стержней Δl_1, Δl_2 и Δl_3 по закону Гука будут пропорциональны усилиям, растягивающим эти стержни.

Найдя из чертежа зависимость между этими удлинениями, мы получим добавочное уравнение, связывающее между собой неизвестные усилия в стержнях. Из треугольника A_1AB_2 имеем:

$$AB_2 = AA_1 \cos\alpha \quad \text{или} \quad \Delta l_1 = \Delta l_3 \cos\alpha. \tag{4.2}$$

Выразим Δl_1 и Δl_3 через усилия N_1 и N_3. Для этого необходимо знать площади этих стержней. Здесь мы подходим к важной особенности статически неопределимых систем: *для нахождения усилий в стержнях необходимо предварительно задаваться размерами их поперечных сечений или их отношениями.*

Пусть площади сечений стержней будут F_1 и F_3; модуль упругости стали обозначим $E_с$ и модуль упругости меди $E_м$. Тогда

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_с F_1}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_м F_3}. \tag{4.3}$$

Подставляя эти значения Δl_1 и Δl_3 в уравнение (4.2), получаем:

$$\frac{N_1 l_1}{E_с F_1} = \frac{N_3 l_3}{E_м F_3} \cos\alpha.$$

Так как из треугольника ABD (фиг. 41) следует, что

$$l_3 = l_1 \cos\alpha,$$

то

$$N_1 = N_3 \frac{E_с F_1}{E_м F_3} \cos^2\alpha. \tag{4.4}$$

Таким образом, путём рассмотрения совместности деформаций системы получено дополнительное уравнение, связывающее N_1 и N_3.

Условие совместности деформаций имело место и в статически определимых конструкциях, но там оно не налагало никаких ограничений на распределение усилий; для таких конструкций возможна только одна система усилий, удовлетворяющая условиям равновесия; так как там число неизвестных равно числу уравнений статики, соответствующая система деформаций удовлетворяет и условиям совместности. Например, для конструкции, изображённой на фиг. 38, усилия в стержнях вполне определяются при малых деформациях из условий равновесия точки A; оба стержня могут получить вызываемые этими усилиями удлинения без нарушения связи их друг с другом, — условие совместности деформаций будет выполнено автоматически.

Наоборот, в статически неопределимых конструкциях может быть сколько угодно систем усилий, для которых выполнены уравнения равновесия, так как число неизвестных *больше* числа этих уравнений; условие совместности деформаций отбирает из всех этих возможных комбинаций усилий ту комбинацию, которая будет иметь место в действительности.

В статически неопределимой системе (фиг. 39) положение точки A после деформации связывает между собой удлинения всех трёх стержней; чтобы была соблюдена совместность деформаций, необходимо, чтобы эти удлинения находились между собой в определённом отношении; это условие и даёт добавочное уравнение (4.4) для определения неизвестного усилия.

Продолжая решение нашей задачи, подставляем из (4.4) значение N_1 в уравнение (4.1) и получаем:

$$N_3 + 2N_3 \frac{E_c F_1}{E_м F_3} \cos^3 \alpha = Q.$$

Отсюда

$$N_3 = \frac{Q}{1 + 2 \frac{E_c F_1}{E_м F_3} \cos^3 \alpha} \tag{4.5}$$

и из (4.4)

$$N_1 = \frac{Q \frac{E_c F_1}{E_м F_3} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{E_c F_1}{E_м F_3} \cos^3 \alpha} = N_2. \tag{4.6}$$

Из полученных формул видно, что величина усилий N зависит не от абсолютных величин площадей F и модулей E, а от их *отношений*. Задаваясь различными соотношениями $n = \frac{F_1}{F_3}$, мы будем получать различные комбинации усилий N_1, N_2, N_3.

По величинам этих усилий и допускаемым напряжениям можно теперь найти и сами величины F_1 и F_3 из условий, что

$$\frac{N_1}{F_1} \leqslant [\sigma_c], \quad \frac{N_3}{F_3} \leqslant [\sigma_м]. \tag{4.7}$$

Определив из первого условия F_1 и зная выбранную нами величину $n = \frac{F_1}{F_3}$, находим $F_3 = \frac{F_1}{n}$. Затем проверяем, удовлетворяет ли она второму из условий (4.7); если нет, то из этого условия находим F_3, а F_1 определяем формулой

$$F_1 = nF_3. \tag{4.8}$$

Таким образом, в *статически неопределимой системе при данной нагрузке* мы можем осуществить *много вариантов распределения усилий* между стержнями, меняя соотношение площадей поперечных сечений стержней. Для дальнейшего разъяснения возьмём числовой пример.

Пусть $Q = 4$ *т*; $\alpha = 30°$; $[\sigma_c] = 1000$ *кг/см*^{2}; $E_c = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}; $[\sigma_м] = 600$ *кг/см*^{2}; $E_м = 1 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}.

Для предварительного подсчёта выбираем

$$n = \frac{F_1}{F_3} = 1.$$

Тогда

$$N_1 = N_2 = \frac{4\frac{2\cdot 10^6}{1\cdot 10^6}\cos^2 30^\circ}{1+2\frac{2\cdot 10^6}{1\cdot 10^6}\cos^3 30^\circ} = 1{,}67\ \textit{т};$$

$$N_3 = \frac{4}{1+2\frac{2\cdot 10^6}{1\cdot 10^6}\cos^3 30^\circ} = 1{,}11\ \textit{т}.$$

Из условий прочности получаем:

$$F_1 = \frac{N_1}{[\sigma_c]} = \frac{1670}{1000} = 1{,}67\ \textit{см}^2.$$

Так как мы приняли, что $F_1 = F_3$, то $F_3 = 1{,}67$ *см*^{2}.

Проверим, будет ли при таких условиях удовлетворено условие прочности для среднего стержня:

$$\frac{N_3}{F_3} = \frac{1110}{1{,}67} = 667\ \textit{кг/см}^2 > 600\ \textit{кг/см}^2.$$

Принятая площадь F_3 мала; необходимо взять

$$F_3 = \frac{N_3}{[\sigma_м]} = \frac{1110}{600} = 1{,}85\ \textit{см}^2.$$

Для того чтобы было соблюдено положенное в основу нашего расчёта условие $F_1 = F_3$, мы должны принять $F_1 = F_3 = 1{,}85$ *см*^{2} вместо необходимой из первого условия величины 1,67 *см*^{2}. Таким образом, в крайних стержнях мы имеем дополнительный запас.

Если бы мы захотели избежать этого излишнего запаса и приняли бы

$$F_1 = F_2 = 1{,}67\ \textit{см}^2;\ F_3 = 1{,}85\ \textit{см}^2, \tag{4.9}$$

то сейчас же изменились бы усилия N_1, N_2 и N_3; отношение $\frac{F_1}{F_3}$ было бы равно уже не 1, как было раньше принято, а 0,9. В формуле (4.5) знаменатель уменьшится и N_3 увеличится; в формуле же (4.6) знаменатель уменьшится в меньшей степени, чем числитель, поэтому N_1 и N_2 уменьшатся.

Уменьшая площади крайних стержней по отношению к площади среднего, мы *уменьшаем* усилия в этих крайних элементах и увеличиваем усилие в среднем стержне.

Здесь отражается общий закон, характеризующий распределение усилий между стержнями в статически неопределимых системах, — эти усилия распределяются соответственно жёсткости стержней; *чем больше площадь данного стержня, тем бо́льшую долю усилия он на себя берёт, и наоборот.*

Если мы будем площади F_1 и F_2 приближать к нулю, то и усилия N_1 и N_2 будут приближаться к нулю, а N_3 к Q. Если же будем уменьшать площадь F_3, то N_3 будет уменьшаться, а N_1 и N_2 — увеличиваться.

При отношении $n = 0{,}9$ [формула (4.8)] $N_1 = N_2 = 1{,}60$ *т*, $N_3 = 1{,}20$ *т*. Это потребует $F_3 = 2{,}0$ *см*^{2} и $F_1 = 1{,}8$ *см*^{2} вместо требуемой по условию прочности для стальных стержней 1,6 *см*^{2}.

Если бы мы приняли для крайних стержней $F_1 = 1{,}6$ *см*^{2}, то отношение n вновь уменьшилось бы, и средний стержень оказался бы опять перенапряжённым. Поэтому приходится опять мириться с запасом в крайних стержнях. Из формулы (4.4) вытекает, что подобрать соотношение площадей $n = \frac{F_1}{F_3}$ так, чтобы напряжение во всех стержнях было равно допускаемому, можно лишь при *определённом значении угла* α. В самом деле, если бы нам удалось назначить площади F точно по допускаемым напряжениям, то мы имели бы соотношения

$$N_1 = F_1 [\sigma_c]; \quad N_3 = F_3 [\sigma_м]. \tag{4.10}$$

Подставляя эти величины в равенство (4.4), получаем:

$$F_1 [\sigma_c] = F_3 [\sigma_м] \frac{E_c F_1}{E_м F_3} \cos^2 \alpha. \tag{4.11}$$

Отсюда имеем:

$$\cos^2 \alpha = \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_м]} \cdot \frac{E_м}{E_c}, \tag{4.12}$$

т. е. для возможности подбора сечений стержней без излишнего запаса при всяком n необходимо, чтобы $\cos \alpha$ удовлетворял условию (4.12).

При наших данных получаем:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1000 \cdot 1 \cdot 10^6}{600 \cdot 2 \cdot 10^6} \quad \text{и} \quad \alpha = 24^\circ.$$

Так как в нашей конструкции $\alpha = 30^\circ$, то при *всяком* n мы вынуждены будем или давать запас в одной группе стержней или идти на перенапряжение для другой группы. Самую же величину n надо выбирать так, чтобы получить наиболее экономичное решение. В таблице 8 даны результаты подсчёта для различных n. Зная площади, длины и материал стержней, можно выбрать комбинацию, дающую наиболее экономичное решение в зависимости от стоимости материала.

Таблица 8. **Результаты расчётов при различных значениях n.**

$n=\frac{F_1}{F_3}$	$\frac{N_1=N_2}{T}$	$\frac{N_3}{T}$	$F_1=F_2$ $см^2$		F_3 $см^2$
			необходимая	принятая	
0,8	1,56	1,30	1,56	1,74	2,17
0,9	1,60	1,20	1,60	1,80	2,00
1,0	1,67	1,11	1,67	1,85	1,85
1,2	1,75	0,97	1,75	1,94	1,62
1,5	1,83	0,82	1,83	2,06	1,37

§ 20. Влияние неточностей изготовления на усилия в элементах статически неопределимых конструкций.

В предыдущих параграфах мы установили особенности работы и расчёта статически неопределимых систем.

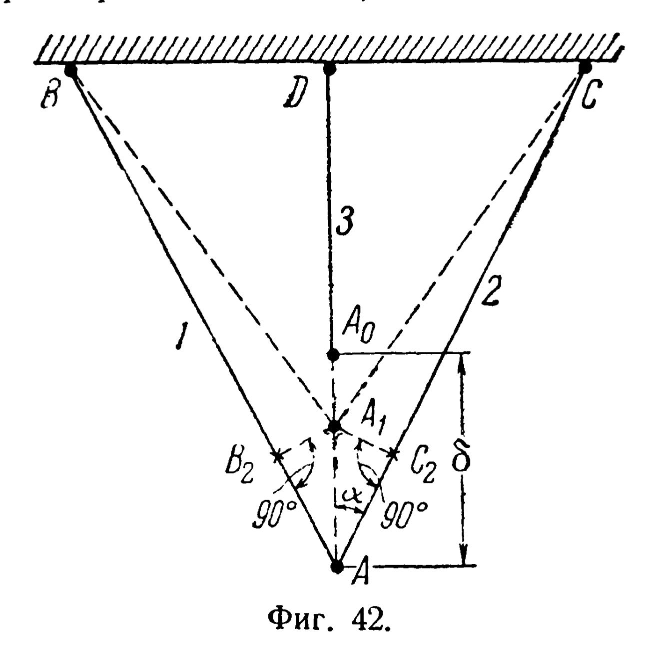
1. Недостающие для определения усилий уравнения могут быть получены *только* при помощи изучения совместности деформаций данной системы.

2. Распределение усилий между элементами статически неопределимой конструкции зависит от соотношения между площадями, модулями упругости и длинами этих элементов.

3. Чем более жёсток данный элемент, т. е. чем меньше его длина и больше площадь и модуль упругости, тем сравнительно бо́льшую долю усилия он принимает на себя.

В настоящем параграфе мы рассмотрим ещё одно важное для практики свойство статически неопределимых конструкций.

При изготовлении всякого рода сооружений нельзя обеспечить абсолютно точного выполнения размеров их частей; всегда надо считаться с возможностью тех или иных небольших неправильностей при их изготовлении. Если мы имеем дело со статически определимой системой, то такие неточности не вызовут никаких напряжений в этой системе. Так, например, если стержень AB (фиг. 38) будет сделан немного короче, чем предполагалось по чертежу, то это поведёт за собой лишь лёгкое искажение треугольника CAB. При отсутствии силы Q усилия в стержнях AB и AC будут равны нулю независимо от того, с какой точностью исполнены длины этих стержней.



Фиг. 42.

Совсем иначе поведёт себя статически неопределимая конструкция, изображённая на фиг. 39. Пусть средний стержень будет сделан короче, чем следует на длину $AA_0=\delta$ (фиг. 42). Чтобы соединить

конец среднего стержня A_0 с концами A крайних стержней где-то в точке A_1, необходимо средний стержень растянуть на длину $\Delta l_3 = A_0A_1$, а крайние сжать на длину $\Delta l_1 = AB_2 = AC_2$. Проводя в точках C_2 и B_2 перпендикуляры к первоначальным положениям крайних стержней, как описано в § 19, получаем точку соединения концов всех трёх стержней A_1. Из чертежа получаем уравнение совместности деформаций стержней:

$$A_0A = A_0A_1 + A_1A,$$

или

$$\delta = \Delta l_3 + \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha}. \tag{4.13}$$

Так как внешних нагрузок нет и усилие N_1 — сжимающее, а N_3 — растягивающее, то уравнение равновесия (4.1) принимает вид

$$N_3 - 2N_1\cos\alpha = 0. \tag{4.14}$$

Заменяя в уравнении (4.13) величины Δl_1 и Δl_3 их значениями

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_c F_1} \quad \text{и} \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_м F_3} = \frac{N_3 l_1 \cos\alpha}{E_м F_3}$$

и решая совместно (4.13) и (4.14), получаем:

$$N_3 = \frac{\delta E_м F_3}{l_3\left[1 + \frac{E_м F_3}{2E_c F_1 \cos^3\alpha}\right]}; \quad N_1 = \frac{N_3}{2\cos\alpha}. \tag{4.15}$$

Знак плюс перед значениями усилий N_3 и N_1 показывает, что наши предположения об их направлении правильны.

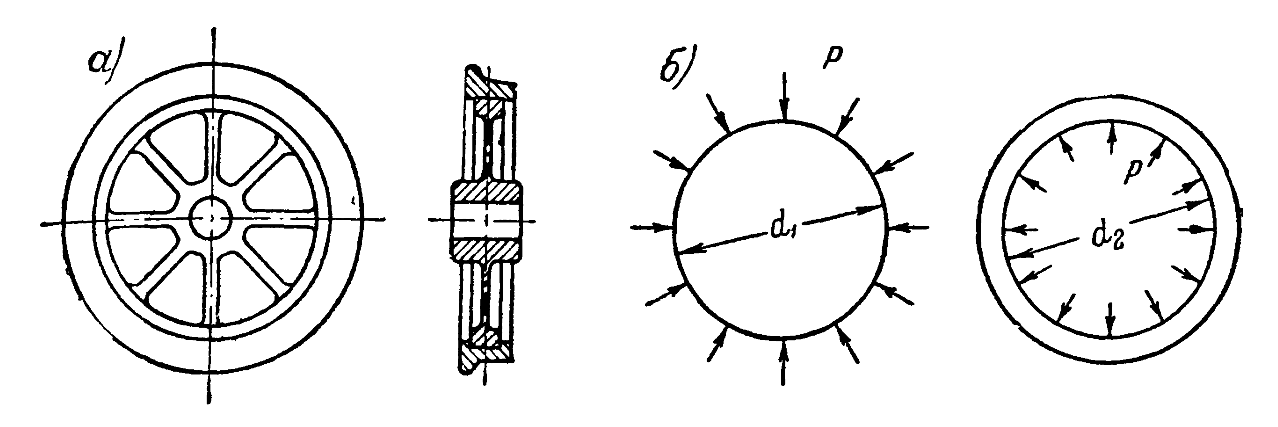
Отметим, что в формулу (4.3) можно подставлять взамен длины среднего стержня величину l_3, а не $l_3 - \delta$, ввиду малости δ по сравнению с l_3. Это упрощение всегда следует применять при расчёте на неточность изготовления.

Приведённый расчёт показывает, что неточности изготовления влекут за собой напряжения в стержнях *даже при отсутствии внешних воздействий на конструкцию*. Таким образом, возможность появления так называемых *начальных* напряжений тоже является основным свойством статически неопределимых конструкций.

Если все три стержня будут сделаны из одного материала и одинаковой площади, то при действии груза Q (фиг. 39) растягивающее усилие в среднем стержне будет больше, чем в крайних (4.4); наличие рассмотренной неточности изготовления вызывает добавочное растягивающее усилие в среднем и сжимающие усилия в крайних стержнях; в этом примере наличие начальных напряжений

усиливает неравномерность работы стержней и является поэтому вредным.

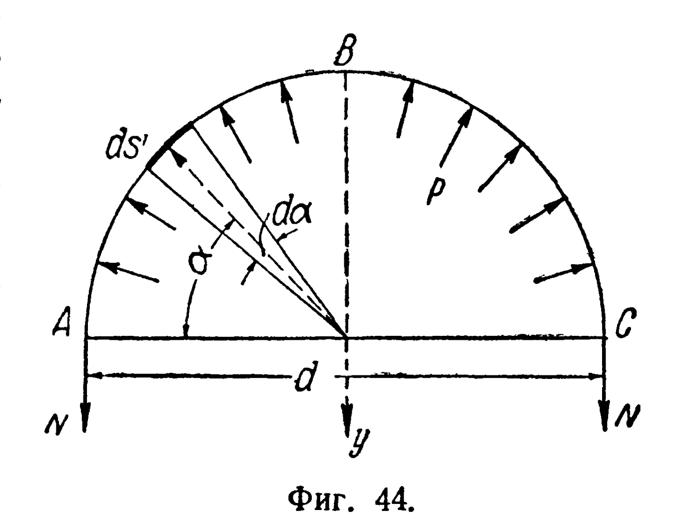
Если бы мы сделали средний стержень длиннее, чем следовало, на величину δ, то начальные напряжения изменили бы знак и несколько *выравняли* бы неравномерность распределения усилий между средним и крайними стержнями под нагрузкой Q. В этом случае



Фиг. 43.

рассмотренное свойство статически неопределимых систем было бы использовано для улучшения работы конструкции.

Другим примером целесообразного использования начальных напряжений является посадка бандажей на колёса подвижного состава. Эти колёса состоят из двух частей: средней отливки — колёсного центра, и стального кованого кольца, надеваемого на центр, — бандажа (фиг. 43, *а* и *б*). Для закрепления бандажа на центре применяют специальные приспособления; кроме того, его внутренний диаметр d_2 делают несколько меньше диаметра d_1; обычно эта разница составляет $\frac{1}{n}d_1$ — около $\frac{1}{2000}d_1$. При надевании бандажа на колёсный центр его нагревают настолько, чтобы внутренний диаметр его стал больше диаметра центра; надетый бандаж, охлаждаясь, будет стремиться сжаться и будет стягивать центр. В бандаже возникнет растягивающее усилие N, а между бандажом и центром — реакция p (фиг. 43, *б*). Если мы разрежем бандаж по диаметру (фиг. 44), то две силы N должны уравновешивать сумму давлений на внутреннюю поверхность отрезанной части бандажа. Составим условие равновесия, проектируя все силы на ось y (фиг. 44); на элемент длины бандажа ds действует давление $p\,ds$; его проекция



Фиг. 44.

на ось y равна $-p\,ds\sin\alpha = -p\frac{d}{2}\sin\alpha\,d\alpha$, так как $ds = \frac{d}{2}\,d\alpha$. Условие равновесия принимает вид

$$2N - \int\limits_{ABC} p\frac{d}{2}\sin\alpha\,d\alpha = 0, \quad \text{или} \quad 2N - \frac{pd}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin\alpha\,d\alpha = 0.$$

Отсюда

$$2N - pd = 0 \quad \text{и} \quad N = \frac{pd}{2}, \quad \text{или} \quad p = \frac{2N}{d}.$$

Таким образом, для двух неизвестных N и p мы имеем одно уравнение статики; задача статически неопределима. Для нахождения неизвестных усилий необходимо учесть совместность деформаций конструкции.

Растяжение бандажа и *сжатие центра должны быть таковы, чтобы* уравнялась разница в диаметрах d_1 и d_2. Пренебрегая деформацией центра ввиду его массивности по сравнению с бандажом, получаем, что всё уравнивание разницы в диаметрах пойдёт за счёт удлинения бандажа. Если эта разница составляет $\frac{1}{n}$ долю диаметра бандажа, то относительное удлинение ε_n диаметра, а стало быть, и всего бандажа будет тоже $\frac{1}{n}$.

Относительное удлинение бандажа от усилия N будет $\varepsilon_N = \frac{N}{EF}$, где F — площадь поперечного сечения бандажа. Приравнивая эти значения $\varepsilon_n = \varepsilon_N$, получаем добавочное уравнение

$$\frac{N}{EF} = \frac{1}{n}; \quad N = \frac{EF}{n} \quad \text{и} \quad p = \frac{2EF}{nd}. \tag{4.16}$$

Напряжение в бандаже равно $\sigma = \frac{N}{F} = \frac{E}{n}$.

В формулу (4.16) вместо d можно подставлять (вместо начального диаметра бандажа d_2) диаметр центра d_1, так как обе эти величины отличаются друг от друга чрезвычайно мало.

Возьмём числовой пример (бандаж товарного вагона шириной 13 *см* и толщиной 7,5 *см*). Пусть

$$d = d_1 = 900 \text{ мм}; \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{1000}; \quad E = 2\cdot 10^6 \text{ кг/см}^2;$$

$$F = 7{,}5\cdot 13 = 97{,}5 \text{ см}^2.$$

Тогда получаем:

$$\sigma = \frac{2\cdot 10^6}{1000} = 2000 \text{ кг/см}^2; \quad N = \frac{2\cdot 10^6\cdot 97{,}5}{1000} = 195\,000 \text{ кг} = 195 \text{ т},$$

$$p = \frac{2\cdot 2\cdot 10^6\cdot 97{,}5}{90\cdot 1000} = 4330 \text{ кг/см}.$$

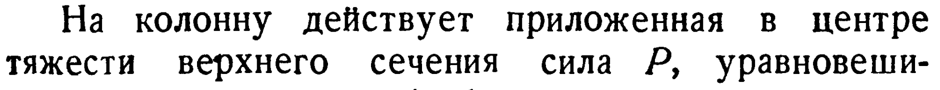
§ 21. Расчёт на растяжение и сжатие стержней, состоящих из разнородных материалов.

Этот вид стержней относится к категории статически неопределимых. В качестве примера разберём определение размеров железобетонной колонны квадратного поперечного сечения со стороной *а см* и высотой *H м* (фиг. 45). Колонна сделана из бетона и снабжена продольными стальными прутьями, расположенными вблизи поверхности колонны, так называемой арматурой.

Обозначим: $F_б$ — площадь поперечного сечения бетонной части колонны; F_c — площадь всех стержней арматуры; $[\sigma_б]$ — допускаемое напряжение на сжатие для бетона; $[\sigma_c]$ — то же для стали; $E_б$ — модуль упругости для бетона; E_c — то же для стали.

Пусть требуется определить размеры колонны так, чтобы она могла взять на себя нагрузку P. Заметим, что $F_б + F_c = a^2$.

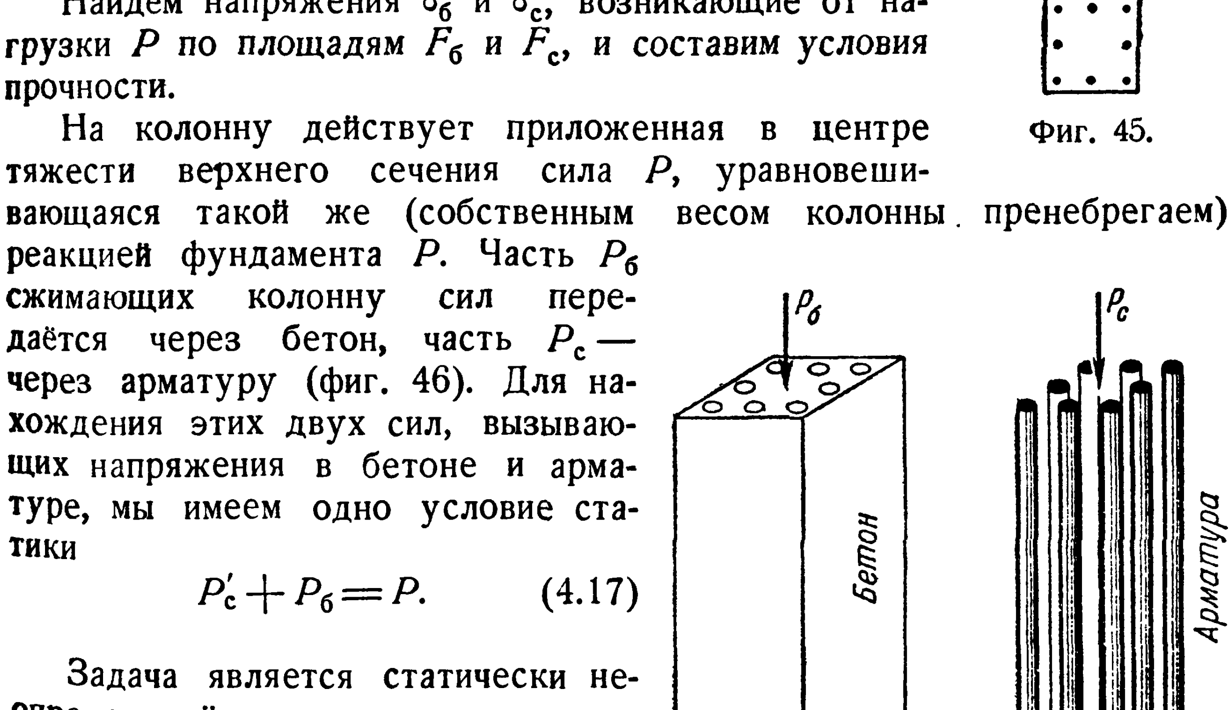
Найдём напряжения $\sigma_б$ и σ_c, возникающие от нагрузки P по площадям $F_б$ и F_c, и составим условия прочности.



Фиг. 45.

На колонну действует приложенная в центре тяжести верхнего сечения сила P, уравновешивающаяся такой же (собственным весом колонны пренебрегаем) реакцией фундамента P. Часть $P_б$ сжимающих колонну сил передаётся через бетон, часть P_c — через арматуру (фиг. 46). Для нахождения этих двух сил, вызывающих напряжения в бетоне и арматуре, мы имеем одно условие статики

$$P'_c + P_б = P. \qquad (4.17)$$



Фиг. 46.

Задача является статически неопределимой; второе уравнение получается из рассмотрения совместности деформаций по условию, что как бетонная, так и стальная части колонны (фиг. 46) укоротятся на одну и ту же величину Δl, так как верхние и нижние плоскости обеих частей совпадают. По закону Гука имеем:

$$\Delta l = \frac{P_б H}{E_б F_б} = \frac{P_c H}{E_c F_c}; \qquad (4.18)$$

это и будет второе уравнение, связывающее $P_б$ и $P_с$. Из (4.18) находим

$$P_с = P_б \frac{F_с E_с}{F_б E_б};$$

подставляя это значение $P_с$ в уравнение (4.17), получаем:

$$P_б\left(1 + \frac{F_с}{F_б} \cdot \frac{E_с}{E_б}\right) = P$$

и

$$P_б = \frac{P}{1 + \frac{F_с}{F_б} \cdot \frac{E_с}{E_б}}; \quad P_с = \frac{P \frac{F_с}{F_б} \cdot \frac{E_с}{E_б}}{1 + \frac{F_с}{F_б} \cdot \frac{E_с}{E_б}} = \frac{P}{1 + \frac{F_б}{F_с} \frac{E_б}{E_с}}; \tag{4.19}$$

$$\sigma_б = \frac{P}{F_б + F_с \frac{E_с}{E_б}}; \quad \sigma_с = \frac{P}{F_с + F_б \frac{E_б}{E_с}}. \tag{4.20}$$

Распределение усилий между элементами в статически неопределимых системах зависит от отношения площадей этих элементов и их модулей упругости. Из уравнения же (4.18), учитывая, что

$$\frac{P_б}{F_б} = \sigma_б \quad и \quad \frac{P_с}{F_с} = \sigma_с,$$

получаем, что отношение напряжений в бетоне и стали зависит лишь от отношения модулей

$$\frac{\sigma_с}{\sigma_б} = \frac{E_с}{E_б};$$

напряжения распределяются прямо пропорционально модулям упругости. Допустив, что при сжатии $E_с = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2} и $E_б = 2 \times 10^5$ *кг/см*^{2}, получим $\frac{E_с}{E_б} = 10$, и напряжения в стали всегда окажутся лишь в 10 раз бо́льшими, чем напряжения в бетоне. Допускаемые же напряжения для стали примерно в 20 раз больше, чем допускаемые напряжения для бетона на сжатие. Поэтому напряжения в арматуре всегда будут ниже допускаемых.

Размеры колонны определяются из условия прочности бетона на сжатие:

$$\sigma_б = \frac{P}{F_б + F_с \frac{E_с}{E_б}} = \frac{P}{F_б\left(1 + \frac{F_с}{F_б} \cdot \frac{E_с}{E_б}\right)} \leqslant [\sigma_б]. \tag{4.21}$$

Необходимо теперь лишь задаться отношением $\frac{F_с}{F_б}$. Обычно площадь арматуры выражают в процентах от полной площади колонны $F_с + F_б$ и задаются процентом армирования, не меньшим, чем $0{,}4\% \div 0{,}2\%$.

Обозначим $\frac{F_с}{F_б + F_с} = \frac{1}{m}$; так как площадь арматуры мала по сравнению с площадью бетона, то

$$\frac{F_с}{F_б + F_с} = \frac{1}{m} \approx \frac{F_с}{F_б}.$$

Подставляя эту величину в условие (4.21), получаем

$$\frac{P}{F_б\left(1 + \frac{E_с}{mE_б}\right)} = [\sigma_б] \quad \text{и} \quad F_б = \frac{P}{[\sigma_б]\left(1 + \frac{E_с}{mE_б}\right)}.$$

Площадь арматуры будет равна

$$F_с = \frac{F_б}{m}.$$

Пусть $P = 30$ *т*; $m = 100$ (арматуры 1%); $\frac{E_с}{E_б} = 10$; $[\sigma_б] = 45$ *кг/см²* и $[\sigma_с] = 1250$ *кг/см²*. Тогда

$$F_б = \frac{30\,000}{45\left(1 + \frac{10}{100}\right)} = 605 \text{ см}^2; \quad F_с = \frac{605}{100} = 6{,}05 \text{ см}^2; \quad F_б + F_с = 611 \text{ см}^2.$$

Берём колонну квадратного сечения 25×25 *см* и ставим 4 стержня диаметром $d = 14$ *мм* с общей площадью 6,28 *см²*.

Вычисление деформаций для таких конструкций ведётся по общим правилам. Так как укорочение бетонной и стальной частей колонны одинаково, то безразлично, какой формулой в равенстве (4.18) воспользоваться для вычисления Δl.

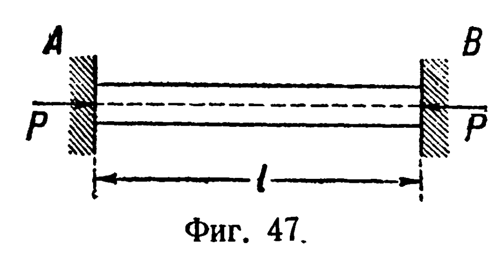
§ 22. Напряжения, возникающие при изменении температуры.

В статически неопределимых системах возникают напряжения при отсутствии внешних нагрузок не только от неточностей изготовления и сборки, но и от изменения температуры.

Довольно значительные напряжения этого типа получаются в рельсах, сваренных в одну непрерывную линию. При изменении температуры рельсов по отношению к той, при которой была произведена сварка, в них возникают либо растягивающие, либо сжимающие напряжения. Эту задачу можно схематизировать в таком виде: дан стержень, защемлённый неподвижно концами при температуре t_1;

найти, какие возникнут в нём напряжения при изменении температуры до t_2 (фиг. 47). Длина стержня l, площадь поперечного сечения F, модуль упругости E.

Выясним, какие силы будут действовать на стержень, если температура повысится от t_1 до t_2. Стержень в таком случае стремится удлиниться и будет распирать опоры A и B. Со стороны этих опор на стержень будут действовать реакции, направленные, как показано на чертеже. Эти силы и будут вызывать *сжатие* стержня.



Фиг. 47.

Их величины нельзя найти из условий статики, так как единственное условие равновесия даёт нам, что реакции опор в точках A и B равны и прямо противоположны. Величина же реакций P остаётся неизвестной, и конструкция оказывается статически неопределимой.

Для составления дополнительного уравнения учтём, что длина l стержня, закреплённого концами, остаётся и при нагревании неизменной; значит, укорочение Δl_P, вызываемое силами P, равно по абсолютной величине тому температурному удлинению Δl_t, которое стержень получил бы, если бы опора A осталась на месте, а конец B стержня был бы освобождён и мог бы перемещаться при нагревании. Значит,

$$\Delta l_t - \Delta l_P = 0. \qquad (4.22)$$

Это и будет *условие совместности деформаций*; оно указывает на то, что и после повышения или понижения температуры длина стержня не изменилась, — он не оторвался от неподвижных опор.

Так как

$$\Delta l_P = \frac{Pl}{EF} \quad \text{и} \quad \Delta l_t = \alpha l\,(t_2 - t_1),$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения материала стержня, то

$$\frac{Pl}{EF} = \alpha l\,(t_2 - t_1)$$

и

$$\frac{P}{F} = \sigma = \alpha E\,(t_2 - t_1), \qquad (4.23)$$

т. е. напряжение, вызванное изменением температуры в стержне *постоянного* сечения с жёстко защемлёнными концами, зависит лишь от модуля упругости материала, его коэффициента линейного расширения, разности температур и не зависит ни от его длины, ни от площади поперечного сечения.

Сила P равна

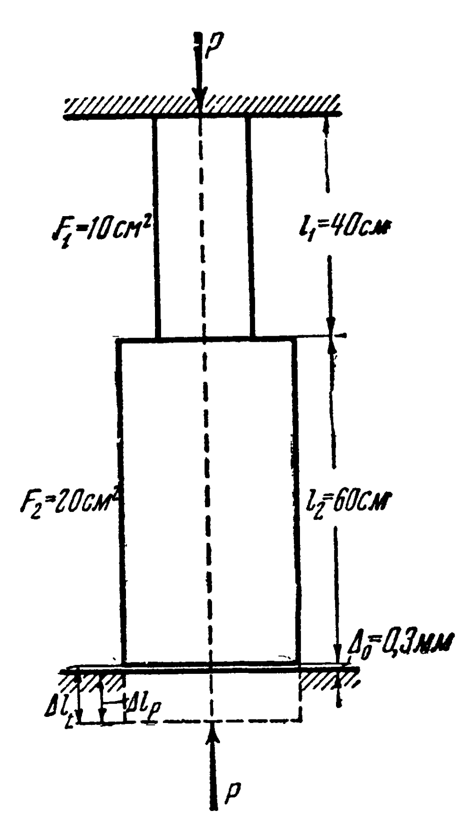
$$P = \alpha EF\,(t_2 - t_1).$$

В рассматриваемом примере при $t_2 > t_1$ напряжение σ будет сжимающим, так как направление реакций P внутрь стержня здесь принято положительным. Если придерживаться обычно применяемого обозначения сжимающих напряжений знаком минус, а растягивающих знаком плюс, то для автоматического получения знака напряжений формула (4.23) должна быть написана так:

$$\sigma = \alpha E(t_1 - t_2).$$

Когда поперечное сечение стержня *не постоянно* по его длине или он сделан из разных материалов, когда конструкция опор даёт ему возможность *несколько* изменить свою длину, или если эти условия имеют место одновременно, метод определения температурных напряжений, в основе своей оставаясь прежним, имеет всё же ряд особенностей.

Переменность сечения и различие в материалах необходимо учесть при подсчёте Δl, определяя его суммированием подсчётов, сделанных по каждому отдельному участку. Возможность для стержня несколько изменить свою длину отразится в уравнении совместности деформаций (4.22); разность деформаций, температурной и вызванной силами, в этом случае не будет равна нулю, а будет равна той величине, на которую наш стержень имеет возможность удлиниться.



Фиг. 48.

Пример 9. Стальной стержень состоящий из двух частей длиной $l_1 = 40$ *см* и $l_2 = 60$ *см* и площадью соответственно $F_1 = 10$ *см*^{2} и $F_2 = 20$ *см*^{2}, защемлён одним концом; другой конец не доходит до опоры на величину $\Delta_0 = 0{,}3$ *мм* (фиг. 48). Найти напряжения в обеих частях при повышении температуры на $t = 50°$ С, если $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$.

Повышение температуры вызывает удлинение стержня Δl_t, а сжатие его реакциями опор P — укорочение Δl_P. Разность этих двух деформаций (по абсолютной величине) равна Δ_0 (см. фиг. 48):

$$\Delta l_t - \Delta l_P = \Delta_0;$$

это и будет условие совместности деформаций. Величины Δl_t и Δl_P соответственно равны

$$\Delta l_t = \alpha t(l_1 + l_2); \quad \Delta l_P = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{Pl_2}{EF_2} = \frac{Pl_1}{EF_1}\left[1 + \frac{l_2F_1}{l_1F_2}\right];$$

поэтому

$$\alpha t(l_1 + l_2) - \frac{Pl_1}{EF_1}\left[1 + \frac{l_2F_1}{l_1F_2}\right] = \Delta_0.$$

Отсюда

$$P=\frac{[\alpha t(l_1+l_2)-\Delta_0]EF_1}{l_1\left[1+\frac{l_2F_1}{l_1F_2}\right]}=$$

$$=\frac{[125\cdot 10^{-7}\cdot 100\cdot 50-0{,}03]\,2\cdot 10^6\cdot 10}{40\left[1+\frac{60\cdot 10}{40\cdot 20}\right]}=9300\ \text{кг}.$$

Напряжение в верхней части равно

$$\sigma'=\frac{P}{F_1}=\frac{9300}{10}=930\ \text{кг/см}^2;$$

в нижней части $\sigma''=\frac{P}{F_2}=\frac{9300}{20}=465$ *кг/см*^{2} (оба напряжения — сжимающие).

Если бы зазора Δ_0 не было, то усилие и напряжения возросли бы в 1,92 раза.

§ 23. Одновременный учёт различных факторов.

Иногда в статически неопределимых конструкциях приходится одновременно учитывать влияние внешней нагрузки, изменения температуры и неточности изготовления. Решение таких задач возможно двумя путями: первый путь — это *одновременный* учёт всех факторов. В этом случае в уравнение совместности деформаций должны быть включены члены, отражающие влияние всех этих обстоятельств (нагрузки, температуры, неточности изготовления). Полученные в результате расчёта усилия и напряжения являются окончательными.

Второй путь расчёта подобных конструкций заключается в *раздельном* учёте усилий и напряжений, вызванных нагрузкой, температурой, неточностью изготовления. Решается как бы несколько отдельных задач, в каждой из которых учитывается *только один* из этих факторов. Окончательные усилия и напряжения определяются путём алгебраического *суммирования* этих величин, полученных при решении каждой из задач. Последний путь часто является более ясным и удобным, вызывая лишь небольшое увеличение количества выкладок. Он носит название *способа сложения действия сил.*

Рассмотренные до сих пор частные примеры расчёта статически неопределимых конструкций учитывали влияние лишь одного какого-нибудь фактора — внешней нагрузки, изменения температуры или неточности сборки. Для ознакомления с приёмом *одновременного учёта* всех этих обстоятельств решим следующий числовой пример.

Пример 10. Три параллельных вертикальных стержня одинаковой длины $l=2$ *м* поддерживают жёсткий брус AB, к которому приложена сила $P=4$ *т* (фиг. 49). Расстояния между стержнями и от среднего стержня до силы P соответственно равны: $a=1{,}5$ *м*, $b=1$ *м* и $c=0{,}25$ *м*. Средний стержень выполнен короче проектного размера на $\delta=0{,}2$ *мм*. Данные о стержнях помещены в таблице 9.

Таблица 9. **Данные к примеру 10.**

№№ стержней	Материал	F *см*²	E *кг/см*²	α
1	медь	2	$1\cdot 10^6$	$17\cdot 10^{-6}$
2	сталь	1	$2\cdot 10^6$	$13\cdot 10^{-6}$
3	сталь	3	$2\cdot 10^6$	$13\cdot 10^{-6}$

Температура конструкции во время её эксплуатации может повыситься на 20° С.

Определить напряжения в каждом из трёх стержней.

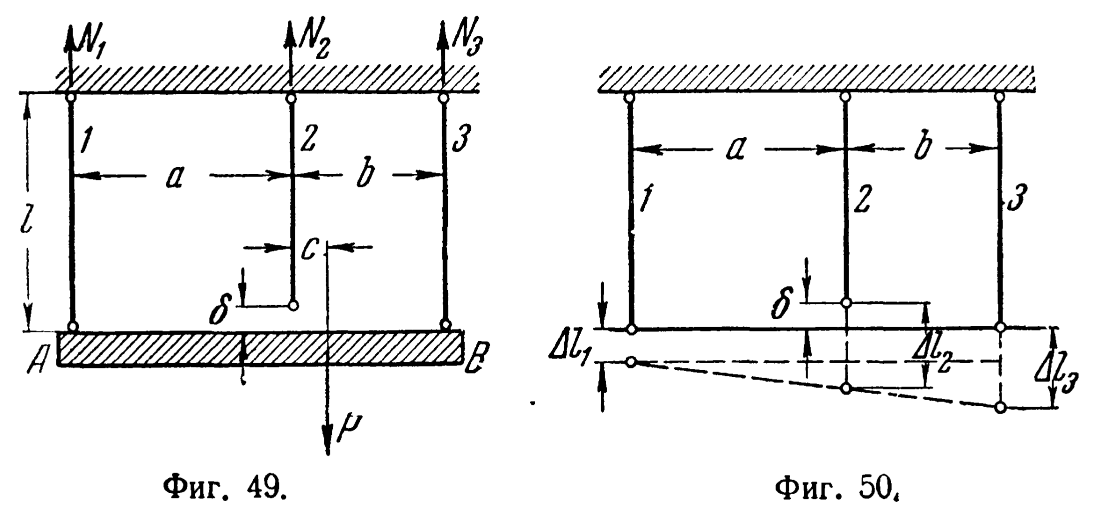
Предположим, что усилия во всех стержнях N_1, N_2 и N_3 будут растягивающими. Равные им реакции точек подвеса стержней показаны на фиг. 49. Уравнений равновесия ввиду параллельности всех сил мы можем составить два. Первое — сумма проекций на вертикаль — имеет следующий вид:

$$N_1 + N_2 + N_3 - P = 0. \qquad (4.24)$$

Для составления второго уравнения возьмём сумму моментов всех сил относительно точки подвеса второго стержня:

$$N_1 a - N_3 b + Pc = 0. \qquad (4.25)$$

Для определения трёх неизвестных усилий этих двух уравнений равновесия недостаточно. Необходимо обратиться к рассмотрению деформаций. На фиг. 50 показана схема деформаций нашей конструкции, составленная



Фиг. 49. Фиг. 50.

в предположении растягивающих усилий во всех стержнях. Из рассмотрения этой схемы можно составить следующее условие совместности деформаций:

$$\frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1 - \delta} = \frac{a+b}{a}. \qquad (4.26)$$

Значения входящих в это уравнение деформаций (с учётом влияния температуры) будут следующими:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E_1 F_1} + \alpha_1 l\,\Delta t; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E_2 F_2} + \alpha_2 l\,\Delta t; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{E_3 F_3} + \alpha_3 l\,\Delta t.$$

Подставим эти значения деформаций в уравнение (4.26):

$$\frac{\dfrac{N_3 l}{E_3 F_3} + \alpha_3 l\,\Delta t - \dfrac{N_1 l}{E_1 F_1} - \alpha_1 l\,\Delta t}{\dfrac{N_2 l}{E_2 F_2} + \alpha_2 l\,\Delta t - \dfrac{N_1 l}{E_1 F_1} - \alpha_1 l\,\Delta t - \delta} = \frac{a+b}{a}. \qquad (4.27)$$

Совместно решая уравнения (4.24), (4.25) и (4.27), определяем N_1, N_2 и N_3. Они будут равны:

$$N_1 = 792 \text{ кг}, \quad N_2 = 1020 \text{ кг} \quad \text{и} \quad N_3 = 2188 \text{ кг}.$$

Если бы наше предположение о направлении усилий для какого-нибудь стержня оказалось ошибочным, то мы получили бы отрицательное значение этого усилия.

Теперь находим соответствующие напряжения:

в первом стержне $\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{792}{2} = 396 \text{ кг/см}^2$,

во втором стержне $\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{1020}{1} = 1020 \text{ кг/см}^2$,

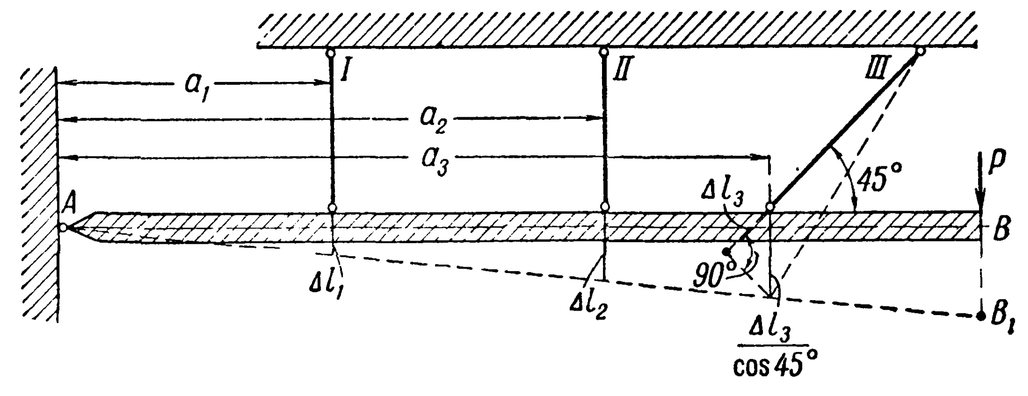
и в третьем стержне $\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{2188}{3} = 729 \text{ кг/см}^2$.

Эта же задача могла бы быть решена при раздельном учёте влияний нагрузки, температуры и неточности изготовления с последующим алгебраическим суммированием напряжений. Результат был бы, конечно, такой же.

§ 24. Более сложные случаи статически неопределимых конструкций.

Во всех рассмотренных статически неопределимых задачах число неизвестных усилий на единицу превышало число уравнений статики; это — задачи однажды статически неопределимые; одно из неизвестных усилий может быть принято, как говорят, за лишнюю, не определяемую из уравнений статики, неизвестную.

Могут быть случаи, когда таких лишних неизвестных будет несколько; тогда придётся составить столько же дополнительных уравнений, рассматри-



Фиг. 51.

вая совместность деформаций системы. Это всегда возможно. Как пример можно указать конструкцию, изображённую на фиг. 51; очень жёсткий стержень шарнирно прикреплён к неподвижной опоре, подвешен на трёх стержнях и нагружён силой P.

Для стержня AB можно написать три уравнения равновесия; число же неизвестных будет пять: усилия в трёх подвесках и вертикальная и горизонтальная составляющие реакции в шарнире A.

Дополнительные уравнения можно написать, рассматривая деформацию системы. Так как стержень AB мы считаем очень жёстким, то его собствен-

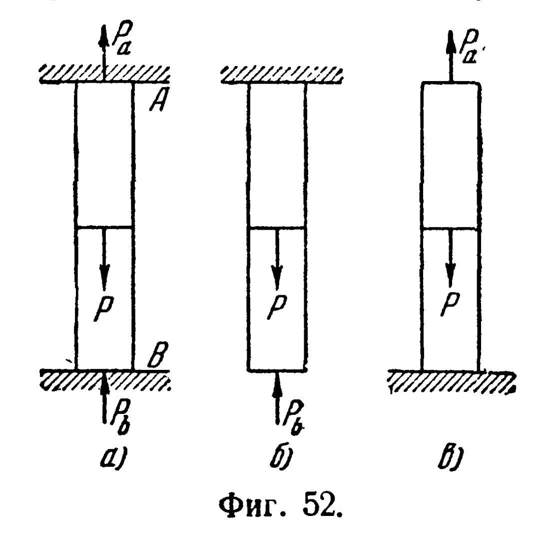
ными деформациями можно пренебречь. Тогда он, оставаясь прямым, займёт положение AB_1. Из подобия треугольников можно найти соотношения между Δl_1, Δl_2 и Δl_3, что и даёт два дополнительных уравнения, а именно:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}=\frac{a_1}{a_2} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta l_1}{\dfrac{\Delta l_3}{\cos 45^\circ}}=\frac{a_1}{a_3}.$$

Дальнейший ход решения задачи подобен рассмотренному выше (§ 19).

§ 25. Примеры.

Пример 11. Стержень, защемлённый концами A и B, состоит из двух равных половин длиной $\frac{l}{2}$ (фиг. 52, *а*); верхняя половина изготовлена из стали, нижняя — из меди. Площади обеих частей стержня одинаковы и равны $F=20$ *см*². К среднему сечению приложена сила $P=6$ *т*, направленная по оси стержня сверху вниз от конца A к концу B. Найти напряжения в медной и стальной частях при повышении температуры на $t^\circ=30^\circ$ С. Модули упругости равны $E_с=2\cdot10^6$ *кг/см*², $E_м=10^6$ *кг/см*². Коэффициенты линейного температурного расширения $\alpha_с=125\cdot10^{-7}$, $\alpha_м=165\cdot10^{-7}$.



Фиг. 52.

Реакции опор стержня принимаем направленными вверх и обозначаем P_a и P_b (фиг. 52, *а*). Условие статики приводит к тому, что

$$P_a+P_b=P.$$

Для того чтобы лучше разобраться в имеющих место деформациях, предположим, что нижний конец стержня свободен, опора отсутствует (фиг. 52, *б*). Это предположение не изменит работы конструкции при условии, что перемещение этого конца равно нулю и что действие опоры учтено наличием приложенной к нижнему концу реакции данной опоры — силы P_b. Полученный путём отбрасывания «лишнего» (против количества уравнений равновесия) закрепления статически определимый стержень называется *основной системой* нашей статически неопределимой конструкции. Заметим попутно, что мы могли бы выбрать и другую основную систему, хотя бы путём отбрасывания верхней опоры (фиг. 52, *в*). Основную систему при этом пришлось бы загрузить, конечно, помимо силы P ещё и реакцией этой верхней отброшенной опоры.

Основная система, загруженная всеми нагрузками и реакциями всех опор, сохранённых и отброшенных, совершенно эквивалентна той статически неопределимой конструкции, из которой она получена при условии, что удовлетворены уравнения совместности деформаций. Эти уравнения составляются, исходя из тех ограничений, которые опоры статически неопределимой системы накладывают на деформации. Совместное их решение с уравнениями равновесия и определяет величины всех неизвестных.

В нашем случае условие совместности выражает ту мысль, что удлинение стержня от повышения температуры (при свободном нижнем конце) плюс удлинение верхней его части от силы P должно быть численно равно

укорочению стержня от силы P_b:

$$\frac{l}{2}t\alpha_с+\frac{l}{2}t\alpha_м+\frac{Pl}{2E_сF}=\frac{P_bl}{2E_сF}+\frac{P_bl}{2E_мF}$$

или

$$\frac{t\alpha_с}{2}\left[1+\frac{\alpha_м}{\alpha_с}\right]+\frac{P}{2E_сF}=\frac{P_b}{2E_сF}\left[1+\frac{E_с}{E_м}\right].$$

Отсюда находим реакцию P_b, а из условия статики и P_a:

$$P_b=\frac{P}{1+\frac{E_с}{E_м}}+\frac{t\alpha_с\left[1+\frac{\alpha_м}{\alpha_с}\right]E_сF}{1+\frac{E_с}{E_м}},$$

$$P_a=P-P_b=\frac{P}{1+\frac{E_м}{E_с}}-\frac{t\alpha_с\left[1+\frac{\alpha_м}{\alpha_с}\right]E_сF}{1+\frac{E_с}{E_м}}.$$

Обе реакции состоят из двух слагаемых — первого, вызванного силой P, и второго, вызванного действием температуры; мы могли бы изменить порядок решения задачи и находить отдельно реакции и напряжения от силы P_b и от повышения температуры, а потом их суммировать (способ сложения действия сил).

Реакции от силы P обе направлены вверх, а от действия температуры — реакция опоры B вверх, а опоры A — вниз (минус в формуле для P_a). Таким образом, весь стержень будет сжат температурными реакциями, и кроме того, верхняя часть будет растянута, а нижняя сжата силами:

$$\frac{P}{1+\frac{E_м}{E_с}} \quad \text{и} \quad \frac{P}{1+\frac{E_с}{E_м}}.$$

Поэтому, обозначая растягивающие напряжения знаком +, а сжимающие —, получаем:

$$\sigma_с=+\frac{P}{\left(1+\frac{E_м}{E_с}\right)F}-\frac{t\alpha_с\left[1+\frac{\alpha_м}{\alpha_с}\right]F_с}{1+\frac{E_с}{E_м}}=$$

$$=\frac{6000}{\left[1+\frac{10^6}{2\cdot 10^6}\right]20}-\frac{30\cdot 125\cdot 10^{-7}\left[1+\frac{165}{125}\right]2\cdot 10^6}{1+\frac{2\cdot 10^6}{10^6}}=$$

$$=200-580=-380\ кг/см^2$$

для сечений верхней части и

$$\sigma_м = -\frac{P}{\left[1+\frac{E_c}{E_м}\right]F} - \frac{t\alpha_c\left[1+\frac{\alpha_м}{\alpha_c}\right]E_c}{1+\frac{E_c}{E_м}} =$$

$$= -\frac{6000}{\left[1+\frac{2\cdot 10^6}{10^6}\right]20} - 580 = -680 \ кг/см^2$$

для сечений нижней части. Необходимо обратить внимание на то, что при решении задачи удобно преобразовывать формулы так, чтобы в них входили отношения больших величин (E) или малых (α); это упрощает числовые расчёты.

Пример 12. Стержень защемлён верхним концом A и не доходит до нижней опоры B на величину $\Delta l_0 = 1{,}25$ *мм*; верхняя часть стержня медная, длиной $l_м = 1{,}6$ *м*, площадью $F_м = 10$ *см*^{2}; нижняя часть — стальная, площадью $F_c = 20$ *см*^{2} и длиной $l_c = 0{,}8$ *м*. Сила $P = 10$ *т* приложена по оси стержня вниз в месте раздела обеих частей. Найти напряжения в сечениях стальной и медной части.

Для нахождения напряжений определим реакции P_A и P_B; предполагаем их направленными вверх. Условие равновесия даёт:

$$P_A + P_B = P.$$

Условие совместности деформаций выражает ту мысль, что разность величин удлинения верхней части и укорочения нижней равна зазору Δl_0:

$$\Delta l_м - \Delta l_c = \Delta l_0$$

или

$$\frac{P_A l_м}{E_м F_м} - \frac{P_B l_c}{E_c F_c} = \Delta l_0.$$

Заменяя P_B через $P - P_A$, получаем:

$$\frac{P_A l_м}{E_м F_м} + \frac{P_A l_c}{E_c F_c} = \frac{P l_c}{E_c F_c} + \Delta l_0.$$

Отсюда

$$\frac{P_A l_c}{E_c F_c}\left[1 + \frac{l_м E_c F_c}{l_c E_м F_м}\right] = \frac{P l_c}{E_c F_c} + \Delta l_0$$

и

$$P_A = \frac{P + \frac{\Delta l_0}{l} E_c F_c}{1 + \frac{l_м E_c F_c}{l_c E_м F_м}}, \quad P_B = \frac{P - \frac{\Delta l_0}{l_м} E_м F_м^2}{1 + \frac{l_c E_м F_м}{l_м E_c F_c}}.$$

Подставляя числовые значения, имеем:

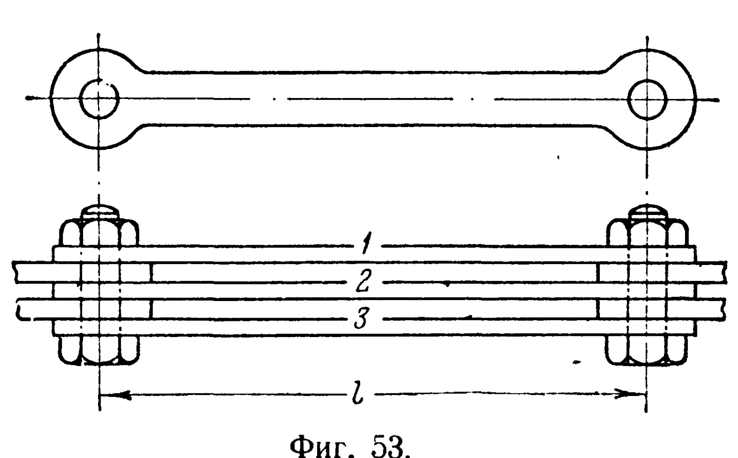
$$P_A = \frac{10\,000 + \frac{1{,}25}{80 \cdot 10} \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^6}{1 + \frac{160 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^6}{80 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 8050 \textit{ кг};$$

$$\sigma_м = \frac{P_A}{F_м} = \frac{8050}{10} = 805 \textit{ кг/см}^2 \text{ (растяжение)};$$

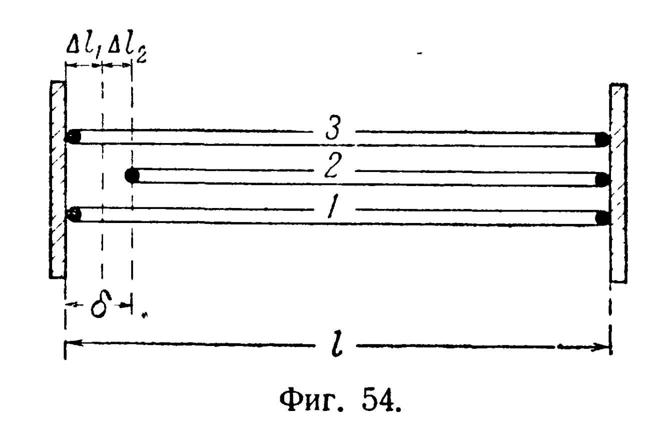
$$P_B = \frac{10\,000 - \frac{1{,}25}{160 \cdot 10} 10 \cdot 10^6}{1 + \frac{80 \cdot 10 \cdot 10^6}{160 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^6}} = 1950 \textit{ кг};$$

$$\sigma_с = \frac{P_B}{F_с} = \frac{1950}{20} = 97{,}5 \textit{кг/см}^2 \text{ (сжатие)}.$$

Пример 13. Определить начальные напряжения в трёх полосах звена цепи висячего моста (фиг. 53), если средняя полоса будет короче крайних на $\delta = \frac{l}{2000}$, где l — длина полос. Материал полос — сталь. Полосы соединены болтами, проходящими через проушины. Деформацией болтов можно пренебречь. Схема конструкции и картина деформации даны на фиг. 54.



Фиг. 53.



Фиг. 54.

Сжимающие усилия в крайних полосах обозначаем N_1 и N_3, растягивающее усилие в средней N_2; условия статики приводят к уравнениям

$$N_1 + N_3 = N_2$$

и

$$N_1 = N_3,$$

или

$$2N_1 = N_2.$$

Условие совместности деформаций выражает, что сумма числовых значений удлинения средней полосы и укорочения крайней равна δ (фиг. 54):

$$\delta = \Delta l_1 + \Delta l_2.$$

Обозначая длину полос l, а их площадь F, получаем:

$$\delta = \frac{N_1 l}{EF} + \frac{N_2 l}{EF}.$$

Так как $N_1 = \frac{N_2}{2}$, то

$$\delta = \frac{N_2 l}{2EF} + \frac{N_2 l}{EF} = \frac{3N_2 l}{2EF};$$

отсюда напряжение в средней полосе равно

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{2\delta E}{3l} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^6}{3 \cdot 2000} = 667 \text{ кг/см}^2 \text{ (растяжение).}$$

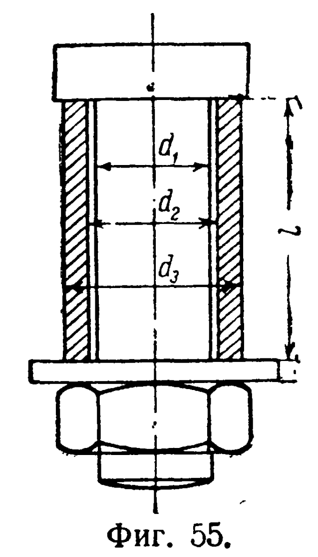
Напряжения в крайних полосах будут вдвое меньшими и сжимающими.

Пример 14. Стальной болт диаметром $d_1 = 30$ *мм* проходит внутри чугунной трубки (фиг. 55), внутренний диаметр которой равен

$$d_2 = 32 \text{ мм},$$

а наружный

$$d_3 = 62 \text{ мм}.$$



Фиг. 55.

Гайка болта завинчена настолько, что головка и шайба соприкасаются с концами трубки, но болт ещё не натянут. Длина трубки $l = 500$ *мм*, $E_c = 2 \cdot 10^6$ *кг/см²*, $E_ч = 1{,}2 \cdot 10^6$ *кг/см²*. На какую длину надо навернуть гайку на болт, чтобы вызвать в нём натяжение $P = 12$ *т*? Какие напряжения будут в чугунной трубке?

Навинчивание гайки вызовет реакции между шайбой и торцом трубки. Эти реакции будут сжимать трубку и растягивать болт; надо добиться, чтобы они были равны 12 *т*. Укорочение трубки плюс удлинение болта и составят то перемещение Δ, на которое надо навернуть гайку, чтобы вызвать заданное натяжение болта.

Площадь сечения трубки равна

$$F_т = \frac{\pi}{4}(d_3^2 - d_2^2) = \frac{\pi}{4}(6{,}2^2 - 3{,}2^2) = 22{,}1 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения болта равна

$$F_б = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi 3^2}{4} = 7{,}07 \text{ см}^2.$$

Необходимое перемещение гайки равно

$$\Delta = \frac{Pl}{E_c F_б} + \frac{Pl}{E_ч F_т} = \frac{Pl}{E_c F_б}\left[1 + \frac{E_c F_б}{E_ч F_т}\right] =$$

$$= \frac{12\,000 \cdot 500}{2 \cdot 10^6 \cdot 7{,}07}\left[1 + \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 7{,}07}{1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 22{,}1}\right] \approx 0{,}65 \text{ мм}.$$

ГЛАВА V.

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАГРУЗКАМ.

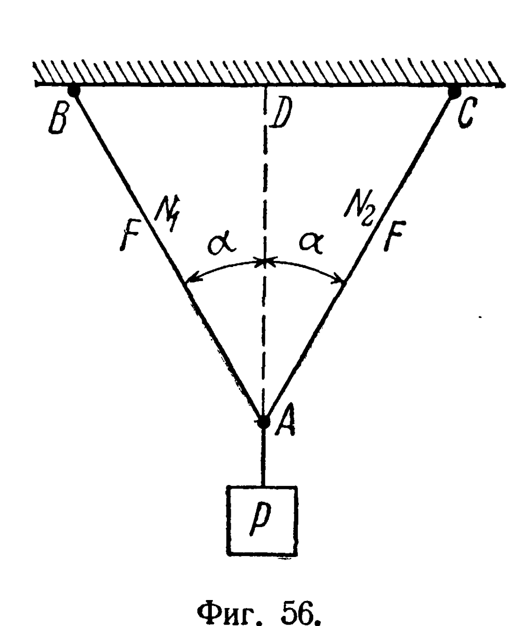
§ 26. Понятие о расчёте по допускаемым нагрузкам. Применение к статически определимым системам.

В предыдущем изложении методов расчёта на растяжение и сжатие как статически определимых, так и неопределимых конструкций мы исходили (§§ 4 и 19) из основного условия прочности $\sigma_{max} \leqslant [\sigma]$. Это неравенство требует выбора размеров конструкции с таким расчётом, чтобы наибольшее напряжение в самом опасном месте не превосходило допускаемого.

Но можно стать на другую точку зрения (§ 4). Можно задать условие, чтобы действительная нагрузка на всю конструкцию не превосходила некоторой допускаемой величины. Условие это можно выразить таким неравенством:

$$P_{max} \leqslant P_{доп}.$$

За допускаемую нагрузку надо выбрать некоторую $\frac{1}{k}$ часть той нагрузки, при которой конструкция перестанет функционировать правильно, перестанет выполнять своё назначение. Такая нагрузка обычно называется *предельной*, иногда — *разрушающей* в широком смысле слова (под разрушением конструкции подразумевают прекращение её нормальной работы).



Фиг. 56.

В качестве примера возьмём систему из двух стальных стержней AB и AC (фиг. 56), нагружённых силой P. Рассчитывая эту систему обычным путём, найдём усилия $N_1 = N_2$ по формуле

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2\cos\alpha} = N$$

(из равновесия узла A). Отсюда площадь каждого из стержней равна

$$F \geqslant \frac{N}{[\sigma]} = \frac{P}{2[\sigma]\cos\alpha}.$$

По способу допускаемых нагрузок имеем

$$P \leqslant P_{доп}.$$

Введя в качестве коэффициента запаса для конструкции в целом ту же величину k, которая была принята в качестве коэффициента запаса для напряжений, мы получим, что величина $P_{доп} = \frac{P_{пр}}{k}$. Предельной, опасной величиной $P_{пр}$ будет та, при которой напряжения в стержнях дойдут до предела текучести:

$$P_{пр} = 2F\sigma_т \cos\alpha. \qquad (a)$$

Таким образом, допускаемая величина P равна

$$P_{доп} = \frac{2F\sigma_т \cos\alpha}{k}.$$

Условие прочности (а) принимает вид

$$P \leqslant \frac{2F\sigma_т \cos\alpha}{k},$$

а учитывая, что $\frac{\sigma_т}{k} = [\sigma]$, получаем

$$P \leqslant 2F[\sigma]\cos\alpha.$$

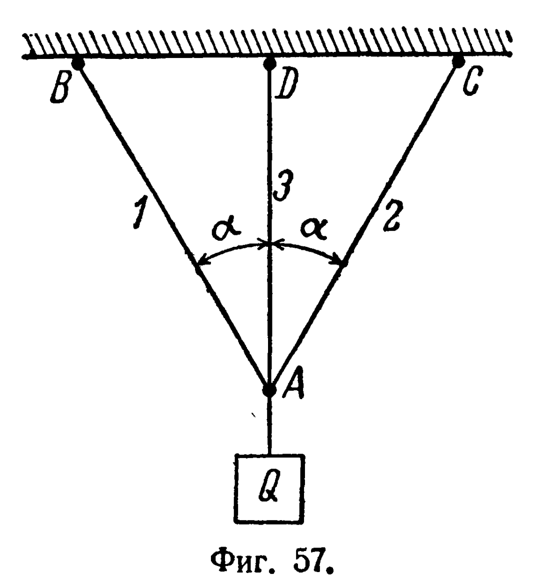
Отсюда

$$F \geqslant \frac{P}{2[\sigma]\cos\alpha}.$$

Таким образом, расчёт по допускаемым нагрузкам привёл в данном случае к тем же результатам, что и расчёт по допускаемым напряжениям. Это всегда имеет место для статически определимых конструкций при равномерном распределении напряжений, когда материал по всему сечению используется полностью.

§ 27. Расчёт статически неопределимых систем по способу допускаемых нагрузок.

Совсем другие результаты мы получим, если будем применять способ допускаемых нагрузок к статически неопределимым системам, стержни которых изготовлены из материала, обладающего способностью к большим пластическим деформациям, например из малоуглеродистой стали.



Фиг. 57.

В качестве примера рассмотрим систему из трёх стержней, нагружённых силой Q (фиг. 57). Пусть все стержни сделаны из малоуглеродистой стали с пределом текучести $\sigma_т$. Длины крайних стержней, как и выше, обозначим l_1, длину среднего l_3. Допускаемое напряжение $[\sigma] = \frac{\sigma_т}{k}$. Как и раньше, при расчёте этой статически неопределимой системы зададимся отношением площадей стержней; примем, что все три стержня будут иметь одинаковую площадь F. Тогда, решая задачу так, как это указано в § 19, получим:

$$N_3 = \frac{Q}{1+2\cos^3\alpha}; \quad N_1 = \frac{Q\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha} = N_2.$$

Так как $N_3 > N_1$, средний стержень напряжён больше, чем крайние; поэтому подбор площади сечения F надо произвести по формуле

$$F \geqslant \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{Q}{(1+2\cos^3\alpha)[\sigma]}.$$

Ту же величину площади надо дать и боковым стержням; в них получается некоторый дополнительный запас.

Применим способ допускаемых нагрузок; условием прочности будет:

$$Q \leqslant Q_{\text{доп}} = \frac{Q_{\text{пр}}}{k}.$$

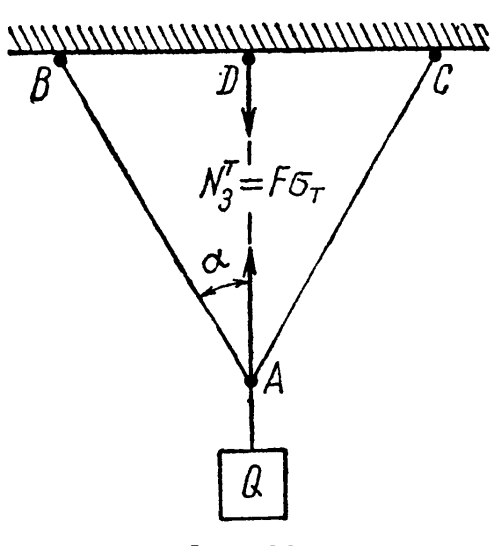
Что в данном случае следует понимать под предельной нагрузкой конструкции? Так как конструкция выполнена из материала, имеющего площадку текучести, то, по аналогии с простым растяжением стержня из такого материала, за предельную нагрузку следует взять груз, соответствующий достижению состояния текучести *для всей конструкции в целом*. Назовём эту нагрузку $Q_{\text{т}}^{\text{к}}$. Пока сила Q не достигла этого значения, для дальнейшей деформации (опускания точки A) требуется возрастание нагрузки. Когда же Q сделается равным $Q_{\text{т}}^{\text{к}}$, дальнейший рост деформаций будет происходить уже без увеличения нагрузки, — конструкция выйдет из строя.

Для определения величины $Q_{\text{т}}^{\text{к}}$ рассмотрим постепенный ход деформации нашей стержневой системы. Так как средний стержень напряжён сильнее крайних, то в нём раньше, чем в других, напряжение дойдёт до предела текучести. Нагрузку, соответствующую этому моменту, обозначим $Q_{\text{т}}$; она будет равна

$$Q_{\text{т}} = (1 + 2\cos^3\alpha)\, N_3^{\text{т}},$$

где $N_3^{\text{т}} = F\sigma_{\text{т}}$ — усилие в среднем стержне, соответствующее его пределу текучести.

Напряжения в крайних стержнях, имеющих ту же площадь, в этот момент ещё не дойдут до предела текучести, и эти стержни будут упруго сопротивляться дальнейшей деформации. Для того чтобы эта деформация происходила, необходимо дальнейшее увеличение нагрузки до тех пор, пока в *крайних* стержнях напряжения тоже не дойдут до предела текучести. Лишь тогда будет достигнута предельная грузоподъёмность конструкции $Q_{\text{т}}^{\text{к}}$.



Фиг. 58.

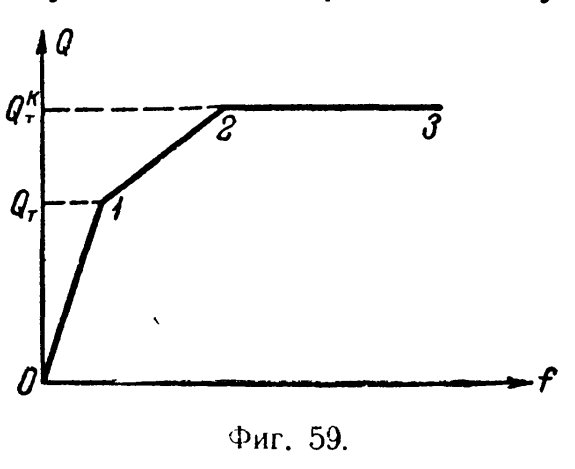
Так как при нагрузке $Q_{\text{т}}$ напряжения в среднем стержне дойдут уже до предела текучести $\sigma_{\text{т}}$, то при дальнейшем возрастании груза они, а стало быть и усилие N_3, *останутся без увеличения*. Наша статически неопределимая система превратится в статически определимую, состоящую из двух стержней AB и AC и нагружённую в точке A силой Q, направленной вниз, и *известным* усилием $N_3^{\text{т}}$, равным $F\sigma_{\text{т}}$ (фиг. 58).

Такая схема работы нашей конструкции будет иметь место, пока

$$Q_т \leqslant Q \leqslant Q_т^к.$$

Для иллюстрации хода деформации рассматриваемой конструкции изобразим графически зависимость между силой Q и перемещением f точки A (фиг. 59). Пока $Q \leqslant Q_т$, опускание точки A равно удлинению среднего стержня и определяется формулой

$$f_{01} = \Delta l_3 = \frac{Ql_3}{(1+2\cos^3\alpha)EF}.$$



Фиг. 59.

Как только Q будет заключаться в промежутке $Q_т \leqslant Q \leqslant Q_т^к$, перемещение точки A должно быть вычислено, как опускание этого узла в системе двух стержней AC и AB, нагружённых в точке A силой $(Q - F\sigma_т)$. Из фиг. 41 мы видим, что это опускание равно

$$f = \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha};$$

в свою очередь

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF}; \quad N_1 = \frac{Q - F\sigma_т}{2\cos\alpha}.$$

Отсюда

$$\Delta l_1 = \frac{(Q - F\sigma_т)\,l_1}{2EF\cos\alpha},$$

$$f_{12} = \frac{(Q - F\sigma_т)\,l_1}{2EF\cos^2\alpha} = \frac{(Q - F\sigma_т)\,l_3}{2EF\cos^3\alpha}.$$

Для f_{12} (на втором участке) получаем уравнение прямой, но уже не проходящей через начало координат. После достижения нагрузкой Q значения $Q_т^к$ напряжения в крайних стержнях достигнут предела текучести, и система будет деформироваться без увеличения нагрузки. График перемещения идёт теперь параллельно оси абсцисс.

Для определения предельной грузоподъёмности всей системы $Q_т^к$ мы должны для системы двух стержней, нагружённых силой $(Q - F\sigma_т)$, найти то значение Q, при котором напряжения и в крайних стержнях дойдут до предела текучести. Такая задача решена в предыдущем параграфе; подставляя в выражение (a) § 26 вместо P величину $Q - F\sigma_т$, получаем:

$$(Q - F\sigma_т)_{пр} = Q_т^к - F\sigma_т = 2F\sigma_т\cos\alpha.$$

Отсюда

$$Q_т^к = F\sigma_т (1 + 2 \cos \alpha).$$

Допускаемая нагрузка будет равна

$$Q_{доп} = \frac{Q_т^к}{k} = \frac{F\sigma_т (1 + 2 \cos\alpha)}{k},$$

а учитывая, что $\frac{\sigma_т}{k} = [\sigma]$, получаем

$$Q_{доп} = F[\sigma](1 + 2 \cos \alpha).$$

Окончательно:

$$Q \leqslant Q_{доп} = F[\sigma](1 + 2 \cos \alpha) \quad и \quad F \geqslant \frac{Q}{[\sigma](1 + 2 \cos \alpha)}.$$

Эта величина меньше, чем полученная обычным методом расчёта, т. е.

$$\frac{Q}{[\sigma](1 + 2 \cos^3 \alpha)}.$$

При $Q = 4$ *т*, $\alpha = 30°$, $[\sigma_c] = 1000$ *кг/см*^{2} (сталь) получаем: по обычному способу

$$F = \frac{4000}{1000(1 + 2 \cos^3 30°)} = 1,74 \ см^2;$$

по способу допускаемых нагрузок

$$F = \frac{4000}{1000(1 + 2 \cos 30°)} = 1,46 \ см^2.$$

Таким образом, метод расчёта по допускаемым нагрузкам позволяет спроектировать статически неопределимую систему из материала, обладающего площадкой текучести, *экономичнее*, чем при расчёте по допускаемым напряжениям. Это понятно: при способе расчёта по допускаемым напряжениям мы считали за предельную нагрузку нашей конструкции величину $Q_т$, при которой до предела текучести доходил лишь материал среднего стержня, крайние же были недонапряжены. При методе расчёта по допускаемым нагрузкам предельная грузоподъёмность определяется величиной $Q_т^к > Q_т$. При нагрузке $Q_т^к$ полностью используется материал всех трёх стержней.

Таким образом, новый метод расчёта позволяет реализовать скрытые при старом способе запасы прочности в статически неопределимых системах, добиться повышения их *расчётной* грузоподъёмности и действительной *равнопрочности* всех частей конструкции. Не представит никаких затруднений распространить этот метод на случай, когда соотношение площадей среднего и крайних стержней не будет равно единице.

Изложенные выше теоретические соображения проверялись неоднократно на опыте, причём всегда наблюдалась достаточно близкая сходимость величин предельной нагрузки — вычисленной и определённой при эксперименте. Это даёт уверенность в правильности теоретических предпосылок метода допускаемых нагрузок.

§ 28. Применение способа допускаемых нагрузок к расчёту железобетонных стержней.

В § 21 показан расчёт железобетонной колонны на сжатие по методу допускаемых напряжений. Как мы видели, в этом случае не удалось добиться равнопрочности: напряжения в бетоне достигли допускаемых, а в арматуре — не достигли.

Применим способ допускаемых нагрузок. Условие прочности имеет вид:

$$P \leqslant P_{доп}.$$

Для установления $P_{доп}$ надо найти предельное значение $P_{пр}$ *для всей колонны* и разделить его на коэффициент запаса.

Опыты показали, что при сжатии железобетонных колонн бетон после достижения напряжениями предела прочности на сжатие начинал сдавать; появлялась своеобразная «текучесть» бетона, постепенно разрушающегося, но поддерживаемого арматурой; колонна продолжала укорачиваться при постоянных напряжениях в бетоне и возрастающих в арматуре; разрушение наступало, когда в арматуре напряжения доходили до предела текучести. Такая картина разрушения наблюдалась в колоннах с арматурой из малоуглеродистой стали, хорошо укреплённой хомутами против бокового выпучивания.

Проделанные в СССР в большом количестве опыты показали, что для железобетонных колонн указанного выше типа предельная нагрузка равна сумме предельных нагрузок бетонной и стальной частей:

$$P_{пр} = F_б \sigma_в + F_с \sigma_т,$$

где $F_б$ — площадь бетона; $F_с$ — площадь арматуры; $\sigma_в$ — предел прочности бетона при сжатии; $\sigma_т$ — предел текучести стали. В таком случае

$$P_{доп} = \frac{P_{пр}}{k} = F_б [\sigma_б] + F_с [\sigma_с].$$

Условие прочности принимает вид

$$P \leqslant (F_б [\sigma_б] + F_с [\sigma_с]) = F_б \left([\sigma_б] + [\sigma_с] \frac{F_с}{F_б}\right).$$

Задаваясь отношением $\frac{F_с}{F_б}$ или процентом армирования, получаем:

$$F_б \geqslant \frac{P}{[\sigma_б] + [\sigma_с] \frac{F_с}{F_б}}.$$

Применим этот способ к примеру, рассмотренному в § 21. Имеем:

$$P = 30\ т; \quad [\sigma_б] = 45\ кг/см^2; \quad [\sigma_с] = 1250\ кг/см^2; \quad \frac{F_с}{F_б} = \frac{1}{100}.$$

Следовательно,

$$F_б = \frac{30\,000}{45 + \frac{1}{100} \cdot 1250} = 522{,}5 \text{ см}^2,$$

т. е. меньше, чем полученная в § 21 величина (605 $см^2$).

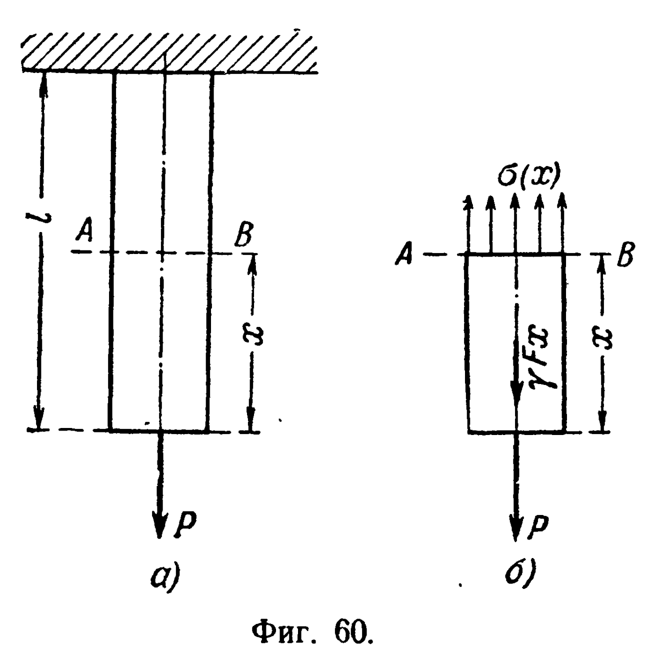
Благодаря работам советских учёных проф. Лолейта, проф. Гвоздева и др. этот метод расчёта прежде, чем в других странах, был введён в СССР и принят некоторыми нашими нормами.

ГЛАВА VI.

УЧЁТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ. РАСЧЁТ ГИБКИХ НИТЕЙ.

§ 29. Подбор сечений с учётом собственного веса (при растяжении и сжатии).

При установлении внешних сил, растягивающих или сжимающих элементы конструкций, мы до сих пор игнорировали собственный вес этих элементов. Возникает вопрос, не вносится ли этим упрощением расчёта слишком большая погрешность? В связи с этим подсчитаем величины напряжений и деформаций при учёте влияния собственного веса растянутых или сжатых стержней.



Фиг. 60.

Пусть вертикальный стержень (фиг. 60, *а*) закреплён своим верхним концом; к нижнему его концу подвешен груз P. Длина стержня l, площадь поперечного сечения F, удельный вес материала γ и модуль упругости E. Подсчитаем напряжения по сечению AB, расположенному на расстоянии x от свободного конца стержня.

Рассечём стержень сечением AB и выделим нижнюю часть длиной x с приложенными к ней внешними силами (фиг. 60, *б*) — грузом P и её собственным весом γFx. Эти две силы уравновешиваются напряжениями, действующими на площадь AB от отброшенной части. Эти напряжения будут нормальными, равномерно распределёнными по сечению и направленными наружу от рассматриваемой части стержня, т. е. растягивающими. Величина их будет равна

$$\sigma(x) = \frac{P + \gamma Fx}{F} = \frac{P}{F} + \gamma x. \qquad (6.1)$$

Таким образом, при учёте собственного веса нормальные напряжения оказываются неодинаковыми во всех сечениях. Наиболее напряжённым, *опасным*, будет верхнее сечение, для которого x достигает наибольшего значения l; напряжение в нём равно

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \gamma l. \tag{6.2}$$

Условие прочности должно быть выполнено именно для этого сечения:

$$\sigma_{max} = \left(\frac{P}{F} + \gamma l\right) \leqslant [\sigma]. \tag{6.3}$$

Отсюда необходимая площадь стержня равна

$$F \geqslant \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}. \tag{6.4}$$

От формулы, определяющей площадь растянутого стержня без учёта влияния собственного веса, эта формула отличается лишь тем, что из допускаемого напряжения вычитается величина γl.

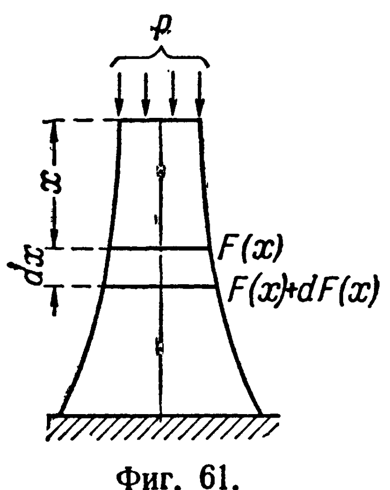
Чтобы оценить значение этой поправки, подсчитаем её для двух случаев. Возьмём стержень из мягкой стали длиной 10 *м*; для него $[\sigma] = 1400$ *кг/см*^{2}, а величина $\gamma l = 7{,}85 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 7{,}85$ *кг/см*^{2}. Таким образом, для стержня из мягкой стали поправка составит $\frac{7{,}85}{1400}$, т. е. около 0,6%. Теперь возьмём кирпичный столб высотой тоже 10 *м*; для него $[\sigma] = 12$ *кг/см*^{2}, а величина $\gamma l = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 1{,}8$ *кг/см*^{2}. Таким образом, для кирпичного столба поправка составит $\frac{1{,}8}{12}$, т. е. уже 15%.

Вполне понятно, что влиянием собственного веса при растяжении и сжатии стержней можно пренебрегать, если мы не имеем дела с длинными стержнями или со стержнями из материала, обладающего сравнительно небольшой прочностью (камень, кирпич) при достаточном весе. При расчёте длинных канатов подъёмников, различного рода длинных штанг и высоких каменных сооружений (башни маяков, опоры мостовых ферм) приходится вводить в расчёт и собственный вес конструкции.

В таких случаях возникает вопрос о целесообразной форме стержня. Если мы подберём сечение стержня (фиг. 60) по формуле (6.4) и дадим одну и ту же площадь поперечного сечения по всей длине, то материал стержня будет плохо использован; нормальное напряжение в нём дойдёт до допускаемого лишь в одном верхнем сечении; во всех прочих сечениях мы будем иметь *запас* в напряжениях, т. е. излишний материал. Поэтому желательно так запроектировать размеры стержня, *чтобы во всех его поперечных сечениях* (перпендикулярных к оси) *нормальные напряжения были постоянны.*

Такой стержень называется стержнем *равного сопротивления* растяжению или сжатию. Если при этом напряжения равны допускаемым, то такой стержень будет иметь наименьший вес.

Возьмём длинный стержень, подверженный сжатию силой P и собственным весом (фиг. 61). Чем ближе к основанию стержня мы будем брать сечение, тем больше будет сила, вызывающая напряжения в этом сечении, тем бо́льшими придётся брать размеры площади сечения. Стержень получит форму, расширяющуюся книзу. Площадь сечения F будет изменяться по высоте в зависимости от x, т. е. $F = f(x)$.



Фиг. 61.

Установим этот закон изменения площади в зависимости от расстояния сечения x от верха стержня.

Площадь верхнего сечения стержня F_0 определится из условия прочности:

$$\frac{P}{F_0} = [\sigma] \quad \text{и} \quad F_0 = \frac{P}{[\sigma]},$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на сжатие; напряжения во всех прочих сечениях стержня также должны равняться величине

$$\sigma = [\sigma] = \frac{P}{F_0}.$$

Чтобы выяснить закон изменения площадей по высоте стержня, возьмём два смежных бесконечно близких сечения на расстоянии x от верха стержня; расстояние между сечениями dx; площадь верхнего назовём $F(x)$, площадь же смежного $F(x) + dF(x)$.

Приращение площади $dF(x)$ при переходе от одного сечения к другому должно воспринять вес $\gamma F(x)\,dx$ элемента стержня между сечениями. Так как на площади $dF(x)$ он должен вызвать напряжение, равное допускаемому $[\sigma]$, то $dF(x)$ определится из условия

$$\frac{\gamma F(x)\,dx}{dF(x)} = [\sigma]. \tag{6.5}$$

Отсюда

$$\frac{dF(x)}{F(x)} = \frac{\gamma}{[\sigma]}\,dx.$$

После интегрирования получаем

$$\ln F(x) + C = \frac{\gamma}{[\sigma]}\,x. \tag{6.6}$$

При $x = 0$ площадь $F(x) = F_0$; подставляя эти значения в (6.6), имеем:

$$\ln F_0 + C = 0 \quad \text{и} \quad C = -\ln F_0.$$

Отсюда

$$\frac{\gamma}{[\sigma]}x = \ln F(x) - \ln F_0 = \ln\frac{F(x)}{F_0}, \quad \frac{F(x)}{F_0} = e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}x}$$

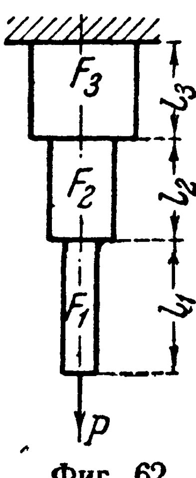
и

$$F(x) = F_0 e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}x}. \tag{6.7}$$

Если менять сечения точно по этому закону, то боковые грани стержня получат криволинейное очертание (фиг. 61), что усложняет и удорожает работу. Поэтому обычно такому сооружению придают лишь приближённую форму стержня равного сопротивления, например в виде усечённой пирамиды с плоскими гранями.

Приведённый расчёт является приближённым. Мы предполагали, что по всему сечению стержня равного сопротивления передаются только нормальные напряжения; на самом деле у краёв сечения напряжения будут направлены по касательной к боковой поверхности.

В случае длинных канатов или растянутых штанг форму стержня равного сопротивления осуществляют тоже приближённо, разделяя стержень по длине на ряд участков; на протяжении каждого участка сечение остаётся постоянным (фиг. 62) — получается так называемый ступенчатый стержень.



Фиг. 62.

Определение площадей F_1, F_2, ... при выбранных длинах производится следующим образом. Площадь поперечного сечения первого снизу участка будет по формуле (6.4) равна

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l_1}.$$

Чтобы получить площадь поперечного сечения второго участка, надо нагрузить его внешней силой P и весом первого участка $\gamma F_1 l_1$:

$$F_2 = \frac{P + \gamma F_1 l_1}{[\sigma] - \gamma l_2}.$$

Для третьего участка к внешней силе добавляются веса первого и второго участков. Подобным же образом поступают и для других участков.

Для того чтобы сравнить выгодность применения брусьев равного сопротивления, ступенчатых и постоянного сечения, рассмотрим числовой пример.

Пример 15. Опора высотой $h = 42$ *м* подвергается сжатию центрально приложенной силой $P = 400$ *т*; принимая объёмный вес кладки 2,2 *т/м*³, а допускаемое напряжение на сжатие 12 *кг/см*², сравнить объёмы кладки для случаев:

опоры постоянного сечения,

опоры из трёх призматических частей равной длины,

опоры равного сопротивления сжатию.

Расчёт ведём в тоннах и метрах.

Для первого случая площадь поперечного сечения равна

$$F=\frac{P}{[\sigma]-h\gamma}=\frac{400}{120-42\cdot 2{,}2}=14{,}5\ м^2.$$

Объём равен

$$V=Fh=14{,}5\cdot 42\approx 610\ м^3.$$

Во втором случае площадь сечения верхней части равна

$$F_1=\frac{P}{[\sigma]-\frac{h}{3}\gamma}=\frac{400}{120-14\cdot 2{,}2}=4{,}48\ м^2.$$

Площадь сечения второго участка равна

$$F_2=\frac{P+\gamma F_1\frac{h}{3}}{[\sigma]-\frac{h}{3}\gamma}=\frac{400+2{,}2\cdot 4{,}48\cdot 14}{120-14\cdot 2{,}2}=6{,}04\ м^2.$$

Площадь сечения на третьем участке равна

$$F_3=\frac{P+\gamma F_1\frac{h}{3}+\gamma F_2\frac{h}{3}}{[\sigma]-\frac{h}{3}\gamma}=\frac{400+2{,}2\cdot 4{,}48\cdot 14+2{,}2\cdot 6{,}04\cdot 14}{120-14\cdot 2{,}2}=8{,}12\ м^2.$$

Полный объём кладки равен

$$V=(F_1+F_2+F_3)\frac{h}{3}=(4{,}48+6{,}04+8{,}12)\,14=261\ м^3.$$

Этот же ответ можно получить из условия, что усилие внизу третьего участка, равное $P+G$ (где G — вес всей опоры), одновременно равно $[\sigma]F_3$; тогда

$$V=\frac{G}{\gamma}=\frac{[\sigma]F_3-P}{\gamma}=261\ м^3.$$

Для опоры равного сопротивления сжатию площадь верхнего сечения равна

$$F_0=\frac{P}{[\sigma]}=\frac{400}{120}=3{,}33\ м^2.$$

Площадь нижнего сечения равна

$$F_h=F_0e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}h}=3{,}33\,e^{\frac{2{,}2\cdot 42}{120}}=3{,}33\,e^{0{,}77}=7{,}15\ м^2.$$

Вес опоры равного сопротивления G определится из условия

$$P+G=[\sigma]F_h;$$

отсюда

$$G=[\sigma]F_h-P=120\cdot 7{,}15-400=460\ т.$$

Объём опоры равен

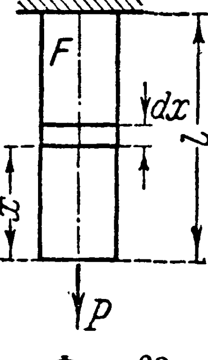
$$V=\frac{G}{\gamma}=\frac{460}{2{,}2}=209\ м^3,$$

что меньше объёма ступенчатой опоры на 20% и примерно втрое меньше опоры постоянного сечения.

§ 30. Деформации при действии собственного веса.

При определении влияния собственного веса на деформацию при растяжении и сжатии стержней придётся учесть, что относительное удлинение различных участков стержня будет переменным, как и напряжение $\sigma(x)$. Для вычисления полного удлинения стержня постоянного сечения определим сначала удлинение бесконечно малого участка стержня длиной dx, находящегося на расстоянии x от конца стержня (фиг. 63). Абсолютное удлинение этого участка (формула (2.5)) равно

$$\Delta\, dx = \frac{(P+\gamma xF)\,dx}{EF} = \frac{dx}{E}\left[\frac{P}{F}+\gamma x\right].$$



Фиг. 63.

Полное удлинение стержня Δl равно

$$\Delta l = \int_0^l \Delta\, dx = \int_0^l \frac{dx}{E}\left[\frac{P}{F}+\gamma x\right] = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Помножим и разделим второе слагаемое на F и учтём, что $\gamma Fl = Q$ есть полный вес стержня. Тогда удлинение от одного собственного веса (второе слагаемое формулы) равно

$$\Delta l_{\text{с. в}} = \frac{Ql}{2EF},$$

т. е. оно в два раза меньше удлинения от приложенной к концу стержня внешней силы Q, равной собственному его весу.

Что же касается деформаций стержней равного сопротивления, то, так как нормальные напряжения во всех сечениях одинаковы и равны допускаемым $[\sigma]$, относительное удлинение по всей длине стержня одинаково и равно

$$\varepsilon = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Абсолютное же удлинение при длине стержня l равно

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{[\sigma]\, l}{E} = \frac{Pl}{EF_0},$$

где обозначения соответствуют фиг. 61.

Деформацию ступенчатых стержней следует определять по частям, выполняя подсчёты по отдельным призматическим участкам. При определении деформации каждого участка учитывается не только его собственный вес, но и вес тех участков, которые влияют на его деформацию, добавляясь к внешней силе. Полная деформация получится суммированием деформаций отдельных участков.

Пример 16. Трос шахтного подъёмника длиной 120 *м* имеет два участка по 60 *м* каждый. Площадь поперечного сечения верхнего участка равна 4 *см²*, нижнего — 3 *см²*. Объёмный вес материала троса 7,85 *г/см³*, его модуль упругости $E = 1{,}5 \cdot 10^6$ *кг/см²*. Вес клети, поднимаемой тросом, равен 1500 *кг*. Определить удлинение троса.

Вес нижней части троса составит:

$$Q_1 = 7{,}85 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 60 \cdot 10^2 = 141{,}3\ кг,$$

и вес верхней части

$$Q_2 = 7{,}85 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 60 \cdot 10^2 = 188{,}4\ кг.$$

Удлинение нижней части троса будет равно

$$\Delta l_1 = \frac{\left(P + \frac{Q_1}{2}\right) l}{EF_1} = \frac{\left(1500 + \frac{141{,}3}{2}\right) 60 \cdot 10^2}{1{,}5 \cdot 10^6 \cdot 3} = 2{,}10\ см,$$

а удлинение верхней части

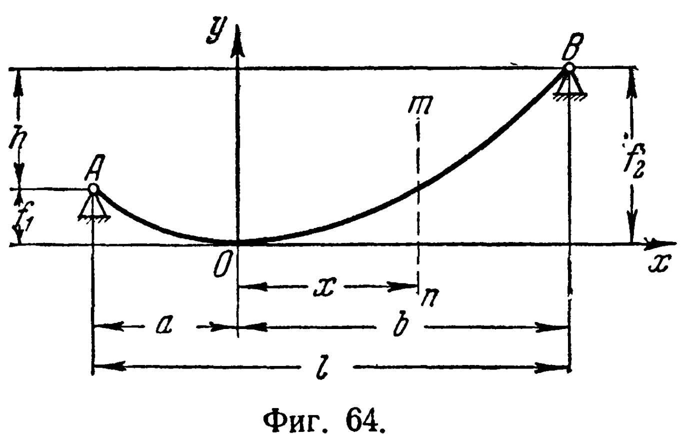
$$\Delta l_2 = \frac{\left[(P + Q_1) + \frac{Q_2}{2}\right] l}{EF_2} = \frac{\left(1500 + 141{,}3 + \frac{188{,}4}{2}\right) 60 \cdot 10^2}{1{,}5 \cdot 10^6 \cdot 4} = 1{,}74\ см.$$

Полное удлинение троса будет равно

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 2{,}10 + 1{,}74 = 3{,}84\ см.$$

§ 31. Гибкие нити.

А. В технике встречается ещё один вид растянутых элементов, при определении прочности которых важное значение имеет собственный вес. Это — так называемые гибкие нити. Таким термином обозначаются гибкие элементы в линиях электропередач, в канатных дорогах, в висячих мостах и других сооружениях.



Фиг. 64.

Пусть (фиг. 64) имеется гибкая нить постоянного сечения, нагружённая собственным весом и подвешенная в двух точках, находящихся на разных уровнях. Под действием собственного веса нить провисает по некоторой кривой *AOB*.

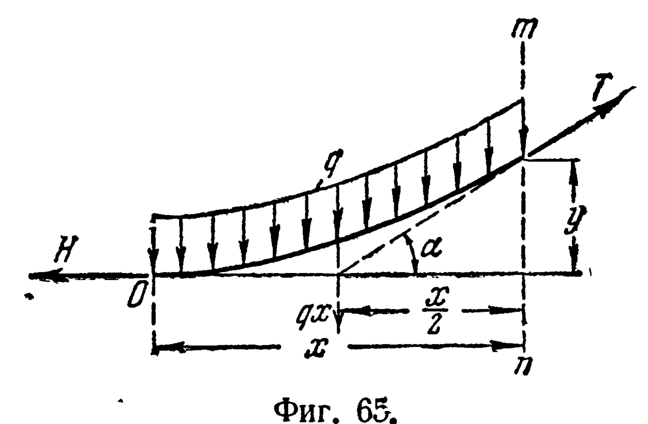
Горизонтальная проекция расстояния между опорами (точками её закрепления), обозначаемая l, носит название *пролёта*.

Нить имеет постоянное сечение, следовательно, вес её распределён равномерно по её длине. Обычно провисание нити невелико по сравнению с её пролётом, и длина кривой *AOB* мало отличается (не более чем на 10%) от длины хорды *AB*. В этом случае с достаточной степенью точности можно считать, что вес нити равно-

мерно распределён не по её длине, а по длине её проекции на горизонтальную ось, т. е. вдоль *пролёта* l. Эту категорию гибких нитей мы и рассмотрим. Примем, что интенсивность нагрузки, равномерно распределённой по пролёту нити, равна q. Эта нагрузка, имеющая размерность *сила/длина*, может быть не только собственным весом нити, приходящимся на единицу длины пролёта, но и весом льда или любой другой нагрузкой, также равномерно распределённой. Сделанное допущение о законе распределения нагрузки значительно облегчает расчёт, но делает его вместе с тем приближённым; если при точном решении (нагрузка распределена вдоль кривой) кривой провисания будет цепная линия, то в приближённом решении кривая провисания оказывается квадратной параболой.

Начало координат выберем в самой низшей точке провисания нити O (фиг. 64), положение которой, нам пока неизвестное, очевидно, зависит от величины нагрузки q, от соотношения между длиной нити по кривой и длиной пролёта, а также от относительного положения опорных точек. В точке O касательная к кривой провисания нити, очевидно, горизонтальна. По этой касательной направим вправо ось x.

Вырежем двумя сечениями — в начале координат и на расстоянии x от начала координат (сечение $m-n$) — часть длины нити. Так как нить предположена гибкой, т. е. способной сопротивляться лишь растяжению, то действие отброшенной части на оставшуюся возможно только в виде силы, направленной по касательной к кривой провисания нити в месте разреза; иное направление этой силы невозможно.



Фиг. 65.

На фигуре 65 представлена вырезанная часть нити с действующими на неё силами. Равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q направлена вертикально вниз. Воздействие левой отброшенной части (горизонтальная сила H) направлено, ввиду того, что нить работает на растяжение, влево. Действие правой отброшенной части, сила T, направлено вправо по касательной к кривой провисания нити в этой точке.

Составим уравнение равновесия вырезанного участка нити. Возьмём сумму моментов всех сил относительно точки приложения силы T и приравняем её нулю. При этом учтём, опираясь на приведённое в начале допущение, что равнодействующая распределённой нагрузки интенсивностью q будет qx, и что она приложена посредине отрезка x (фиг. 65). Тогда

$$H \cdot y - qx \cdot \frac{x}{2} = 0, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{qx^2}{2H}. \qquad (6.8)$$

Отсюда следует, что кривая провисания нити является параболой. Когда обе точки подвеса нити находятся на одном уровне, то $f_1 = f_2 = f$. Величина f в данном случае будет так называемой стрелой провисания. Её легко определить из уравнения (6.8); так как в этом случае, ввиду симметрии, низшая точка нити находится посредине пролёта, то $a = b = \frac{l}{2}$; подставляя в уравнение (6.8) значения $x = b = \frac{l}{2}$ и $y = f$, получаем:

$$f = \frac{ql^2}{8H}. \tag{6.9}$$

Из этой формулы находим величину силы H:

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \tag{6.10}$$

Величина H называется горизонтальным *натяжением нити.*

Таким образом, если известны нагрузка q и натяжение H, то по формуле (6.9) найдём стрелу провисания f. При заданных q и f натяжение H определяется формулой (6.10). Связь этих величин с длиной s нити по кривой провисания устанавливается при помощи известной из математики приближённой формулы[1])

$$s \approx l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right). \tag{6.11}$$

Вернёмся к рассмотрению фиг. 65. Составим ещё одно условие равновесия вырезанной части нити, а именно, приравняем нулю сумму проекций всех сил на ось x:

$$-H + T\cos\alpha = 0.$$

Из этого уравнения найдём силу T — натяжение в произвольной точке

$$T = \frac{H}{\cos\alpha}. \tag{6.12}$$

Из формулы (6.12) видно, что сила T увеличивается от низшей точки нити к опорам и будет наибольшей в точках подвеса — там, где касательная к кривой провисания нити составляет наибольший угол с горизонталью. При малом провисании нити этот угол не достигает

---

[1]) Элемент длины кривой $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$; так как из формул (6.8) и (6.10) следует, что $\frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H} = \frac{8fx}{l^2}$, то $ds = dx\left(1 + \frac{64f^2x^2}{l^4}\right)^{\frac{1}{2}} \approx dx\left(1 + \frac{32f^2x^2}{l^4}\right)$. После интегрирования в пределах от $x = 0$ до $x = l/2$ и удваивания приходим к формуле (6.11).

больших значений, поэтому с достаточной для практики степенью точности можно считать, что усилие в нити постоянно и равно её натяжению H. На эту величину обычно и ведётся расчёт прочности нити. Если всё же требуется вести расчёт на наибольшую силу у точек подвеса, то для симметричной нити её величину определим следующим путём. Вертикальные составляющие реакций опор равны между собой и равны половине суммарной нагрузки на нить, т. е. $\frac{ql}{2}$. Горизонтальные составляющие равны силе H, определяемой по формуле (6.10). Полные реакции опор получатся как геометрические суммы этих составляющих:

$$T_{\max}=\sqrt{\left(\frac{ql^2}{8f}\right)^2+\left(\frac{ql}{2}\right)^2}=\frac{ql^2}{8f}\sqrt{1+16\frac{f^2}{l^2}}=H\sqrt{1+\frac{16f^2}{l^2}}.$$

Условие прочности для гибкой нити, если через F обозначена площадь сечения, имеет вид:

$$\sigma=\frac{H}{F}\leqslant[\sigma].$$

Заменив натяжение H его значением по формуле (6.10), получим:

$$\frac{ql^2}{8fF}\leqslant[\sigma].$$

Из этой формулы при заданных l, q, F и $[\sigma]$ можно определить необходимую стрелу провисания f. Решение при этом упростится, если в q включён лишь собственный вес; тогда $q=\gamma\cdot F$, где γ — вес единицы объёма материала нити, и

$$f=\frac{\gamma Fl^2}{8F[\sigma]}=\frac{\gamma l^2}{8[\sigma]},$$

т. е. величина F не войдёт в расчёт.

Б. Если точки подвеса нити находятся на разных уровнях, то подставляя в уравнение (6.8) значения $x=-a$ и $x=b$, находим f_1 и f_2:

$$f_1=\frac{qa^2}{2H};\quad f_2=\frac{qb^2}{2H}. \tag{6.13}$$

Отсюда из второго выражения определяем натяжение

$$H=\frac{qb^2}{2f_2}, \tag{6.14}$$

а деля первое на второе, находим:

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{a^2}{b^2}\quad \text{или}\quad a=\pm b\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}.$$

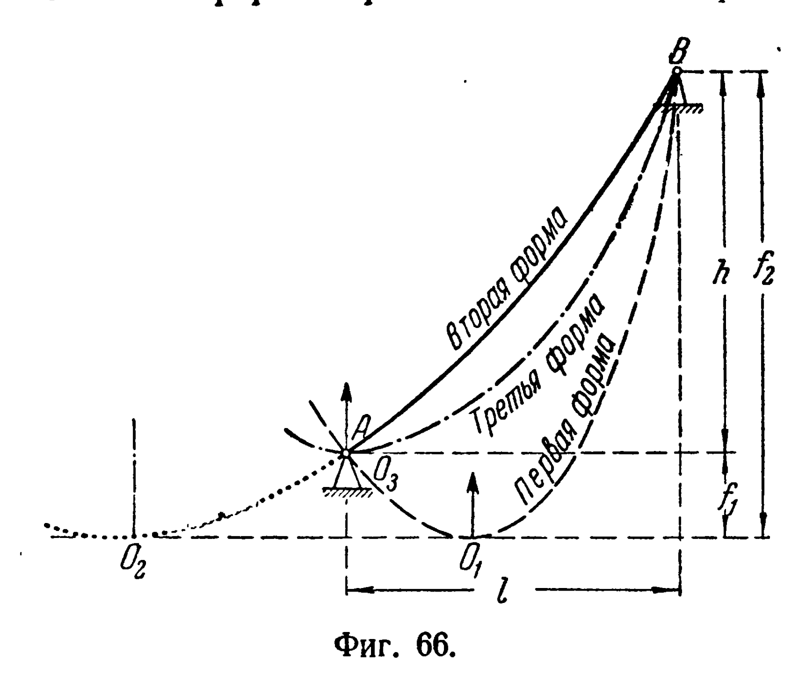
Имея в виду, что $b+a=l$, получаем:

$$b \pm b\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}=l, \quad \text{или} \quad b=\frac{l}{1\pm\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}}.$$

Подставив это значение b в формулу (6.14), окончательно определяем[1]):

$$H=\frac{ql^2}{2(\sqrt{f_2}\pm\sqrt{f_1})^2}. \tag{6.15}$$

Два знака в знаменателе указывают на то, что могут быть две основные формы провисания нити. Первая форма при меньшем значении H (знак плюс перед вторым корнем) даёт нам вершину параболы между опорами нити (фиг. 64 и пунктирная кривая AO_1B на фиг. 66). При большем натяжении H (знак минус перед вторым корнем) вершина параболы расположится левее опоры A (сплошная кривая O_2AB на фиг. 66). Получаем вторую форму кривой.



Фиг. 66.

Возможна и третья (промежуточная между двумя основными) форма провисания, соответствующая условию $f_1=0$; тогда начало координат O_3 совмещается с точкой A. Та или иная форма будет получена в зависимости от соотношений между длиной нити по кривой провисания AOB (фиг. 64) и длиной хорды AB.

Если при подвеске нити на разных уровнях неизвестны стрелы провисания f_1 и f_2, но известно натяжение H, то легко получить значения расстояний a и b и стрел провисания f_1 и f_2.

Разность h уровней подвески равна (фиг. 64 и 66):

$$h=f_2-f_1.$$

Подставим в это выражение значения f_1 и f_2, согласно (6.13), и преобразуем его, имея в виду, что $a+b=l$:

$$h=\frac{qb^2}{2H}-\frac{qa^2}{2H}=\frac{q}{2H}(b^2-a^2)=\frac{q}{2H}(b+a)(b-a)=\frac{ql}{2H}(b-a),$$

---

[1]) Впервые формула для H в таком примерно виде была указана проф. Штаерманом И. Я. («Наука и Техника», журнал Одесского политехнического института 1925).

откуда

$$b-a=\frac{2Hh}{ql},$$

а так как $a+b=l$, то

$$a=\frac{l}{2}-\frac{Hh}{ql} \quad \text{и} \quad b=\frac{l}{2}+\frac{Hh}{ql}.$$

Следует иметь в виду, что при $a>0$ будет иметь место первая форма провисания нити (фиг. 66), при $a<0$ — вторая форма провисания и при $a=0$ — третья форма. Подставляя значения a и b в выражения (6.13), получаем величины f_1 и f_2:

$$f_1=\frac{ql^2}{8H}+\frac{Hh^2}{2ql^2}-\frac{h}{2}$$

и

$$f_2=\frac{ql^2}{8H}+\frac{Hh^2}{2ql^2}+\frac{h}{2}.$$

В. Теперь выясним, что произойдёт с симметричной нитью, перекрывающей пролёт l, если после подвешивания её при температуре t_1 и интенсивности нагрузки q_1 температура нити *повысится* до t_2, а нагрузка *увеличится* до интенсивности q_2 (например, из-за её обледенения). При этом предположим, что в первом состоянии задано или натяжение H_1, или стрела провисания f_1. (Зная одну из этих двух величин, по формуле (6.10) всегда можно определить другую.)

При подсчёте *деформации* нити, являющейся по сравнению с длиной нити малой величиной, сделаем два допущения: длина нити равна её пролёту, а натяжение постоянно и равно H. При пологих нитях эти допущения дают небольшую погрешность.

В таком случае удлинение нити, вызванное увеличением температуры, будет равно

$$\Delta s_1=\alpha(t_2-t_1)l, \tag{6.16}$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения материала нити.

При повышении температуры нить удлиняется. В связи с этим увеличится её стрела провисания и, как следствие, в соответствии с формулой (6.10) уменьшится её натяжение. С другой стороны, из-за увеличения нагрузки, как видно из той же формулы (6.10), натяжение увеличится. Допустим, что окончательно натяжение увеличивается. Тогда удлинение нити, вызванное увеличением натяжения, будет, согласно закону Гука, равно:

$$\Delta s_2=\frac{(H_2-H_1)l}{EF}. \tag{6.17}$$

Если H_2 окажется меньше, чем H_1, то величина Δs_2 будет отрицательной. При понижении температуры будет отрицательной величина Δs_1.

Таким образом, длина нити во втором её состоянии будет равна длине при первом её состоянии с добавлением тех деформаций, которые произойдут от повышения температуры и натяжения:

$$s_2 = s_1 + \Delta s_1 + \Delta s_2. \tag{6.18}$$

Изменение длины нити вызовет изменение и её стрелы провисания. Вместо f_1 она станет f_2.

Теперь заменим в уравнении (6.18) s_1 и s_2 их выражениями по формуле (6.11), а деформации Δs_1 и Δs_2 — их значениями по формулам (6.16) и (6.17). Тогда уравнение (6.18) примет следующий вид:

$$l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_2^2}{l^2}\right) = l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_1^2}{l^2}\right) + \alpha(t_2 - t_1)\,l + \frac{(H_2 - H_1)\,l}{EF}. \tag{6.19}$$

В этом уравнении заменим f_1 и f_2 их значениями по формуле (6.9):

$$f_1 = \frac{q_1 l^2}{8H_1} \quad \text{и} \quad f_2 = \frac{q_2 l^2}{8H_2}.$$

Тогда, после некоторых преобразований, уравнение (6.19) может быть написано в виде

$$H_2^3 + \left[\frac{EFq_1^2 l^2}{24H_1^2} + EF\alpha(t_2 - t_1) - H_1\right]H_2^2 - \frac{EFq_2^2 l^2}{24} = 0. \tag{6.20}$$

Определив из уравнения (6.20) натяжение H_2, можно найти по формуле (6.9) и стрелу f_2.

В случае, если при переходе от первого ко второму состоянию нагрузка не изменяется, а изменяется лишь температура, то в уравнении (6.20) интенсивность q_2 заменяется на q_1. В случае, если при переходе от первого ко второму состоянию не изменяется температура, а изменяется лишь нагрузка, то в уравнении (6.20) средний член в квадратной скобке равен нулю.

Уравнение (6.20) пригодно, конечно, и при понижении температуры и уменьшении нагрузки.

В тех случаях, когда стрела провисания не является малой по сравнению с пролётом, выведенные выше формулы, строго говоря, неприменимы, так как действительная кривая провисания нити, цепная линия, будет уже значительно отличаться от параболы, полученной нами благодаря предположению о равномерном распределении нагрузки по *пролёту* нити, а не по её *длине*, как то имеет место в действительности.

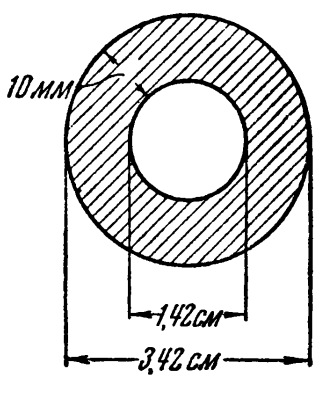
Точные подсчёты показывают, что значение погрешности в величине натяжения H, вызванной этим предположением, таково: при отношении $\frac{f}{l} < \frac{1}{20}$ погрешность не превосходит 0,3%, при $\frac{f}{l} = \frac{1}{10}$ ошибка составляет уже 1,3%, а при $\frac{f}{l} = \frac{1}{5}$ погрешность несколько превосходит 5%.

§ 32. Примеры.

Пример 17. Многожильный медный провод, сечением $F = 120$ *мм*², симметрично подвешен к опорам, отстоящим одна от другой на $l = 100$ *м*. Температура провода зимой может понизиться до —40° С, а при температуре —5° С имеет место обледенение провода при одновременном давлении на него ветра.

Определить натяжение провода и выяснить, при каких из указанных условий состояние его будет опаснее.

В соответствии с сортаментом проводов многожильный медный провод $F = 120$ *мм*² имеет диаметр 14,2 *мм* и погонный метр его весит 1,090 *кг*. Модуль упругости материала провода равен $E = 1{,}3 \cdot 10^4$ *кг/мм*², коэффициент линейного температурного расширения равен $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$. Допускаемое напряжение примем равным $[\sigma] = 8$ *кг/мм*².



Фиг. 67.

Из условия прочности $\frac{H}{F} \leqslant [\sigma]$ находим наибольшее допустимое натяжение:

$$H_{доп} = F[\sigma] = 120 \cdot 8 = 960 \text{ кг}.$$

Теперь предположим, что при температуре —40° С натяжение будет наибольшим — равным допускаемому, т. е. 960 *кг*. Проверим, каково будет натяжение во втором случае, при обледенении, ветре и температуре —5° С. Для этого сначала подсчитаем в этих условиях погонную нагрузку провода.

Толщина обледенения принята равной 10 *мм*. В нашем случае площадь поперечного сечения льда (фиг. 67) будет равна:

$$F_л = \frac{3{,}14}{4}(3{,}42^2 - 1{,}42^2) = 7{,}58 \text{ см}^2.$$

При объёмном весе льда 0,9 *г/см*³ нагрузка от льда на погонный метр провода составит:

$$q_л = \frac{0{,}9 \cdot 100 \cdot 7{,}58}{1000} = 0{,}682 \text{ кг/м}.$$

Нагрузка от собственного веса и льда получится суммированием. Она будет равна:

$$q_{сл} = q_с + q_л = 1{,}090 + 0{,}682 = 1{,}772 \text{ кг/м}.$$

Давление ветра определяется на диаметральное сечение провода. Интенсивность давления принята равной 24 *кг/м*², направление ветра — горизонтальным. При этих условиях нагрузка от ветра будет равна:

$$q_в = 24 \cdot 1 \cdot 0{,}0342 = 0{,}822 \text{ кг/м}.$$

Суммирование нагрузок от собственного веса провода и веса льда с ветровой нагрузкой производится геометрически. Тогда полная нагрузка на погонный метр провода будет равна:

$$\bar{q}=\sqrt{q_{\text{сл}}^2+q_{\text{в}}^2}=\sqrt{1{,}772^2+0{,}822^2}=1{,}950\ \textit{кг/м}.$$

Теперь мы можем приступить к определению натяжения провода при этой нагрузке. Нам надо перейти от состояния первого, когда $t_1=-40^\circ\,\text{C}$, $q_1=1{,}090$ *кг/м* (только собственный вес) и $H_1=960$ *кг* (допускаемое натяжение) к состоянию второму, когда $t_2=-5^\circ\,\text{C}$, $q_2=1{,}950$ *кг/м*, а натяжение H_2 неизвестно. Напишем, соблюдая размерность, при этих данных и ранее приведённых значениях E, F, l и α уравнение (6.20):

$$H_2^3+\left[\frac{1{,}3\cdot10^4\cdot120\cdot1{,}09^2\cdot100^2}{24\cdot960^2}+1{,}3\cdot10^4\cdot120\cdot17\cdot10^{-6}(-5+40)-960\right]H_2^2-\frac{1{,}3\cdot10^4\cdot120\cdot1{,}95^2\cdot100^2}{24}=0,$$

или

$$H_2^3+805H_2^2-2{,}47\cdot10^9=0.$$

Единственно нас интересующий положительный рациональный корень этого уравнения проще всего определить подбором, путём последовательных попыток. Он равен

$$H_2=1130\ \textit{кг}.$$

Оказалось, что при температуре $-5^\circ\,\text{C}$, обледенении и ветре натяжение больше, чем при температуре $-40^\circ\,\text{C}$ и нагрузке только от собственного веса. Таким образом, приходится за опасное состояние при заданных условиях задачи принимать наличие обледенения и ветра. В этом случае, а не в случае $t=-40^\circ\,\text{C}$, натяжение должно быть равно допускаемому, т. е. 960 *кг*. Производить обратную проверку нет смысла, так как проделанный выше расчёт уже показал, что при обледенении и ветре натяжение больше, чем при низкой температуре. Сама же величина натяжения при низкой температуре нас не интересует, важно лишь то, что она меньше допускаемой.

Пример 18. Провод, рассмотренный в предыдущем примере, подвешивается к опорам при температуре $+15^\circ\,\text{C}$. Определить необходимую стрелу провисания провода при условии, что в опасном состоянии натяжения в нём равны допускаемым.

В предыдущем примере было выяснено, что опасное состояние имеет место при обледенении. Приняв это состояние за исходное и назвав его сейчас первым, примем (согласно данным примера 17) $t_1=-5^\circ\,\text{C}$, $q_1=1{,}950$ *кг/м* и $H_1=960$ *кг* и перейдём ко второму состоянию, во время монтажа, при $t_2=+15^\circ\,\text{C}$, $q_2=1{,}090$ *кг/м* и неизвестном H_2. Опять напишем для этого случая уравнение (6.20):

$$H_2^3+\left[\frac{1{,}3\cdot10^4\cdot120\cdot1{,}95^2\cdot100^2}{24\cdot960^2}+1{,}3\cdot10^4\cdot120\cdot17\cdot10^{-6}(15+5)-960\right]H_2^2-\frac{1{,}3\cdot10^4\cdot120\cdot1{,}09^2\cdot100^2}{24}=0,$$

или

$$H_2^3+2250H_2^2-7{,}72\cdot10^8=0,$$

откуда $H_2=527$ *кг*.

Стрелу провисания мы найдём из формулы (6.9):

$$f_2=\frac{q_2l^2}{8H_2}=\frac{1,090\cdot 100^2}{8\cdot 527}=2,59\ м,$$

а длину провода из формулы (6.11):

$$s=l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f_2^2}{l^2}\right)=100\left(1+\frac{8}{3}\frac{2,59^2}{100^2}\right)=100,18\ м.$$

Пример 19. Определить необходимую высоту точек подвеса провода, рассмотренного в предыдущих примерах. Для обеспечения проезда под проводом расстояние от земли до низшей его точки не должно быть менее 6 *м*. Наибольшее провисание провода может иметь место летом при температуре +40° C, а также во время его обледенения при температуре —5° C, но в отсутствии ветра.

Для того чтобы определить высоту точек подвеса, надо узнать величину наибольшей стрелы провисания. Для этого следует перейти от какого-либо известного нам состояния провода к тем состояниям, когда возможна наибольшая стрела провисания.

Этот переход может быть сделан как от опасного, так и от монтажного состояний. Мы возьмём за исходное состояние в обоих случаях опасное.

Определим сначала стрелу провисания при наличии обледенения без ветра. В первом состоянии примем $t_1=-5°$ C, $q_1=1,950$ *кг/м*, $H_1=960$ *кг;* во втором состоянии $t_2=t_1$ и $q_2=1,772$ *кг/м* (собственный вес и обледенение). Напишем уравнение (6.20), но без среднего члена в квадратной скобке, так как не происходит изменения температуры:

$$H_2^3+\left[\frac{1,3\cdot 10^4\cdot 120\cdot 1,95^2\cdot 100^2}{24\cdot 960^2}-960\right]H_2^2-\frac{1,3\cdot 10^4\cdot 120\cdot 1,772^2\cdot 100^2}{24}=0,$$

откуда $H_2=885$ *кг*.

Стрела провисания определяется из формулы (6.9):

$$f=\frac{1,772\cdot 100^2}{8\cdot 885}=2,51\ м.$$

Теперь определим стрелу провисания при наивысшей температуре. Первое состояние прежнее, при втором состоянии $t_2=+40°$ C и $q_2=1,090$ *кг/м*.

Для этого случая уравнение (6.20) имеет вид:

$$H_2^3+\left[\frac{1,3\cdot 10^4\cdot 120\cdot 1,95^2\cdot 100^2}{24\cdot 960^2}+1,3\cdot 10^4\cdot 120\cdot 17\cdot 10^{-6}(40+5)-960\right]H_2^2-$$
$$-\frac{1,3\cdot 10^4\cdot 120\cdot 1,09^2\cdot 100^2}{24}=0 \text{ и } H_2=478\ кг.$$

Стрела провисания будет равна

$$f=\frac{1,09\cdot 100^2}{8\cdot 478}=2,85\ м.$$

Следовательно, наибольшая стрела провисания имеет место при наивысшей температуре и равна

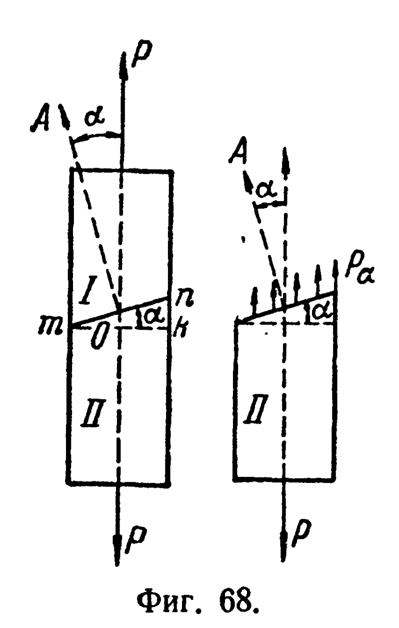
$$f_{\max}=2,85\ м.$$

Для того чтобы был соблюдён габарит проезда 6 *м*, необходимо точки подвеса взять на высоте $6+2,85=8,85$ *м*.

ГЛАВА VII.
СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ.

§ 33. Напряжения по наклонным сечениям при осевом растяжении или сжатии (линейное напряжённое состояние).

В предыдущих параграфах, проверяя прочность растянутого или сжатого стержней, мы определяли напряжения только по сечению, перпендикулярному к его оси. Но правильно оценить опасность, угрожающую прочности стержня, можно, лишь зная полностью его напряжённое состояние, а это требует уменья вычислять напряжения не только по сечению, перпендикулярному к оси, а по любому.



Фиг. 68.

Вычислим напряжения, действующие по какому-либо наклонному сечению. Возьмём призматический стержень, растянутый силами P (фиг. 68). Разделим его на две части: I и II сечением mn, составляющим угол α с поперечным сечением mk, перпендикулярным к оси. Тот же угол составляют между собой и нормали к этим сечениям.

За *положительное направление* отсчётов этого угла возьмём направление *против* часовой стрелки. Нормаль OA, направленную *наружу* по отношению к отсечённой части стержня, будем называть *внешней* нормалью к сечению mn. Площадь сечения mk обозначим F_0, площадь же сечения mn обозначим F_α.

Для нахождения напряжений, передающихся через намеченное сечение от верхней (I) части на нижнюю (II), отбросим мысленно верхнюю часть и заменим действие её на нижнюю напряжениями p_α. Для равновесия нижней части напряжения p_α должны уравновешивать силу P и быть направлены параллельно оси стержня. В данном случае напряжения уже не перпендикулярны к той площадке, по которой они действуют. Величина их тоже будет иной, чем для площадки mk.

Делая предположение, как и ранее для поперечного сечения (§ 6), что напряжения p_α равномерно распределены по площади проведённого разреза, найдём:

$$p_\alpha = \frac{P}{F_\alpha}.$$

Но так как $F_\alpha = \frac{F}{\cos\alpha}$, то

$$p_\alpha = \frac{P\cos\alpha}{F_0} = \sigma_0 \cos\alpha,$$

где $\sigma_0 = \frac{P}{F_0}$ — нормальное напряжение по площадке mk, перпендикулярной к растягивающей силе.

При изменении угла α меняется и *величина* полных напряжений p_α, действующих по проведённой площадке, и *угол* наклона их $(90° - \alpha)$ к этой площадке.

Для того чтобы при любом угле наклона α иметь дело всегда с одними и теми же видами напряжений, разложим напряжения p_α на две составляющие: в плоскости mn и перпендикулярно к ней (фиг. 69). Таким образом, напряжение p_α, действующее в точке A площадки mn, мы заменяем двумя взаимно перпендикулярными напряжениями: *нормальным напряжением* σ_α и *касательным напряжением* τ_α. Величины этих двух напряжений будут меняться в зависимости от изменения угла α между нормалью к площадке и направлением растягивающей силы.

Из фиг. 69 имеем:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma_0 \cos^2\alpha, \qquad (7.1)$$

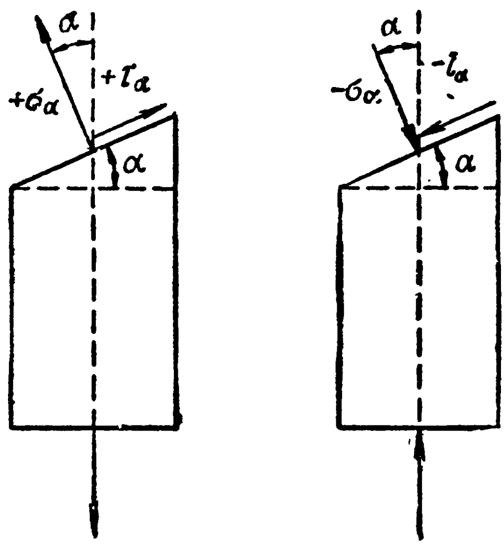
$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \sigma_0 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\alpha. \qquad (7.2)$$

Фиг. 69.

Установим следующие условия относительно *знаков* напряжений σ_α и τ_α. *Растягивающие* напряжения σ_α, т. е. совпадающие с направлением *внешней* нормали, будем считать *положительными*; нормальные напряжения *обратного* направления — *сжимающие* — будем принимать со знаком *минус*.

Касательные напряжения будем считать *положительными*, если их направление таково, что внешняя нормаль для совмещения с ними должна повернуться по *часовой стрелке*. Обратное направление τ_α будем считать отрицательным. Можно руководствоваться и таким правилом знаков: если касательное напряжение τ даёт момент *по часовой стрелке* относительно центра рассматриваемого элемента, то оно считается положительным; против часовой стрелки — отрицательным.

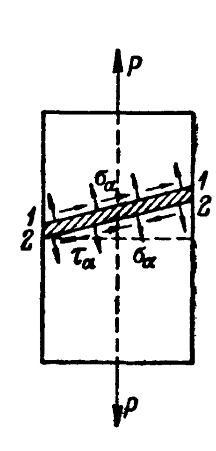
На фиг. 70 показаны принятые условия относительно знаков α, σ и τ.



Фиг. 70.

При любом угле наклона площадки α мы всегда будем иметь дело лишь с *двумя* видами напряжений, действующих в каждой точке проведённого разреза: с *нормальным* и *касательным* напряжениями. Эти два вида напряжений соответствуют двум видам деформаций, которые испытывает материал стержня.

Выделим (фиг. 71) из растянутого стержня двумя наклонными параллельными сечениями *1—1* и *2—2* тонкий слой материала: этот слой на фиг. 71 заштрихован. На обе плоскости, ограничивающие этот слой, будут действовать и нормальные и касательные напряжения, σ_α и τ_α. Как видно из чертежа, нормальные напряжения соответствуют *растяжению* выделенного слоя; напряжения же τ_α соответствуют стремлению сечений *1—1* и *2—2* сдвинуться параллельно одно другому.



Фиг. 71.

Значит, наличие этих двух видов напряжений соответствует наличию двух видов деформаций: продольной деформации (удлинение или укорочение) и деформации сдвига.

Этому соответствуют и два вида разрушения материала: путём отрыва и путём сдвига.

Для того чтобы убедиться в достаточном сопротивлении материала стержня разрушению, необходимо установить *наибольшие* значения величин σ_α и τ_α в зависимости от положения площадки *mn*.

Из формул (7.1) и (7.2) следует, что σ_α достигает своего наибольшего значения, когда $\cos^2\alpha$ будет равен единице и угол $\alpha = 0$. Максимум же τ_α получится при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $2\alpha = 90°$ и $\alpha = 45°$. Величины этих наибольших напряжений будут равны:

$$\max\sigma_\alpha = \sigma_0 = \frac{P}{F_0}; \quad \max\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2}. \tag{7.3}$$

Таким образом: *наибольшие нормальные напряжения действуют в данном случае по площадкам, перпендикулярным к оси стержня; наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, составляющим угол 45° с направлением оси стержня, и равны половине наибольших нормальных напряжений.*

Возникает вопрос, по отношению к какому из этих видов напряжений следует производить проверку прочности, какому из них приписать решающую роль в нарушении прочности материала. Это подробно освещено в главе VIII (§ 43).

§ 34. Понятие о главных напряжениях. Виды напряжённого состояния материала.

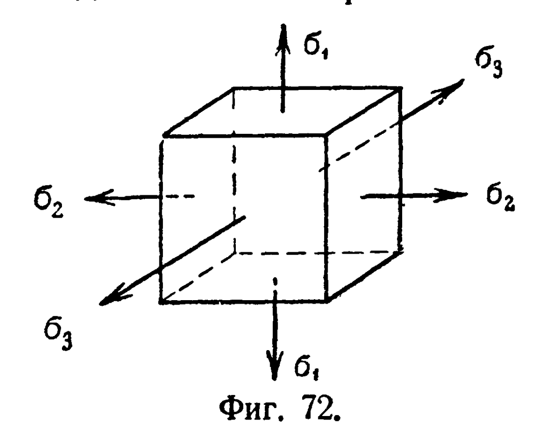
В предыдущих главах мы ознакомились с поведением материала при осевом (или, как его часто называют, простом) растяжении и сжатии. На практике, однако, возможны случаи, когда под действием внешних сил элемент материала подвергается растяжению или сжатию по двум и трём направлениям, т. е. находится в условиях *сложного напряжённого состояния.*

В § 33 было показано, что и при простом растяжении возможны напряжения двух видов — нормальные σ и касательные τ. Из фор-

мул (7.1) и (7.2) следует, что по сечениям, перпендикулярным к оси растянутого стержня ($\alpha = 0$), возникают только нормальные напряжения ($\tau = 0$), а по сечениям, параллельным его оси ($\alpha = 90^\circ$) нет ни нормальных, ни касательных напряжений ($\sigma = 0$ и $\tau = 0$).

Такие площадки, по которым нет касательных напряжений, называются *главными*; нормальные напряжения, действующие по этим площадкам, называются *главными напряжениями*.

В теории упругости доказывается, что в каждой точке любого напряжённого тела можно провести три взаимно перпендикулярные главные площадки, через которые передаются три *главных* (нормальных) *напряжения*; из них два имеют экстремальные значения: одно является наибольшим нормальным напряжением, другое — наименьшим, третье — промежуточное. В каждой точке напряжённого тела можно выделить элементарный кубик, гранями которого служат *главные площадки*. Материал кубика растягивается или сжимается тремя взаимно перпендикулярными главными напряжениями, передающимися через эти грани (фиг. 72).



Фиг. 72.

В случае простого растяжения (§ 33) одна главная площадка в каждой точке перпендикулярна к оси стержня ($\alpha = 0^\circ$), а две другие параллельны этой оси ($\alpha = 90^\circ$). Так как по первой главной площадке нормальное напряжение не равно нулю ($\sigma_\alpha \neq 0$), а по двум другим оно обращается в нуль, то при простом растяжении и сжатии в каждой точке стержня из трёх главных напряжений только *одно* не равно нулю; оно направлено параллельно растягивающей силе и оси стержня. Такое напряжённое состояние материала называется *линейным*. Выделенный из стержня элемент растягивается лишь в одном направлении.

На практике встречаются случаи, когда элемент материала, в виде кубика, подвергается растяжению или сжатию по двум взаимно перпендикулярным направлениям или по всем трём (фиг. 72). Такой случай работы материала, когда *два* главных напряжения не равны нулю, называется *плоским напряжённым состоянием*.

Если же все три главных напряжения не равны нулю в рассматриваемой точке, то налицо *самый общий* случай распределения напряжений в материале — *объёмное напряжённое состояние*; элементарный кубик будет подвергаться растяжению или сжатию по всем трём взаимно перпендикулярным направлениям.

Главные напряжения условимся в дальнейшем обозначать буквами σ_1, σ_2, σ_3. Нумерацию главных напряжений установим таким образом, чтобы σ_1 обозначало *наибольшее* по *алгебраической* величине, а σ_3 — *наименьшее* напряжение. Сжимающие напряжения условимся, как и

прежде, считать отрицательными; поэтому, если, например, главные напряжения будут иметь значения $+1000$ *кг/см²*, -600 *кг/см²*, $+400$ *кг/см²*, то нумерация должна быть такой:

$$\sigma_1 = +1000 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_2 = +400 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_3 = -600 \text{ кг/см}^2;$$

условие $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ будет выполнено.

Таким образом, мы различаем *три* вида напряжённого состояния:

1) *объёмное напряжённое состояние* — когда все три главных напряжения *не равны* нулю (например, случай растяжения или сжатия по трём взаимно перпендикулярным направлениям);

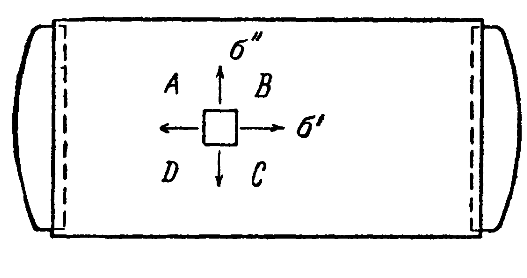
2) *плоское напряжённое состояние* — когда одно главное напряжение равно нулю (случай растяжения или сжатия по двум направлениям);

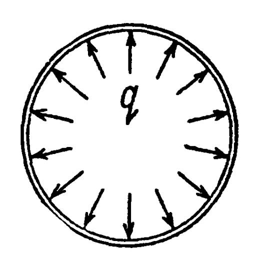
3) *линейное напряжённое состояние* — когда два главных напряжения равны нулю (случай растяжения или сжатия в одном направлении).

В § 33 мы рассмотрели распределение напряжений при линейном напряжённом состоянии; ниже будут приведены примеры плоского и объёмного напряжённых состояний и изучено распределение напряжений по различным площадкам в этих случаях.

§ 35. Примеры плоского и объёмного напряжённого состояний. Расчёт цилиндрического котла. Понятие о контактных напряжениях.

В качестве примера сложного напряжённого состояния рассмотрим напряжения, которым подвергается материал цилиндрической части тонкостенного резервуара (котла), внутри которого находится газ, пар или вода при давлении *q ат*, т. е. *q кг/см²*. Боковые стенки и днища резервуара подвергаются равномерно распределённому давлению q. Собственным весом жидкости в резервуаре пренебрегаем.





Фиг. 73.

Давление на днища будет стремиться разорвать цилиндрическую часть по поперечному сечению; давление же на боковые стенки вызовет в них стремление разорваться по образующим цилиндра. Таким образом, если мы выделим из цилиндрической части резервуара прямоугольный элемент *ABCD*, то этот элемент будет подвергаться растяжению в двух направлениях: напряжениями σ' по сечениям, перпендикулярным к образующим, и напряжениями σ'' по сечениям вдоль образующих (фиг. 73).

Вычислим эти напряжения. Обозначим через D диаметр цилиндрической части резервуара, l — её длину, t — толщину её стенок $\left(\text{будем считать, что } t \text{ мало по сравнению с } D\left(t<\frac{1}{20}D\right)\right)$.

Силы, действующие на днища и растягивающие цилиндрическую часть резервуара вдоль образующей, равны

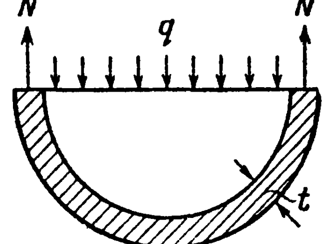
$$P=q\frac{\pi D^2}{4}.$$

Площадь, воспринимающая эти силы, представляет собой кольцо толщиной t и диаметром D (поперечное сечение цилиндрической части). Величина этой площади (как полоски шириной t и длиной πD)

$$F=t\pi D.$$

Отсюда напряжение равно

$$\sigma'=\frac{P}{F}=\frac{q\frac{\pi D^2}{4}}{t\pi D}=\frac{qD}{4t}.$$



Фиг. 74.

Напряжение σ'' мы найдём, разрезав резервуар диаметральной плоскостью и отбросив верхнюю часть (фиг. 74). На диаметральную поверхность жидкости или газа в оставленной части действует давление q. Оно уравновешивается силами N, растягивающими материал резервуара в направлении, перпендикулярном к образующим. Условие равновесия нижней части будет

$$qDl=2N,$$

отсюда

$$N=\frac{qDl}{2},$$

и напряжения σ'' равны

$$\sigma''=\frac{N}{tl}=\frac{qDl}{2tl}=\frac{qD}{2t}.$$

Напряжения по площадкам, параллельным образующим цилиндрической поверхности резервуара, в *два* раза больше, чем в направлении перпендикулярном. Элемент $ABCD$, вырезанный из стенки резервуара, испытывает растяжение по *двум взаимно перпендикулярным направлениям*. Напряжения σ' и σ'' являются главными, так как по соответствующим им сечениям отсутствуют, вследствие симметрии нагрузки и деформации элемента, касательные напряжения.

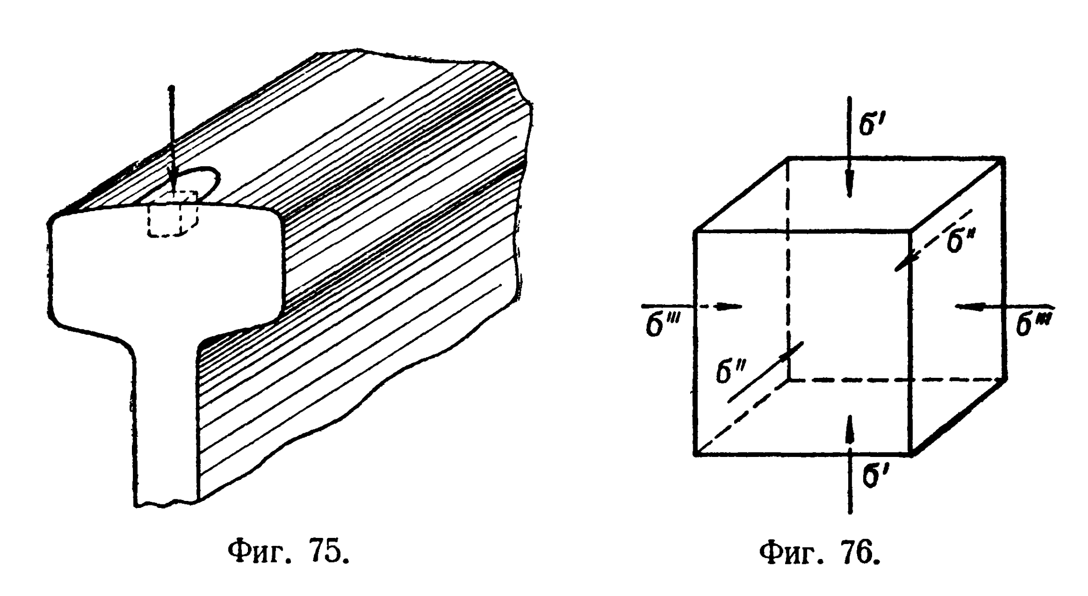
Третье главное напряжение, перпендикулярное к σ' и σ'', равно нулю. (Давлением газа по плоскости $ABCD$ и атмосферным давлением на поверхность стенки котла, соответствующим этому главному напряжению, пренебрегаем по его малости, сравнительно с σ' и σ''.) Таким образом, мы здесь имеем дело с *плоским* напряжённым состоянием. Применяя правило нумерации главных напряжений, имеем

$$\sigma_1=\sigma''=\frac{qD}{2t};\quad \sigma_2=\sigma'=\frac{qD}{4t};\quad \sigma_3=0. \tag{7.4}$$

Примером *объёмного* напряжённого состояния может служить работа материала при передаче давления в шариковом подшипнике от шарика на обойму или при передаче давления от колёс подвижного состава на рельсы.

Так как соприкасание поверхностей головки рельса и бандажа представляет собой соприкасание двух цилиндров разных радиусов с образующими, расположенными накрест, то эти две поверхности должны касаться друг друга в точке.

Нормальные напряжения, возникающие в точке соприкасания при передаче давления от одного тела на другое, называются контактными напряжениями.



Фиг. 75. Фиг. 76.

При передаче нагрузки материал рельса и бандажа у этой точки деформируется, и передача давления происходит по площадке соприкасания, имеющей эллиптическую форму. Величина этой площадки зависит от величины передаваемого давления и соотношения радиусов соприкасающихся поверхностей. Если мы в центре площадки давления вырежем из материала рельса маленький кубик (например, с ребром 1 *мм*), грани которого параллельны и перпендикулярны к оси рельса (фиг. 75), то на грани этого кубика будут действовать лишь нормальные сжимающие напряжения[1]). Таким образом (фиг. 76), в данном случае мы имеем дело с *тремя* взаимно перпендикулярными площадками, по которым действуют главные напряжения σ', σ'' и σ'''.

Появление боковых напряжений σ'' и σ''' объясняется тем, что под действием напряжений σ', перпендикулярных к площадке давления, материал выделенного нами кубика стремится раздаться в стороны и вызывает реакции σ'' и σ''' со стороны окружающего кубик материала рельса.

---

[1]) Вычисление этих напряжений приводится в курсах теории упругости; результаты соответствующих расчётов приведены в главе IX.

Подсчёты величин этих напряжений[1]) показывают, что они достигают в действительности весьма больших величин. Так, при соприкасании бегунка паровоза серии Л с рельсом мы получаем такие величины для σ', σ'', σ''': $\sigma' = 110$ *кг/мм*², $\sigma'' = 90$ *кг/мм*², $\sigma''' = 80$ *кг/мм*².

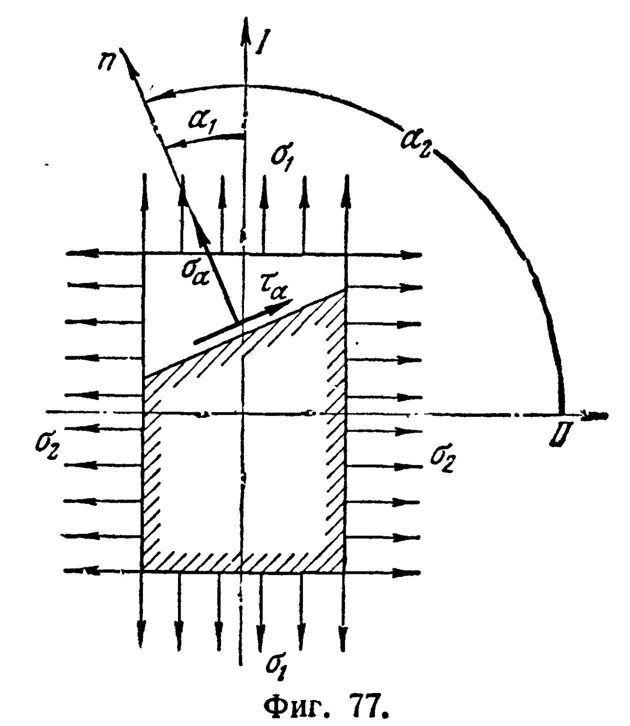
Правило нумерации главных напряжений в рассмотренном примере даёт:

$$\sigma_1 = \sigma''' = -80 \text{ кг/мм}^2;\ \sigma_2 = \sigma'' = -90 \text{ кг/мм}^2;\ \sigma_3 = \sigma' = -110 \text{ кг/мм}^2.$$

В данном случае мы сразу нашли такой кубик, по граням которого действуют *только* нормальные напряжения, т. е. сразу получили и величины главных напряжений и положение тех площадок, по которым они действуют. В общем случае по граням вырезанного кубика будут действовать и нормальные и касательные напряжения. Однако и тогда можно, меняя направление плоскостей, ограничивающих элементарный кубик, подыскать три взаимно перпендикулярные площадки, по которым действуют лишь нормальные, т. е. главные напряжения. Это самый общий случай распределения напряжений в материале — объёмное напряжённое состояние; все три главные напряжения не равны нулю.

§ 36. Напряжения при плоском напряжённом состоянии.

Для проверки прочности материала при плоском и объёмном напряжённом состояниях необходимо найти наибольшие значения нормальных и касательных напряжений.



Фиг. 77.

Начнём с плоского напряжённого состояния. Представим себе прямоугольный параллелепипед, на боковые грани которого действуют главные напряжения σ_1 и σ_2 (фиг. 77). Оба эти напряжения будем считать растягивающими. По фасадным граням элемента никаких напряжений нет; следовательно, третье главное напряжение равно нулю. Если одно из напряжений σ_1, σ_2 или оба будут сжимающими, то в дальнейшие формулы придётся вводить значение соответствующего напряжения со знаком минус и менять *нумерацию* главных напряжений в соответствии с условием § 34. Так, если одно из главных напряжений будет растягивающим, а другое сжи-

[1]) Н. М. Беляев, Вычисление наибольших расчётных напряжений при сжатии соприкасающихся тел, Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения, вып. 99 и 102, 1929.

мающим, то первое придётся называть σ_1, а второе σ_3; если оба напряжения будут сжимающими, то меньшее по абсолютной величине придётся назвать σ_2, а большее σ_3.

Поставим задачу отыскания наибольших нормальных и касательных напряжений по сечениям, *перпендикулярным к фасадным граням.*

Проведём такое сечение, нормаль к которому составит с направлением *I* угол α_1 (фиг. 77). С направлением *II* та же нормаль составит угол α_2. По этому сечению будут действовать и нормальные σ_α и касательные τ_α напряжения, зависящие и от σ_1 и от σ_2. Величину их мы получим, рассматривая действие σ_1 и σ_2 отдельно и складывая результаты. Та доля нормальных напряжений, которую вызывают σ_1, выразится по формуле (7.1) так: $\sigma_1 \cos^2 \alpha_1$; другая же часть напряжений σ_α, вызванная σ_2, выразится по той же формуле в виде $\sigma_2 \cos^2 \alpha_2$. Полное нормальное напряжение σ_α равно

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 (\alpha_1 + 90^\circ)$$

или

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1. \tag{7.5}$$

Таким же рассуждением при помощи формулы (7.2) находим величину касательных напряжений τ_α по проведённой площадке:

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} [\sigma_1 \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \sin 2\alpha_2] = \frac{1}{2} [\sigma_1 \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \sin 2 (\alpha_1 + 90^\circ)]$$

или

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_1. \tag{7.6}$$

В этих формулах α_1 — угол, отсчитанный против часовой стрелки от направления оси *I* (напряжения σ_1) до нормали к рассматриваемому сечению. Знаки для σ_α и τ_α, а также для углов α_1 и α_2 будем принимать по правилу, установленному выше, в § 33.

В дальнейшем в формулах для σ_α и τ_α угол α_1 будем обозначать через α, отсчитывая этот угол всегда от направления *наибольшего* (алгебраически) главного напряжения *против* часовой стрелки.

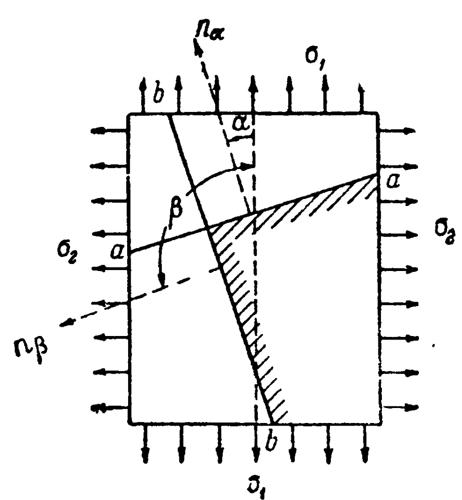
Пользуясь формулами (7.5) и (7.6) для напряжений по площадке $a - a$ (фиг. 78), легко находим напряжения по площадке $b - b$, ей перпендикулярной, имеющей нормаль n_β, составляющую с направлением наибольшего главного напряжения угол $\beta = \alpha + 90^\circ$:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\beta &= \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta = \sigma_1 \cos^2 (\alpha + 90^\circ) + \sigma_2 \sin^2 (\alpha + 90^\circ), \\ \sigma_\beta &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \end{aligned}\right\} \tag{7.5'}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_\beta &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin (2\alpha + 180^\circ), \\ \tau_\beta &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{7.6'}$$

Из полученных формул выясняются свойства напряжений, действующих по взаимно перпендикулярным площадкам. Для нормальных напряжений имеем:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha,$$
$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha.$$



Фиг. 78.

Складывая, получим:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const.}, \qquad (7.7)$$

т. е. *сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам постоянна и равна сумме главных напряжений.*

Для касательных напряжений, сопоставляя формулы (7.6) и (7.6′), получим:

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \qquad (7.8)$$

Следовательно, *касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку.* Это свойство обычно называют *«законом парности касательных напряжений»*, причём оно имеет место во всех случаях, когда имеются касательные напряжения.

Из формул (7.5) и (7.6) видно, что величины нормальных и *касательных напряжений* по любой площадке зависят от угла наклона этой площадки.

Чтобы найти наибольшее значение нормального напряжения, исследуем выражение (7.5) на maximum. Взяв производную и приравняв её нулю, получим:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_2 \sin\alpha \cos\alpha = 0$$

или

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = 0. \qquad (7.9)$$

Сопоставляя полученное выражение (7.9) с формулой (7.6), видим, что условие максимума для σ_α совпадает с условием равенства нулю касательных напряжений по соответствующим площадкам. Из этого же выражения следует, что $\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha$ получит наибольшее значение либо при $\alpha = 0$, либо при $\alpha = 90^\circ$. Так как $\sigma_1 > \sigma_2$, то:

$$\max \sigma_\alpha = \sigma_1 \qquad (\text{при } \alpha = 0),$$
$$\min \sigma_\alpha = \sigma_2 \qquad (\text{при } \alpha = 90^\circ),$$

т. е. *наибольшее и наименьшее нормальные напряжения в данной точке* — это *главные напряжения* σ_1 *и* σ_2, *действующие по взаимно перпендикулярным площадкам, свободным от касательных напряжений.*

Наибольшее значение касательных напряжений, как это видно из формулы (7.6), будет:

$$\max \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (\text{при } \sin 2\alpha = 1, \text{ т. е. при } \alpha = 45^\circ). \quad (7.10)$$

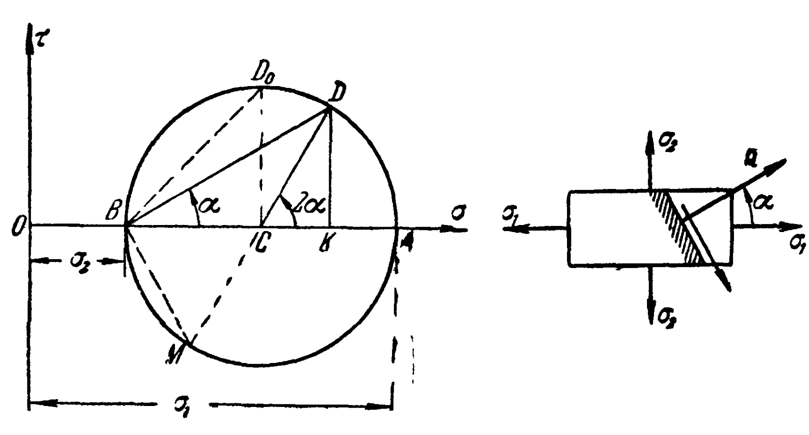
Следовательно, *наибольшие* касательные напряжения равны полуразности главных напряжений и действуют по площадкам, наклонённым к главным площадкам на угол 45° и перпендикулярным к плоскости чертежа. По площадкам, параллельным σ_2, наибольшее касательное напряжение будет:

$$\max \tau = \frac{\sigma_1}{2}. \quad (7.10')$$

§ 37. Графическое определение напряжений (круг Мора).

Вычисление σ_α и τ_α по формулам (7.5) и (7.6) может быть заменено графическим построением (фиг. 79).

Возьмём систему прямоугольных координат с осями σ и τ. Положительную ось σ направим вправо. Отложим на оси σ отрезки OA и OB, изображающие в определённом масштабе числовые величины напряжений σ_1 и σ_2 (ось σ удобно располагать параллельно наибольшему главному напряжению σ_1).



Фиг. 79.

На фиг. 79 оба эти напряжения приняты растягивающими и отложены на оси σ в положительном направлении. Если бы одно или оба эти напряжения были сжимающими, мы отложили бы их в противоположном направлении. Построим на отрезке AB, как на диаметре, круг с центром C, который назовём *кругом напряжений*. Тогда для нахождения нормального σ_α и касательного напряжения τ_α по площадке, нормаль к которой составляет с наибольшим главным напряжением σ_1 угол α, надо построить при точке C центральный угол 2α, откладывая его положительные значения от оси σ *против* часовой стрелки. Точка D круга напряжений будет *соответствовать* выбранной площадке; её координаты OK и DK соответственно равны σ_α и τ_α. Это легко доказать. Из чертежа находим радиус круга напряжений:

$$CD = AC = BC = \frac{AB}{2} = \frac{OA - OB}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2};$$

из прямоугольного треугольника KDC имеем:

$$DK = CD \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \tau_\alpha.$$

Далее:

$$OK = OB + BC + CK = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha =$$

$$= \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}(1 + \cos 2\alpha) = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} 2\cos^2\alpha =$$

$$= \sigma_2 + \sigma_1 \cos^2\alpha - \sigma_2 \cos^2\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha = \sigma_\alpha.$$

Таким образом, координаты точек окружности определяют напряжения. Величины σ_α измеряются отрезками по оси σ. Положительные σ_α отложены в положительном направлении оси σ. Величины τ_α измеряются отрезками, параллельными оси τ. Положительные τ_α направлены вверх, так как при принятых нами условиях значениям α от 0 до 90° соответствуют положительные величины τ_α; это же видно и из формулы

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha,$$

в которой за σ_1 выбрано *наибольшее* из главных напряжений.

Определив построением круга напряжения σ_α и τ_α, изобразим их на чертеже выделенного элемента, учитывая *знаки* этих напряжений (фиг. 79). Напомним, что мы условились отсчитывать угол α, определяющий положение внешней нормали к рассматриваемой площадке, всегда от линии действия *наибольшего* (алгебраически) главного напряжения. Совместим поэтому линию действия наибольшего главного напряжения σ_1 с осью σ на круге; тогда линия BD, наклонённая к оси σ под углом α, будет параллельна нормали к рассматриваемой площадке, а значит, параллельна σ_α; линия BM будет параллельна τ_α.

Как видно из фиг. 79, наибольшее значение касательных напряжений равно отрезку CD_0, т. е. радиусу круга напряжений

$$_{\max}\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2};$$

соответствующий угол 2α равен 90° и угол $\alpha = 45°$. В круге напряжений величина $_{\max}\tau_\alpha$ изображается ординатой CD_0, абсциссой для которой служит $OC = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$, т. е. на той площадке, где $\tau_\alpha = \tau_{\max}$, нормальное напряжение является средним.

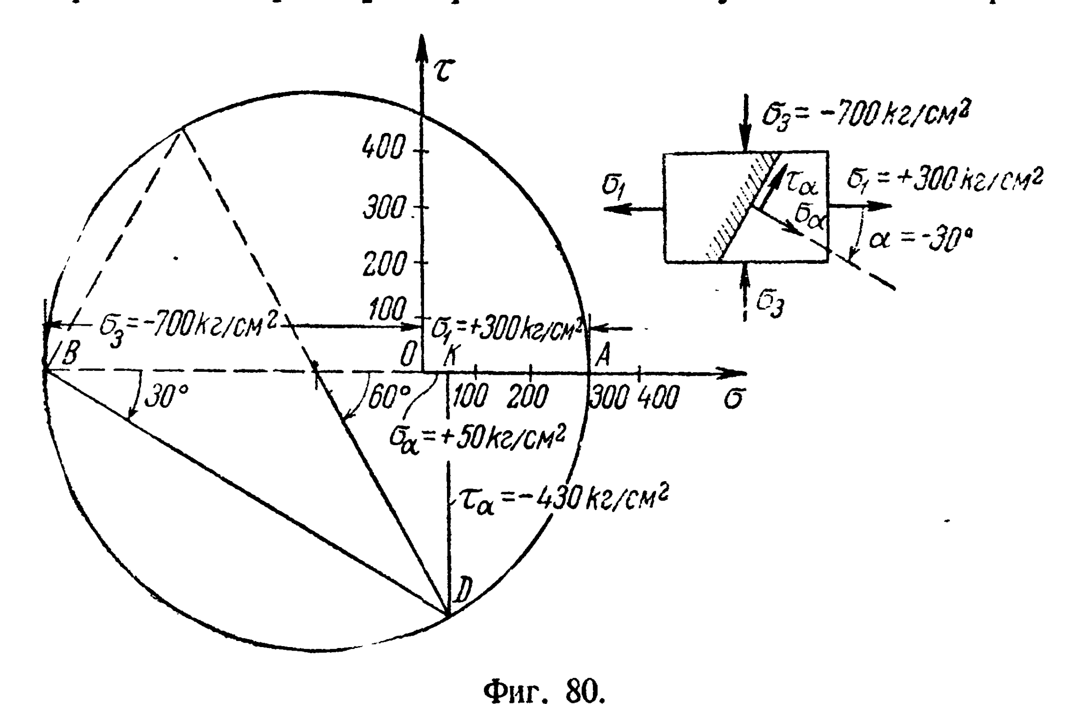
Точно так же из фиг. 79 видно, что *наибольшее* нормальное напряжение изображается отрезком OA и равно σ_1, а *наименьшее* — отрезком OB и равно σ_2. Отсюда следует, что величины нормальных напряжений по любой из рассматриваемых площадок с углом α заключаются между значениями главных напряжений σ_1 и σ_2.

Так, зная главные напряжения для плоского напряжённого состояния, мы можем с помощью круга напряжений всесторонне изучить напряжённое состояние материала в точке.

Пример 20. Графически найдём напряжения σ_α и τ_α для площадки с углом $\alpha = -30°$; главные напряжения равны $\sigma_3 = -700$ *кг/см*² и $\sigma_1 = +300$ *кг/см*². Построение дано на фиг. 80:

$$\sigma_\alpha = +50 \text{ кг/см}^2; \quad \tau_\alpha = -430 \text{ кг/см}^2.$$

Пользуясь кругом напряжений, можно найти по известным главным напряжениям σ_1 и σ_2 напряжения по двум взаимно перпендику-



Фиг. 80.

лярным площадкам $a - a$ и $b - b$, нормали к которым (фиг. 81) составляют углы α и β с направлением наибольшего главного напряжения σ_1.

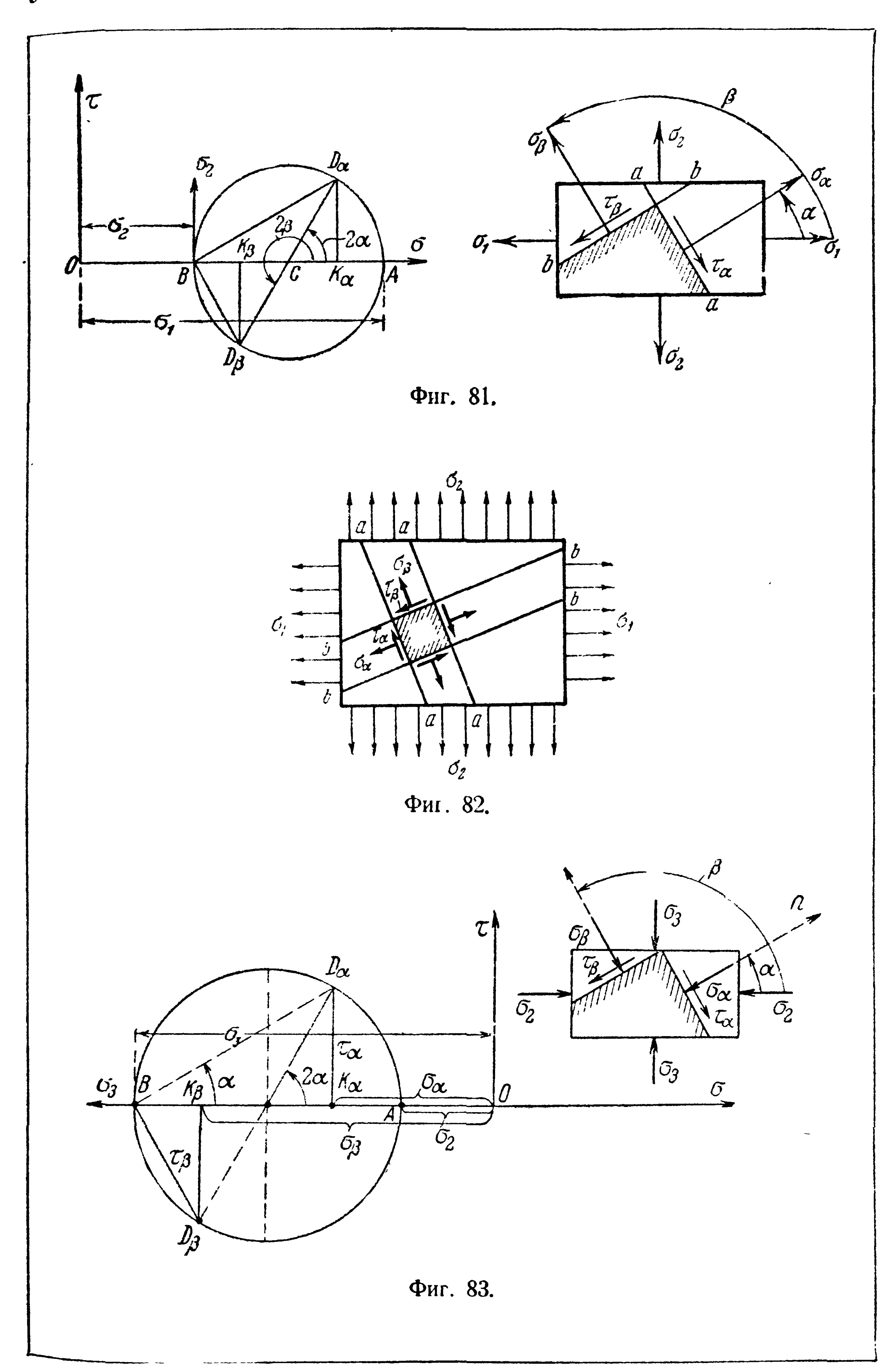
В круге напряжений (фиг. 81) при точке C построим угол 2α. Точка D_α будет соответствовать площадке $a - a$, а отрезки $D_\alpha K_\alpha$ и OK_α представят собой напряжения τ_α и σ_α по этой площадке.

Для нахождения напряжений по площадке $b - b$ надо построить угол 2β, т. е. прибавить 180° к углу 2α. Для этого надо лишь продолжить радиус CD_α; точка D_β соответствует площадке $b - b$. Напряжения τ_β и σ_β представляются отрезками $D_\beta K_\beta$ и OK_β. Из чертежа ясно, что $\tau_\beta = -\tau_\alpha$, а

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}.$$

Напряжения, действующие по граням элемента, вырезанного плоскостями a и плоскостями b, показаны на фиг. 81 справа и на фиг. 82.

Совмещая на круге напряжений линию действия наибольшего (алгебраически) главного напряжения σ_1 с осью σ (фиг. 81),



Фиг. 81.

Фиг. 82.

Фиг. 83.

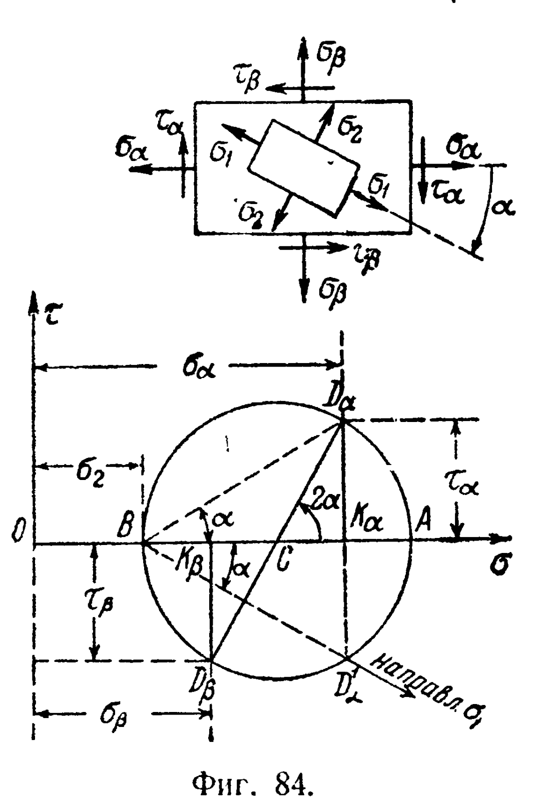
получаем, что линия BD_α, соединяющая *левую крайнюю точку* круга с точкой D_α, параллельна напряжению σ_α; линия BD_β — напряжению σ_β; стрелки поставлены в соответствии с полученными знаками напряжений.

На фиг. 83 изображено построение для случая, когда оба главных напряжения сжимающие.

§ 38. Нахождение главных напряжений при помощи круга.

Иногда приходится решать задачу, обратную рассмотренной в предыдущем параграфе, т. е. по напряжениям σ_α, τ_α и σ_β, τ_β находить главные напряжения. Проще всего это сделать, пользуясь кругом напряжений.

Пусть (фиг. 84) мы знаем нормальные и касательные напряжения по площадкам α и β, перпендикулярным к плоскости чертежа и составляющим между собой прямой угол. Нормальные напряжения обозначим σ_α и σ_β, а касательные τ_α и τ_β; при этом $\tau_\alpha = -\tau_\beta$. Условимся значки α и β ставить так, чтобы $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$ (алгебраически). Примем для определённости, что $\sigma_\alpha > \sigma_\beta > 0$ и $\tau_\alpha > 0$.



Фиг. 84.

Нанесём напряжения σ_α, σ_β, τ_α и τ_β на систему координат искомого круга напряжений (фиг. 84):

$$\sigma_\alpha = OK_\alpha; \quad \sigma_\beta = OK_\beta; \quad \tau_\alpha = K_\alpha D_\alpha;$$
$$\tau_\beta = K_\beta D_\beta; \quad \overline{K_\alpha D_\alpha} = -\overline{K_\beta D_\beta}.$$

Так как точки D_α и D_β, соответствующие взаимно перпендикулярным площадкам a и b, должны лежать на противоположных концах диаметра круга, то точка пересечения линии $D_\alpha D_\beta$ с осью σ даст центр круга C. Описывая из точки C круг радиусом CD_α или CD_β, получим на оси σ отрезки OA и OB, изображающие главные напряжения: $OA = \sigma_1$ и $OB = \sigma_2$.

Направление σ_α на круге напряжений изображается прямой BD_α, наклонённой к оси σ на положительный угол α. Следовательно, чтобы перейти в круге напряжений от линии σ_1 к линии σ_α, надо отложить угол α *против часовой стрелки*, двигаясь от точки A к точке D_α. В нашем примере известным считается направление σ_α. Значит, чтобы на чертеже *рассматриваемого элемента* изобразить искомое направление σ_1, надо от направления σ_α отложить угол α в обратную сторону, *по часовой стрелке*; относительное располо-

жение напряжений σ_1 и σ_α, изображаемых на чертеже круга линиями OA и BD'_α, должно быть сохранено и на чертеже элемента.

Можно дать и на круге напряжений истинное направление главного напряжения σ_1, совпадающее с получаемым, как сейчас описано, на чертеже элемента; для этого нужно от оси σ, параллельной направлению σ_α, отложить угол α из крайней левой точки B круга по часовой стрелке, иначе говоря, снести точку D_α в точку D'_α. Направление BD'_α теперь совпадёт с направлением σ_1, а направление σ_2 будет к нему перпендикулярно. При изображении главных напряжений (в нашем примере σ_1 и σ_2) необходимо помнить об их *знаках*, полученных при построении круга, а также соблюдать правила нумерации главных напряжений.

Заметим, что в рассматриваемых задачах при плоском напряжённом состоянии третье главное напряжение равно нулю. В соответствии с этим, если при построении круга оба главных напряжения получатся положительными (фиг. 84), то большее будет σ_1, а меньшее σ_2; если одно положительное, а другое отрицательное, то первое будет σ_1, а второе σ_3; наконец, если оба отрицательны, то большее по абсолютной величине будет σ_3, а меньшее σ_2.

Величина угла α определяется формулами (фиг. 84):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= -\frac{D'_\alpha K_\alpha}{CK_\alpha} = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{D'_\alpha K_\alpha}{BK_\alpha} = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_2} = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.11)$$

Знак минус ставится потому, что при положительных значениях σ_α и τ_α угол α (угол поворота направления σ_α в главное направление) отсчитывается *по часовой стрелке*.

Пользуясь фиг. 84, можно получить формулы для вычисления главных напряжений, изображаемых отрезками OA и OB, при плоском напряжённом состоянии. Из чертежа имеем

$$\overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA} \quad \text{и} \quad \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{CB}.$$

Далее:

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}; \quad \overline{CK_\alpha} = \overline{CK_\beta} = \frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}.$$

Радиусы круга напряжений $CA = CB$, равные $CD_\alpha = CD_\beta$, равны:

$$CA = CB = CD_\alpha = \sqrt{CK_\alpha^2 + K_\alpha D_\alpha^2} = \sqrt{\frac{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2}{4} + \tau_\alpha^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \overline{OA} \\ \sigma_2 &= \overline{OB} \end{aligned}\right\} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right]. \qquad (7.12)$$

В практике часто приходится встречаться с такими случаями плоского напряжённого состояния, когда $\sigma_\beta = 0$. Тогда формулы для главных напряжений примут вид:

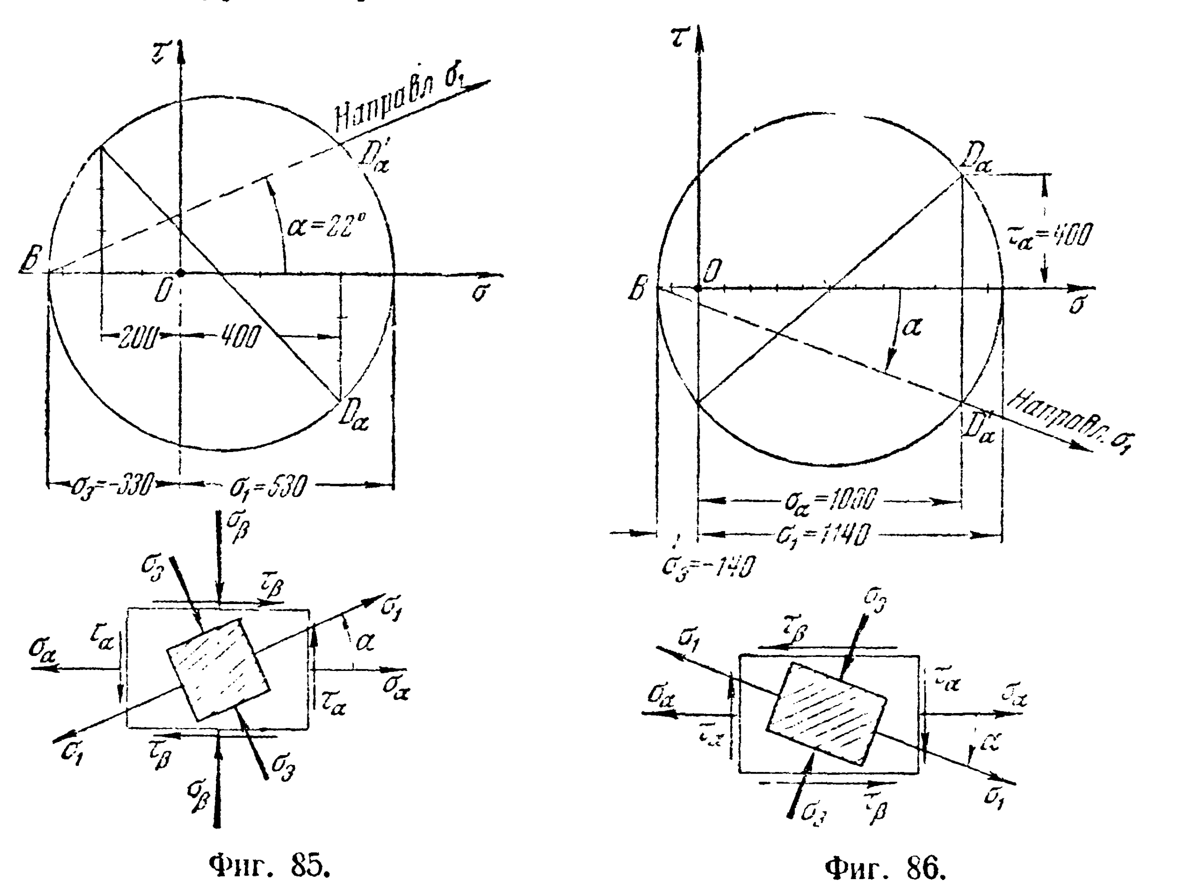
$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \\ \sigma_3 &= \end{aligned}\right\} \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha \pm \sqrt{\sigma_\alpha^2 + 4\tau_\alpha^2}\right]. \tag{7.13}$$

Здесь наименьшее главное напряжение обозначено через σ_3, так как оно отрицательно (поскольку подкоренное выражение больше σ_α).

Угол наклона 1-го главного напряжения к оси σ определяется формулами, вытекающими из (7.11):

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg} 2\alpha &= -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha} \\ \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha &= -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_1}.\end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

Ниже на примерах показано нахождение главных напряжений с помощью круга напряжений.



Фиг. 85. Фиг. 86.

Пример 21. Дано: $\sigma_\alpha = +400$ *кг/см²*; $\tau_\alpha = -300$ *кг/см²*; $\sigma_\beta = -200$ *кг/см²*; $\tau_\beta = +300$ *кг/см²*;

На фиг. 85 показано нахождение величин и направлений главных напряжений: $\sigma_1 = +530$ *кг/см²*; $\sigma_3 = -330$ *кг/см²*; $\alpha = 22°$ (между σ_α и σ_1).

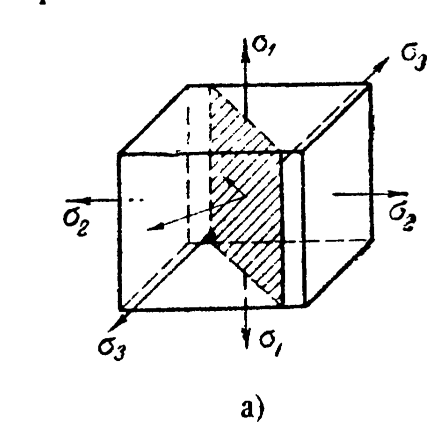
Пример 22. Дано: $\sigma_\alpha = 1000$ *кг/см²*; $\tau_\alpha = 400$ *кг/см²*; $\sigma_\beta = 0$, $\tau_\beta = -400$ *кг/см²*. Построение показано на фиг. 86. $\sigma_1 = 1140$ *кг/см²*; $\sigma_3 = -140$ *кг/см²*.

§ 39. Нахождение наибольших напряжений для объёмного напряжённого состояния.

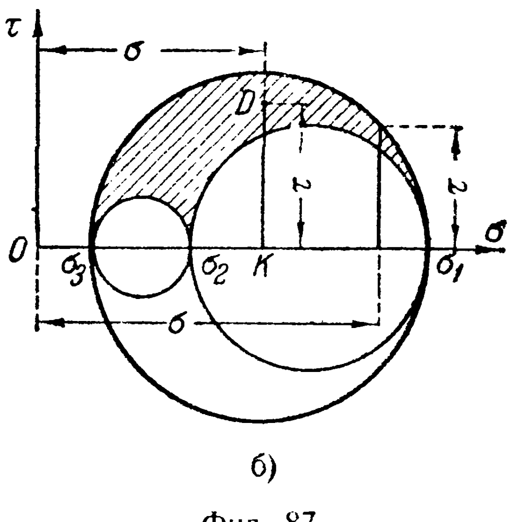
Для случая объёмного напряжённого состояния напряжения по любой площадке можно представить также графически.

Пусть мы имеем выделенный из тела элемент кубической формы, на грани которого действуют три главных напряжения: σ_1, σ_2, σ_3 (фиг. 87). Поставим задачу нахождения нормального и касательного напряжений по любой площадке, пересекающей выделенный кубик.

Сначала будем искать эти напряжения по площадкам, *параллельным* одному из главных напряжений, например σ_1. На фиг. 87, *а* эта площадка заштрихована.



а)



б)

Фиг. 87.

Как мы видели выше (§ 34), главное напряжение, параллельное проведённой площадке, не вызывает по ней ни нормальных, ни касательных напряжений. Поэтому напряжения по рассматриваемым площадкам будут зависеть лишь от σ_2 и σ_3 — для них мы будем иметь дело с *плоским* напряжённым состоянием. Тогда этим площадкам будут соответствовать точки круга напряжений, построенного на главных напряжениях σ_2 и σ_3 (фиг. 87, *б*).

Точно так же напряжения по площадкам, направленным параллельно σ_2, будут изображаться координатами точек круга, построенного на напряжениях σ_1 и σ_3; для площадок, параллельных σ_3, — на напряжениях σ_1 и σ_2.

Таким образом, координаты точек трёх кругов напряжений (фиг. 87, *б*) изображают нормальные и касательные напряжения по сечениям кубика, параллельным одному из главных напряжений.

Что же касается площадок, пересекающих *все три оси* главных напряжений, то в теории упругости показано, что для них напряжения σ и τ изображаются координатами точек D заштрихованной на фиг. 87, *б* площади.

Значения этих напряжений могут быть вычислены по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3, \qquad (7.15)$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}. \qquad (7.16)$$

Здесь α_1, α_2 и α_3 — углы, составленные нормалью к площадке с направлениями соответствующих главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3.

Из фиг. 87 ясно, что в случае объёмного напряжённого состояния наибольшее и наименьшее нормальные напряжения равны соответственно наибольшему и наименьшему главным напряжениям.

Наибольшее касательное напряжение равно радиусу наибольшего круга, следовательно, полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений. Оно действует по площадкам, наклонённым под углом 45° к направлению этих главных напряжений, причём нормальные напряжения на таких площадках равны полусумме наибольшего и наименьшего главных напряжений ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

Таким образом, в общем случае напряжённого состояния материала, когда в рассматриваемой точке все три главных напряжения не равны нулю, получаем:

$$_{\max}\sigma_\alpha = \sigma_1; \quad _{\min}\sigma_\alpha = \sigma_3; \quad _{\max}\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \tag{7.17}$$

По площадкам, параллельным одному из главных напряжений и наклонённым к двум другим на угол 45°, касательные напряжения будут: $_{\max}\tau$ по формуле (7.17), далее

$$\tau_{1,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{2,3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}. \tag{7.17'}$$

§ 40. Вычисление деформаций при плоском и объёмном напряжённом состояниях.

При проверках прочности элемента (фиг. 87), на грани которого действуют напряжения σ_1, σ_2, σ_3, нам придётся столкнуться с вопросом о величинах соответствующих деформаций. Называя ребро, параллельное главному напряжению σ_1, первым, а рёбра, параллельные главным напряжениям σ_2 и σ_3, вторым и третьим, определим относительные продольные деформации элемента в направлении этих рёбер, отдельно рассматривая влияние каждого из напряжений и складывая результаты.

Под действием напряжений σ_1 элемент в направлении первого ребра получит относительное удлинение, равное

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}.$$

В то же время по отношению к напряжениям σ_2 и σ_3 первое ребро является *поперечным* размером, а потому под действием напряжений σ_2 и отдельно σ_3 элемент в направлении первого ребра испытывает относительные укорочения, равные (см. § 9):

$$\varepsilon_1'' = -\mu\frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_1''' = -\mu\frac{\sigma_3}{E}.$$

Полная относительная деформация элемента в направлении первого ребра выразится суммой

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}.$$

Подобные же выражения получим и для деформаций в двух других направлениях; в результате имеем:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E}\right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_3}{E}\right), \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_1}{E}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (7.18)$$

Если какие-либо из напряжений σ_1, σ_2, σ_3 будут сжимающими, то соответствующие числовые значения их необходимо ввести в формулы (7.18) со знаком минус.

Из формулы (7.18) можно сейчас же получить выражения для случая растяжения или сжатия по двум направлениям, — тогда одно из главных напряжений следует положить равным нулю. Например, для случая, показанного на фиг. 81, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E}, \\ \varepsilon_3 &= -\mu\frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.19)$$

Вычислим изменение объёма прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными a, b и c, в общем случае напряжённого состояния. До деформации объём его равен $V_0 = abc$. После деформации, вследствие изменения длины рёбер, объём его станет

$$V_1 = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c),$$

или, пренебрегая произведениями малых деформаций:

$$V_1 = abc + ab \cdot \Delta c + ac \cdot \Delta b + bc \cdot \Delta a = V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Относительное изменение объёма равно:

$$\theta = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \qquad (7.20)$$

Подставляя в эту формулу вместо ε_1, ε_2, ε_3 их значения из формул (7.18), получим:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \qquad (7.21)$$

Заметим, что если коэффициент *Пуассона* μ *равен* $\frac{1}{2}$, *то относительное изменение объёма равно нулю.* Это мы уже получили в § 9 для случая линейного напряжённого состояния.

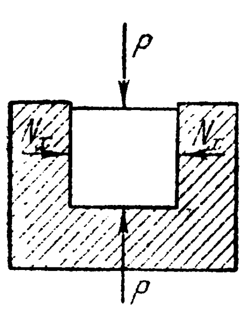
Если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, то

$$\theta = \frac{(1-2\mu)}{E} 3\sigma.$$

Величину $\frac{E}{3(1-2\mu)}$ называют модулем объёмной деформации и обозначают буквой K. Тогда, вводя это обозначение в (7.21), находим:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3K}. \qquad (7.22)$$

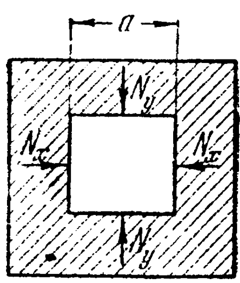
Мы видим, что изменение объёма зависит лишь от суммы главных напряжений, а не от их соотношения. Поэтому кубик получит одно и то же изменение объёма, будут ли по его граням действовать различные по величине главные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 или *одинаковые* напряжения:



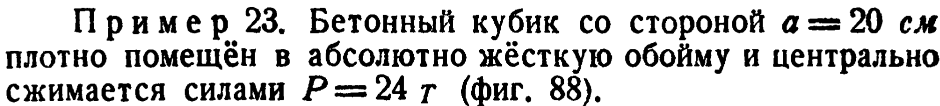
$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3};$$

в последнем случае все рёбра кубика получат *одинаковую* деформацию:

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3K \cdot 3} = \frac{\sigma_n}{3K}. \qquad (7.23)$$

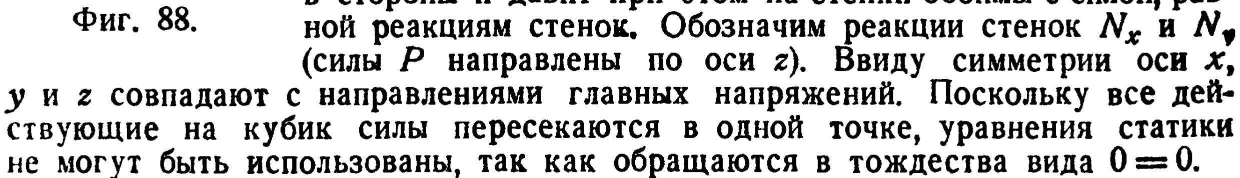


Фиг. 88.

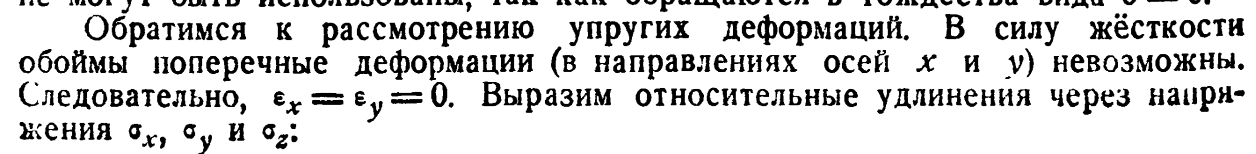


Пример 23. Бетонный кубик со стороной $a = 20$ *см* плотно помещён в абсолютно жёсткую обойму и центрально сжимается силами $P = 24$ *т* (фиг. 88).

Найти давление на стенки обоймы и напряжения в бетоне. Коэффициент Пуассона для бетона $\mu = 0{,}18$.



При продольном сжатии бетона он стремится раздаться в стороны и давит при этом на стенки обоймы с силой, равной реакциям стенок. Обозначим реакции стенок N_x и N_y (силы P направлены по оси z). Ввиду симметрии оси x, y и z совпадают с направлениями главных напряжений. Поскольку все действующие на кубик силы пересекаются в одной точке, уравнения статики не могут быть использованы, так как обращаются в тождества вида $0 = 0$.



Обратимся к рассмотрению упругих деформаций. В силу жёсткости обоймы поперечные деформации (в направлениях осей x и y) невозможны. Следовательно, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$. Выразим относительные удлинения через напряжения σ_x, σ_y и σ_z:

$$\varepsilon_x = -\frac{\sigma_x}{E} + \mu\frac{\sigma_y}{E} + \mu\frac{\sigma_z}{E} = 0,$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\sigma_y}{E} + \mu\frac{\sigma_x}{E} + \mu\frac{\sigma_z}{E} = 0.$$

Здесь

$$\sigma_x = \frac{N_x}{a^2}, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{a^2} \quad \text{и} \quad \sigma_z = \frac{P}{a^2}.$$

Решая уравнения деформаций совместно, найдём:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z.$$

Подставляя значения, найдём:

$$N_x = N_y = \frac{\mu}{1-\mu} \cdot P \quad \text{или} \quad N_x = N_y = \frac{0{,}18}{1-0{,}18} \cdot 24 = 5{,}28 \text{ т}.$$

Напряжения в бетоне будут:

$$\sigma_x = \sigma_1 = -\frac{N_x}{a^2} = -\frac{5280}{20^2} = -13{,}2 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_y = \sigma_2 = -13{,}2 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_z = \sigma_3 = -\frac{P}{a^2} = -\frac{24\,000}{20^2} = -60 \text{ кг/см}^2.$$

§ 41. Потенциальная энергия упругой деформации при сложном напряжённом состоянии.

Потенциальной энергией деформации называется энергия, накапливаемая в материале в результате упругой деформации, вызванной действием внешних сил.

Для вычисления потенциальной энергии, накопленной упругой системой, можно воспользоваться законом сохранения энергии.

Рассмотрим сначала случай простого растяжения (фиг. 89). Если мы будем нагружать стержень статически, путём постепенного подвешивания очень малых грузов ΔP, то при добавлении каждого такого груза подвешенная часть нагрузки опустится и потенциальная энергия её уменьшится, а потенциальная энергия деформации растянутого стержня возрастёт.

При медленном, постепенном возрастании нагрузки, скорость перемещения свободного конца стержня будет весьма мала. Поэтому силами инерции перемещающихся масс можно пренебречь, и, значит, можно считать, что деформация стержня не будет сопровождаться изменением кинетической энергии системы.

Фиг. 89.

При этих условиях потенциальная энергия груза при его опускании преобразуется в потенциальную энергию упругой деформации стержня (рассеиванием энергии за счёт тепловых и электромагнитных явлений, сопровождающих упругую деформацию, — пренебрегаем). Таким образом, упругую систему при статическом действии сил можно рассматривать как своеобразную машину, преобразующую один вид потенциальной энергии в другой.

Так как количество потенциальной энергии, потерянной грузом, численно равно работе, произведённой им при опускании, то задача об определении потенциальной энергии деформации сводится к вычислению работы внешних сил. При простом растяжении (§ 11) для работы внешних сил было получено

$$A = \frac{P\,\Delta l}{2}, \tag{3.1}$$

значит, и потенциальная энергия растяжения $\left(\text{при } \Delta l = \frac{Pl}{EF}\right)$

$$U = A = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{\sigma^2 F l}{2E}. \tag{7.24}$$

Количество потенциальной энергии, накапливаемое в единице объёма (3.2):

$$u = a = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma\varepsilon}{2}. \tag{7.25}$$

Теперь перейдём к определению количества потенциальной энергии, накапливаемой в единице объёма материала, находящегося в условиях сложного (объёмного и плоского) напряжённого состояния. Пользуясь принципом независимости и сложения действия сил и предполагая постепенное возрастание главных напряжений, подсчитаем потенциальную энергию, как сумму энергий, накапливаемых в единице объёма материала под действием каждого из главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 по формуле (7.25)

$$u = a = \frac{\sigma_1\varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2\varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3\varepsilon_3}{2},$$

где ε_1, ε_2 и ε_3 — относительные удлинения, вычисляемые по формулам (7.18). Следовательно, удельная энергия деформации в этом случае будет:

$$u = \frac{1}{2}\left[\sigma_1\left(\frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}\right) + \sigma_2\left(\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}\right) + \right.$$
$$\left. + \sigma_3\left(\frac{\sigma_3}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E}\right)\right]$$

или, после раскрытия скобок,

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right]. \tag{7.26}$$

Таким образом, *полная энергия* деформации, накапливаемая в единице объёма материала (кубик со сторонами, равными единице длины), может быть определена по формуле (7.26). Эта энергия может рассматриваться как состоящая из двух частей: 1) энергии u_v, накапливаемой за счёт изменения объёма v рассматриваемого кубика (т. е. одинакового изменения всех его размеров без изменения кубической формы) и 2) энергии $u_ф$, связанной с изменением формы кубика (т. е. энергии, расходуемой на превращение кубика в параллелепипед).

Такое разделение потенциальной энергии на две части оказывается удобным при дальнейшем рассмотрении вопроса о прочности материала при объёмном напряжённом состоянии.

Подсчитаем величину обеих составляющих удельной потенциальной энергии. Выше было показано (§ 40), что при одинаковой деформации рёбер кубика, т. е. при изменении *только объёма*, относительное удлинение каждого ребра равно (формула 7.23):

$$\varepsilon_n = \frac{\sigma_n}{3K},$$

где $\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$, а объёмный модуль упругости $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$.

Тогда энергия изменения объёма будет:

$$u_v = 3 \cdot \frac{\sigma_n \varepsilon_n}{2} = \frac{\sigma_n^2}{2K} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18K}$$

или

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (7.27)$$

Потенциальная энергия, соответствующая изменению формы выделенного элемента материала, теперь найдётся как разность:

$$u_\phi = u - u_v =$$
$$= \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] - \frac{1-2\mu}{6E}[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]^2.$$

Произведя вычисления, получим:

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3). \quad (7.28)$$

При простом растяжении, когда $\sigma_1 = \sigma = \frac{P}{F}$, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = 0$, удельная потенциальная энергия, связанная с изменением объёма элементарного кубика

$$u_v = \frac{(1-2\mu)\sigma^2}{6E}, \quad (7.29)$$

а потенциальная энергия формоизменения

$$u_\phi = \frac{(1+\mu)\sigma^2}{3E}. \quad (7.30)$$

Разумеется, сумма их даёт полную удельную энергию растяжения:

$$u = u_v + u_\phi = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

ГЛАВА VIII.

ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ.

§ 42. Понятие о теориях прочности.

В § 33 был поставлен вопрос о проверке прочности материала при линейном напряжённом состоянии, при простом растяжении, когда главные напряжения имеют значения

$$\sigma_1 = \frac{P}{F}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0,$$

или при сжатии коротких стержней, когда

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_3 = -\frac{P}{F}.$$

В этом случае проверка прочности производится по условиям

$$\underset{\text{(растяжение)}}{\sigma_1 \leqslant [\sigma]} \quad \text{или} \quad \underset{\text{(сжатие)}}{|\sigma_3| \leqslant [\sigma]}.$$

Буквой $[\sigma]$ обозначена допускаемая величина напряжений при растяжении или сжатии. Для большинства пластичных материалов эти значения одинаковы, для хрупких — различны.

В § 17 указано, что допускаемое напряжение определяется с таким расчётом, чтобы был обеспечен известный запас k против наступления опасного состояния:

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{k},$$

где σ^0 — напряжение, характеризующее опасное состояние. При статической нагрузке для пластичного материала достижение такого состояния характеризуется появлением больших остаточных деформаций, а для хрупкого — появлением трещин, разрушением материала. Тогда в первом случае $\sigma^0 = \sigma_т$, а во втором $\sigma^0 = \sigma_в$.

При *линейном* напряжённом состоянии эти величины получаются непосредственно из лабораторных опытов на растяжение или сжатие. Подобный вид действия сил легко осуществить в лаборатории и можно непосредственно установить величину предела текучести и предела прочности для испытываемого материала.

Рассмотрим теперь, как производить проверку прочности в тех случаях, когда два или все три главных напряжения σ_1, σ_2, σ_3 *не равны* нулю.

В этом случае наступление опасного состояния материала может быть вызвано, вообще говоря, различными числовыми значениями главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 в зависимости от величины отношения их друг к другу. Каждой комбинации этих отношений будут

соответствовать определённые *опасные* величины главных напряжений σ_1^0, σ_2^0, σ_3^0, при которых наступит опасное состояние материала (появление больших остаточных деформаций или трещин).

Таким образом, для нахождения этих опасных значений напряжений σ_1, σ_2, σ_3 пришлось бы в лаборатории подвергать образцы материала действию главных напряжений при разных соотношениях $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$. Практически осуществить такие опыты невозможно ввиду трудности их постановки и громадного объёма испытаний.

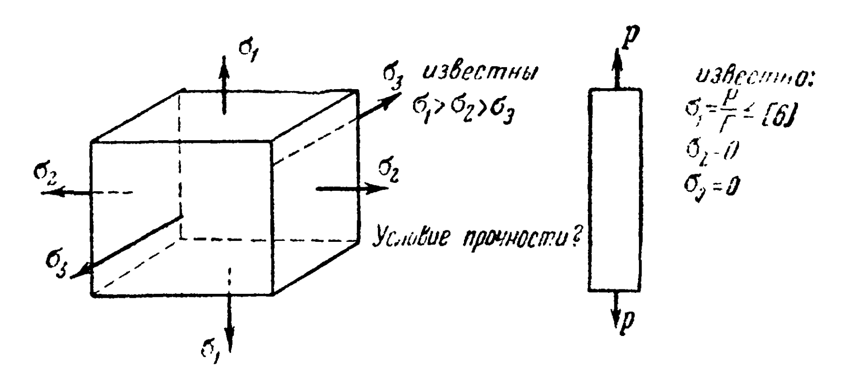
Поэтому необходимо найти способ составления условия прочности при *сложном* напряжённом состоянии, пользуясь величинами $\sigma_т$ и $\sigma_в$, полученными при опытах для *линейного* напряжённого состояния.

Таким образом, задача проверки прочности материала в общем случае, когда все три главных напряжения не равны нулю, ставится так:

1) определены расчётом три главных напряжения: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$,

2) выбран материал,

3) для этого материала при помощи опытов в лаборатории найдена при простом растяжении или сжатии величина опасных напряжений $\sigma^0 = \sigma_т$ или $\sigma^0 = \sigma_в$ и установлено допускаемое напряжение. Требуется составить условие прочности для общего случая напряжённого состояния, зная σ_1, σ_2 и σ_3 и сохраняя тот же коэффициент запаса k (фиг. 90).



Фиг. 90.

Поставленная задача может быть решена лишь на основании предположения (гипотезы) о том, каков вид функции, связывающей прочность материала с величиной и знаком главных напряжений, каким фактором вызывается наступление опасного состояния материала.

Таких факторов можно наметить несколько. В самом деле, даже при простом растяжении стержня из пластичного материала можно поставить вопрос: что является причиной текучести?

Можно предположить, что текучесть появится тогда, когда наибольшие *нормальные напряжения* в стержне дойдут до предела текучести $\sigma_т$. Однако можно было бы стать и на другую точку зрения и высказать предположение, что явление текучести наступит тогда, когда *наибольшее удлинение* материала достигнет определённого значения. Можно сделать и третье предположение, а именно, что появление больших остаточных деформаций связано с тем, что *касательные напряжения* достигнут определённой величины.

Таким образом, мы можем высказать ряд гипотез, построить ряд так называемых теорий прочности. Как мы увидим дальше, при простом растяжении или сжатии, при линейном напряжённом состоянии результаты проверки прочности оказываются одинаковыми, какую бы из гипотез мы ни приняли. Это объясняется тем, что в этом случае проверка прочности основывается непосредственно на опыте.

Совсем иначе будет обстоять дело при сложном напряжённом состоянии. В следующих параграфах будет показано, как меняется условие прочности в зависимости от принятой теории. Выбор для практического применения той или иной теории окончательно определяется проверкой её на опыте для случая сложного напряжённого состояния.

Прежде чем перейти к изложению теорий прочности, заметим, что опасное состояние как для пластичных материалов (момент появления больших остаточных деформаций), так и для хрупких (момент появления трещин) лежит на границе применения закона Гука (с известным, достаточным для практики приближением). Это позволяет при всех дальнейших вычислениях, относящихся к проверкам прочности, пользоваться формулами, выведенными в предыдущих параграфах при условии применимости закона Гука.

§ 43. Проверка прочности по различным теориям.

Первое, наиболее простое, *предположение* заключается в том, что опасное состояние материала наступает в тот момент, когда *наибольшее* по абсолютной величине *нормальное* напряжение достигает опасного значения. Эта гипотеза носит название теории *наибольших нормальных напряжений*, или *первой* теории прочности.

Таким образом, и в общем случае, когда все три главных напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 не равны нулю, при проверке по этой теории необходимо учитывать величину лишь наибольшего растягивающего или наибольшего сжимающего напряжений. Величина же двух других главных напряжений не имеет при этом как бы никакого влияния на прочность материала, на достижение им опасного состояния, и о них при проверке прочности можно забыть. Тогда теряется в известной степени различие между проверкой прочности при *линейном* напряжённом состоянии и при *объёмном*.

Если в случае простого растяжения или сжатия мы для напряжений σ_1 и σ_3 допускаем величину $[\sigma]$, то и в общем случае, когда все три главных напряжения σ_1, σ_2, σ_3 не равны нулю, для наибольшего из них мы должны допустить ту же величину $[\sigma]$. При этих условиях коэффициент запаса по отношению к возможности появления опасного состояния будет одинаков как в случае простого растяжения, так и в общем случае.

Условие прочности для обоих случаев напишется одинаково:

$$\sigma_1 \leqslant [\sigma] \quad \text{или} \quad |\sigma_3| \leqslant [\sigma]. \qquad (8.1)$$

При проверке указанной гипотезы опытами, однако, обнаружилось несоответствие её выводов с результатами опытов на всестороннее сжатие не только пластичных материалов, но и хрупких. Это можно видеть из приведённых в § 35 напряжений при соприкосновении колёс и рельсов. В этом случае $\sigma_3 \approx 110$ *кг/мм*², что далеко превышает величину предела текучести рельсовой стали (40 *кг/мм*²) при простом растяжении или сжатии. Лишь для случая растяжения хрупких материалов эта теория согласуется с опытами. Так как обычно эта теория даёт либо излишние, либо недостаточные размеры сечений элементов конструкций при сложном напряжённом состоянии, ею избегают пользоваться.

Выдвинутая позднее первой, и до известной степени в противовес ей, *вторая гипотеза* принимает, что наступление опасного состояния определяется не наибольшим напряжением, а величиной *наибольшего относительного удлинения* или *укорочения*.

Если это так, то проверку прочности следует производить по наибольшим относительным деформациям. Сохраняя тот же коэффициент запаса, мы должны для наибольшей относительной продольной деформации в общем случае (все главные напряжения не равны нулю) допускать ту же величину, что и при простом растяжении.

Для общего случая мы имели формулы (7.16) для главных линейных деформаций (§ 40). В зависимости от соотношения величин главных напряжений одна из этих деформаций будет численно наибольшей. Пусть это будет ε_1. Тогда

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Для случая же линейного напряжённого состояния мы знаем величину допускаемого напряжения $[\sigma]$. Тем самым для наибольших относительных деформаций допускаем величину

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Условие прочности выразится так:

$$\varepsilon_{max} \leqslant [\varepsilon], \qquad (8.2)$$

т. е.

$$\frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leqslant \frac{[\sigma]}{E},$$

тогда

$$[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leqslant [\sigma]. \qquad (8.3)$$

Таким образом, принимая теорию наибольших относительных удлинений, необходимо сравнивать с допускаемым напряжением,

установленным для простого растяжения или сжатия, не то или другое главное напряжение, а их совокупность, так называемое *приведённое* (расчётное) напряжение, определяемое формулой:

$$\sigma_{r2} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Эта гипотеза также стоит в противоречии с некоторыми опытами по исследованию прочности пластичных материалов. Если бы она была для таких материалов верна, то образец, растягиваемый в двух или трёх направлениях, был бы прочнее образца, растягиваемого линейно; опыт этого не подтверждает. Не подтверждается эта гипотеза и при всестороннем равномерном сжатии.

Для хрупкого состояния материала теория наибольших относительных деформаций даёт обычно согласующиеся с опытом результаты.

Третья гипотеза возвращает нас опять к представлению о том, что главную роль в наступлении опасного состояния материала играет *наибольшее напряжение*, но уже не нормальное, *а касательное*, равное полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

При этом предположении проверку прочности надо вести по касательным напряжениям. Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{max} \leqslant [\tau].$$

Что касается величины допускаемого напряжения $[\tau]$, то, считая, что наступление опасного состояния зависит лишь от наибольших касательных напряжений, мы и при объёмном напряжённом состоянии должны для этих напряжений допускать ту же величину, что и при простом растяжении. Степень безопасности по отношению к наступлению опасного состояния в обоих случаях будет тогда одинаковой.

Если при простом растяжении мы допускаем для нормальных напряжений величину $[\sigma]$, то тем самым для наибольших касательных мы допускаем значение $[\tau] = \left[\frac{\sigma}{2}\right]$ [см. формулу (7.3)]; эти касательные напряжения, как известно, действуют по площадке, наклонённой под углом в 45° к направлению растягивающей силы.

Условие прочности для объёмного напряжённого состояния принимает вид:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leqslant \frac{[\sigma]}{2}, \quad \text{или} \quad (\sigma_1 - \sigma_3) \leqslant [\sigma]. \qquad (8.4)$$

Таким образом, принимая указанную гипотезу, приходится при проверке прочности сравнивать с допускаемым напряжением на растя-

жение или сжатие не наибольшее нормальное напряжение, а разность между наибольшим и наименьшим нормальными (главными) напряжениями. Величина расчётного (приведённого) напряжения в этом случае равна

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Теория наибольших касательных напряжений стоит в достаточно близком согласии с результатами опытов, особенно для пластичных материалов; она подтверждается опытами на всестороннее сжатие. Обычно эта теория обеспечивает прочные размеры рассчитываемых элементов конструкций; иногда эти размеры оказываются даже несколько завышенными.

В том простом виде, как оно дано формулой (8.4), условие прочности может быть написано лишь для тех материалов, для которых допускаемые напряжения на растяжение и сжатие могут быть приняты равными: например, для стали. Для таких материалов, как чугун, камень и т. д., в условие (8.4) необходимо внести изменения, изложение которых сделано в главе XXXVII.

Недостатком теории наибольших касательных напряжений, бросающимся сразу в глаза, является то обстоятельство, что она совершенно не учитывает влияния на работу материала *среднего по величине* главного напряжения. Выходит, что при постоянных наибольшем σ_1 и наименьшем σ_3 главных напряжениях мы можем, *не изменяя условий работы материала*, как угодно менять величину среднего напряжения σ_2, лишь бы оно было меньше σ_1 и больше σ_3. Это обстоятельство представляется сомнительным, и опыты подтверждают, что величина напряжения σ_2 всё же оказывает влияние на прочность материала. Недооценивается этой теорией и опасность нарушения прочности элементов, испытывающих примерно равные растягивающие напряжения в трёх главных направлениях.

В связи с недостатками старых теорий возникли новые идеи относительно того, какой фактор вызывает наступление опасного состояния.

Рядом авторов было высказано предположение, что опасное состояние материала зависит не от величины деформаций или напряжений в отдельности, а от совокупности тех и других — от величины потенциальной энергии или от численно ей равной удельной работы деформации. Величина этой работы выражается через все три главных напряжения.

Если сделать предположение, что причиной опасного состояния является накопление *полной* удельной потенциальной энергии деформации, то прочность материала будет обеспечена при условии, что $u \leqslant [u]$. Здесь u — потенциальная энергия деформации при объёмном напряжённом состоянии, выражающаяся формулой (7.26):

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right],$$

а $[u]$ — допускаемое количество потенциальной энергии, которое (по условию равнопрочности материала при сложном и линейном напряжённых состояниях) может быть получено из выражения (7.25) для полной энергии деформации при простом растяжении:

$$u_p = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

При простом растяжении мы допускаем для нормальных напряжений величину $[\sigma]$, тем самым для удельной работы деформации мы допускаем

$$[u] = \frac{[\sigma]^2}{2E}.$$

Для соблюдения той же степени безопасности в общем случае мы для удельной работы деформации должны допускать не больше чем $[u]$. Условие прочности принимает вид:

$$\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right] \leqslant \frac{[\sigma]^2}{2E}$$

или

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} \leqslant [\sigma]. \qquad (8.5)$$

Расчётное напряжение равно

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}.$$

Эта гипотеза опытами не подтвердилась и имеет сейчас только историческое значение. Но зато она явилась базой для создания новой *энергетической теории прочности*, обычно хорошо согласующейся с опытами.

Эта теория, которую обычно называют *четвёртой* теорией (или гипотезой) прочности, предполагает, что причиной возникновения опасной пластической деформации является не вся потенциальная энергия деформации, а только та часть её, которая связана с *изменением формы* элементарных объёмов материала. Следовательно, прочность материала будет обеспечена, если

$$u_ф \leqslant [u_ф].$$

Здесь $u_ф$ — потенциальная энергия формоизменения при сложном напряжённом состоянии, равная (7.28):

$$u_ф = \frac{1+\mu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3\right].$$

Величина же допускаемой потенциальной энергии изменения формы для случая простого растяжения равна (7.30):

$$[u_ф] = \frac{1+\mu}{3E}[\sigma]^2.$$

Условие прочности по энергетической теории получит вид:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leqslant [\sigma], \tag{8.6}$$

а приведённое напряжение будет [1]):

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}.$$

Условие прочности (8.6) можно представить и в ином виде, иногда более удобном для вычислений:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leqslant [\sigma]. \tag{8.7}$$

Формулы (8.6) и (8.7) представляют условие прочности по так называемой теории наибольшей потенциальной энергии изменения формы.

Можно показать, что расчётное напряжение σ_{r4} по этой теории пропорционально касательному напряжению по площадке, равно наклонённой к направлениям главных напряжений. Поэтому этот вид *энергетической теории* тоже может быть отнесён к категории теорий, основывающих проверку прочности для пластичных материалов на величине *касательных напряжений* (глава XXXVIII). Опыты очень хорошо подтверждают результаты, получаемые по этой теории для пластичных материалов.

На основании формул (7.17) условие прочности (8.7) может быть написано ещё и так:

$$\sqrt{2(\tau_{1,2}^2 + \tau_{1,3}^2 + \tau_{2,3}^2)} \leqslant [\sigma]. \tag{8.8}$$

Подводя итог рассмотрению теории прочности, мы можем написать условие прочности при объёмном напряжённом состоянии в таком виде:

$$\sigma_r \leqslant [\sigma], \tag{8.9}$$

где σ_r — расчётное (приведённое) напряжение; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение при простом растяжении или сжатии. Расчётное напряжение σ_r может быть истолковано как растягивающее напряжение при линейном напряжённом состоянии, эквивалентном рассматриваемому объёмному в отношении опасности для прочности материала.

Выбор теории прочности, а значит и формулы для σ_r, таким образом, отвечает на вопрос: какой критерий прочности материала столь же надёжен для рассматриваемого объёмного напряжённого состояния, как и для линейного?

Что касается приложения теорий прочности к практическим расчётам, то надо иметь в виду, что под «разрушением» мы подразу-

---

[1]) К такому же результату придём, положив $\mu = 0,5$ в формуле (8,5), что отвечает неизменяемости объёма.

меваем для материала, находящегося в пластичном состоянии, наступление заметных остаточных деформаций — текучесть, а для материала в хрупком состоянии — появление трещин, отделение, отрыв одной части материала от другой.

Так как в зависимости от условий работы и характера напряжённого состояния всякий материал может находиться и в хрупком и в пластичном состояниях, то, вообще говоря, следует принять для практического применения *две теории прочности* — *одну*, пригодную для проверки прочности материала при его *пластичном состоянии*, *другую* — *при хрупком*. Опыты показывают, что для пластичного состояния материала наиболее оправдываема опытами энергетическая теория прочности; несколько, но незначительно, расходится с опытами теория наибольших касательных напряжений.

Для хрупкого состояния материала, повидимому, может иногда применяться теория наибольших удлинений; имеются опыты, которые показывают, что в ряде случаев подтверждается для такого состояния материала и теория наибольших нормальных напряжений; ею пользуются на практике при проверке прочности таких материалов, как чугун, камень и т. д.

В последнее время советскими учёными Н. Н. Давиденковым и Я. Б. Фридманом предложена новая «объединённая теория прочности», обобщающая современные воззрения на вопросы прочности материалов в их хрупком или в пластичном состоянии. Эта теория подробно рассматривается в главе XXXVIII.

Все изложенные соображения по теориям прочности относятся к материалам, которые с достаточной степенью точности могут считаться *изотропными*. Для *анизотропных* материалов, например дерева, приведённые выше формулы неприменимы; здесь приходится учитывать направление усилий по отношению к волокнам (в дереве).

Необходимо остановиться на вопросе о переходе в практических расчётах от одной теории прочности к другой. В первой четверти нашего века в практике проектирования, особенно в машиностроении, широко применялись формулы, основанные на теории наибольших деформаций. Вполне оправданным оказался переход к более правильным для пластичных материалов теориям наибольших касательных напряжений и наибольшей потенциальной энергии. Надо помнить, что этот переход нельзя осуществлять механически — путём простой замены в условии прочности одного выражения для расчётного напряжения другим. Необходимо изменить и правую часть неравенства — величину допускаемого напряжения $[\sigma]$. Дело в том, что, уточняя расчёт, вводя в практику более правильную теорию прочности, мы должны во многих случаях изменить и коэффициент запаса k, а значит и $[\sigma]$. Если этого не сделать, то можно впасть в ошибку. Ниже, на примерах в отделах сдвига и изгиба, это будет разъяснено детально.

§ 44. Примеры проверки прочности.

Пример 24. Возьмём приведённый выше (§ 35) случай передачи давления от бегунка паровоза на рельс. На кубик с рёбрами длиной 1 *мм*, вырезанный в центре той площадки, через которую передаётся давление колеса на рельс, действуют сжимающие главные напряжения: $\sigma_1 = -80$ *кг/мм*²; $\sigma_2 = -90$ *кг/мм*²; $\sigma_3 = -110$ *кг/мм*². Подсчитаем по каждой из теорий прочности величину расчётного напряжения, которое следует сравнивать с допускаемым, имея при этом в виду, что вычисление расчётных напряжений по первым двум теориям производится лишь с целью сопоставления результатов. Эти теории, как уже указывалось, неприменимы для пластичного материала.

По теории наибольших нормальных напряжений расчётным напряжением будет

$$|\sigma_3| = 110 \text{ кг/мм}^2.$$

По теории наибольших деформаций расчётное напряжение равно

$$|[\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)]| = |-110 + 0{,}3(90 + 80)| = 59 \text{ кг/мм}^2.$$

По теории наибольших касательных напряжений расчётное напряжение равно

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = -80 + 110 = 30 \text{ кг/мм}^2.$$

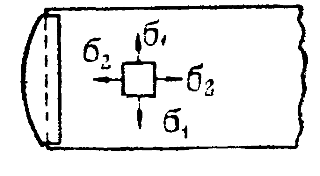
Наконец, по энергетической теории

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = 26{,}4 \text{ кг/мм}^2.$$

Так как для обычной рельсовой стали предел текучести близок к 40 *кг/мм*², а предел упругости около 30 *кг/мм*², то лишь две последние теории указывают на то, что напряжения находятся в допускаемых пределах; это подтверждается опытом эксплуатации рельсового пути.

Пример 25. Сделаем проверку напряжений в стенке резервуара (§ 35). Как выяснено при решении этой задачи, на прямоугольный элемент, вырезанный из цилиндрической стенки двумя смежными образующими и двумя поперечными сечениями (фиг. 91), действуют главные напряжения в двух направлениях, σ_1 и σ_2; третье главное напряжение равно нулю. Величина напряжений выражается формулами

$$\sigma_1 = \frac{pD}{2t}, \quad \sigma_2 = \frac{pD}{4t}, \quad \sigma_3 = 0,$$



Фиг. 91.

где p — внутреннее давление в *кг/см*²; t — толщина стенок резервуара; D — диаметр цилиндрической части.

Для котла все теории дают мало отличные друг от друга результаты. Сравним результаты теорий наибольших касательных напряжений и энергетической. По теории касательных напряжений

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \frac{pD}{2t} \leq [\sigma]. \tag{8.9}$$

По энергетической теории прочности

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \frac{pD}{4t}\sqrt{3} \leq [\sigma],$$

что даёт

$$0{,}86\frac{pD}{2t} \leq [\sigma]. \tag{8.10}$$

Условия прочности по этим теориям в данном случае дают результаты, отличающиеся на 14%; для расчёта толщины стенок котла из пластичной стали лучше воспользоваться формулой (8.10).

Пример 26. Проверим прочность чугунной детали (работающей на сложное напряжённое состояние), если главные напряжения в опасной точке сечения: $\sigma_1 = 240$ *кг/см²*; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -360$ *кг/см²*.

Допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma] = 350$ *кг/см²*,
» » » сжатие $[\sigma_{сж}] = 1200$ *кг/см²*.

Для проверки прочности чугуна на растяжение следует применить теорию наибольших относительных удлинений. Коэффициент Пуассона примем $\mu = 0{,}25$. Тогда

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu\sigma_3 = 240 + 0{,}25 \cdot 360 = 330 \text{ кг/см}^2.$$

Расчётное напряжение близко к допускаемому на растяжение.

Если бы мы воспользовались для расчёта теорией касательных напряжений (неприменимой для хрупкого состояния материала), то получили бы ошибочные результаты:

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 240 + 360 = 600 \text{ кг/см}^2$$

(близко к разрушающему при растяжении).

ГЛАВА IX.

КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ.

§ 45. Общие понятия. Формулы для контактных напряжений.

При определении понятия «сосредоточенная сила» (§ 2) было уже указано, что передача давления от одной части конструкции на другую происходит обычно по очень небольшой по сравнению с размерами соприкасающихся элементов площадке. Материал около этой площадки испытывает объёмное напряжённое состояние, причём распределение напряжений оказывается весьма сложным и поддаётся *исследованию лишь методами теории упругости*. Эти напряжения, возникающие при нажатии одной части конструкции на другую (работа шариковых и роликовых подшипников, катков, зубчатых колёс и т. д.), называются *контактными* напряжениями. Величина их очень быстро убывает при удалении от площадки соприкасания; поэтому иногда эти напряжения называются местными.

Ниже приводятся результаты определения контактных напряжений, полученные в теории упругости. Возникающие при контакте силы трения в расчётах не учтены.

Поверхность контакта для рассмотренных ниже случаев первоначального касания в точке ограничена эллипсом, уравнение которого

$$Ax^2 + By^2 = C = \text{const.}; \tag{9.1}$$

здесь A и B — величины, зависящие от главных радиусов кривизны[1]) каждого из соприкасающихся тел, а C — величина сближения соприкасающихся тел, вызванного упругой деформацией по площадке касания.

[1]) Главными кривизнами являются наибольшая и наименьшая кривизны, лежащие в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через центр кривизны. Кривизна считается положительной, если центр кривизны находится внутри тела.

Напряжения по площадке соприкасания распределяются по закону эллипсоида и могут быть найдены из уравнения:

$$\sigma_{max} \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi ab = P, \text{ или } \sigma_{max} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab}. \tag{9.2}$$

Здесь P — величина давления при касании, а $\frac{2}{3} \pi ab \cdot \sigma_{max}$ — объём полуэллипсоида напряжений, имеющего в основании эллипс с полуосями a и b, величина которых зависит от отношения $\frac{A}{B}$.

Величина наибольших напряжений в центре эллипса касания может быть выражена формулой

$$\sigma_{max} = \alpha \sqrt[3]{4PA^2E^2}, \tag{9.3}$$

где α — коэффициент, зависящий от отношения $\frac{A}{B}$. Значения коэффициента α в функции $\frac{A}{B}$ даны в табл. 10.

Таблица 10. **Значения коэффициента α в формуле (9.3).**

$\frac{A}{B}$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
α	0,388	0,400	0,420	0,440	0,468	0,490	0,536	0,600

$\frac{A}{B}$	0,2	0,15	0,10	0,05	0,02	0,01	0,007
α	0,716	0,800	0,970	1,280	1,800	2,271	3,202

Эллипс контакта обращается в круг при касании двух шаровых поверхностей или шара с плоскостью и в прямоугольник шириной $2b$, если первоначальное касание происходит не в точке, а по прямой (например, при касании цилиндрических катков с параллельными осями).

В таблице 11 даны формулы коэффициентов A и B и наибольших напряжений в центре касания σ_{max} для наиболее часто встречающихся форм поверхностей соприкасания.

§ 46. Проверка прочности соприкасающихся тел.

Как уже было показано в § 35, материал соприкасающихся тел в центре площадки касания находится в условиях объёмного напряжённого состояния и может поэтому надёжно работать при очень больших сжимающих напряжениях. Сталь, например, может безопасно выдержать очень высокие давления, порядка 35 000 ÷ 40 000 *кг/см*^{2}.

Чтобы проверить прочность материала при объёмном напряжённом состоянии, нужно знать величину главных напряжений в опасной точке и составить условие прочности по одной из теорий.

Таблица 11. **Формулы коэффициентов A, B и σ_{max}.**

Форма соприкасающихся тел		Коэффициенты уравнения эллипса касания		Наибольшие напряжения
схема касания	размеры соприкасающихся тел	A	B	σ_{max}
	Два шара радиусов R_1 и R_2	$\frac{R_1+R_2}{2R_1R_2}$	$\frac{R_1+R_2}{2R_1R_2}$	$0{,}388\sqrt[3]{PE^2\frac{(R_1+R_2)^2}{(R_1R_2)^2}}$
	Шар радиуса R_1 и шаровая сфера радиуса R_2	$\frac{R_2-R_1}{2R_1R_2}$	$\frac{R_2-R_1}{2R_2R_1}$	$0{,}388\sqrt[3]{PE^2\frac{(R_2-R_1)^2}{(R_1R_2)^2}}$
	Шар радиуса R и плоскость ($R_2=\infty$)	$\frac{1}{2R}$	$\frac{1}{2R}$	$0{,}388\sqrt[3]{PE^2\frac{1}{R^2}}$
	Шар радиуса R_1 и цилиндр радиуса R_2 ($R_2>R_1$)	$\frac{1}{2R_1}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$	$a\cdot\sqrt[3]{\frac{PE^2}{R_1^2}}$
	Шар радиуса R_1 и цилиндрический жёлоб радиуса R_2 ($R_2>R_1$)	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$	$\frac{1}{2R_1}$	$a\cdot\sqrt[3]{\frac{PE^2(R_2-R_1)^2}{(R_1R_2)^2}}$

Продолжение табл. 11.

Форма соприкасающихся тел		Коэффициенты уравнения эллипса касания		Наибольшие напряжения
схема касания	размеры соприкасающихся тел	A	B	σ_{max}
	Шар радиуса R_1 и круговой жёлоб радиусов R_2 и R_3 (шариковый подшипник) ($R_2 > R_3$)	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)$	$\alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{PE^2 (R_2 - R_1)^2}{(R_1 R_2)^2}}$
	Роликовый подшипник радиусов R_1 и R_2 и круговой жёлоб радиусов R_3 и R_4	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)$	$\alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{PE^2 (R_4 - R_2)^2}{(R_2 R_4)^2}}$
	Два цилиндра накрест радиусов R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$)	$\frac{1}{2R_2}$	$\frac{1}{2R_1}$	$\alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{PE^2}{R_2^2}}$
l	Два цилиндра с параллельными осями радиусов R_1 и R_2	—	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$	$0{,}418 \sqrt{\frac{PE}{l} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$
	Цилиндр радиуса R и плоскость ($R_2 = \infty$)	—	$\frac{1}{2R}$	$0{,}418 \sqrt{\frac{PE}{l \cdot R}}$

Можно показать[1]), что опасная точка лежит на некоторой глубине контактирующих тел, и по соответствующим формулам найти главные напряжения.

Оказывается, что расчётное напряжение в опасной точке внутри материала по энергетической теории прочности $\sigma_{r4} \approx 0{,}6\sigma_{max}$. На поверхности соприкасания расчётные напряжения по той же теории прочности соответственно равны:

$$\text{в центре эллипса касания } \sigma'_{r4} = n_1\sigma_{max},$$
$$\text{на конце большой полуоси } \sigma''_{r4} = n_2\sigma_{max}.$$

Коэффициенты n_1 и n_2 в функции отношения $\frac{A}{B}$ даны на графике (фиг. 92).

Таким образом, для определения *расчётных* напряжений, которые следует сравнивать с допускаемыми *нормальными напряжениями при простом сжатии,* надлежит:

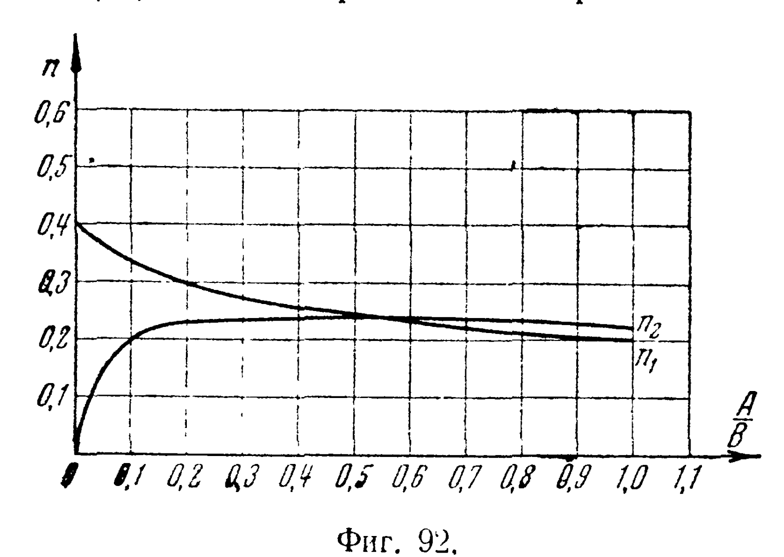
1) вычислить A и B, принимая за A меньшую из этих двух величин по формулам таблицы 11;

2) по отношению $\frac{A}{B}$ найти α (таблица 10);

3) вычислить по формуле таблицы 11 величину σ_{max};

4) для проверки прочности в точках площадки соприкасания умножить σ_{max} на коэффициент n (фиг. 92);

5) для проверки же прочности в наиболее опасной точке умножить σ_{max} на 0,60; величины расчётных напряжений надлежит сравнить с допускаемыми напряжениями при простом растяжении или с пределом текучести (упругости).



Фиг. 92.

Заметим, что на вид формул для контактных напряжений существенно отличается от обычных формул для напряжений при простом растяжении или сжатии. Раньше во всех случаях мы получали величину напряжений прямо пропорциональной величине силы и не зависящей от упругих постоянных материала. Из приведённых в табл. 11 формул мы видим, что контактные напряжения зависят от модуля упругости материала и растут медленнее силы.

Подробно вопрос о вычислении контактных напряжений излагается в курсах теории упругости и в специальной литературе[2]). Ценные исследования в этой области выполнены советским учёным И. Я. Штаерманом, давшим принципиально новое решение контактной задачи[3]).

---

[1]) См. Н. М. Беляев, О вычислении наибольших расчётных напряжений при сжатии соприкасающихся тел, Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения, вып. 99, 1920 г. и вып. 102, 1929 г.

[2]) См., например, А. Н. Динник, Удар и сжатие упругих тел.

[3]) И. Я. Штаерман, Контактная задача теории упругости, ГТТИ, 1949.

Пример 27. Подсчитаем напряжения, возникающие в рельсе с радиусом головки $r = 300$ *мм* в месте соприкасания с ним переднего бегунка паровоза радиусом $R = 470$ *мм*; нагрузка на рельс $P = 7300$ *кг*; модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^4$ *кг/мм²*.

Имеем (по таблицам 10 и 11):

$$A = \frac{1}{2R}; \quad B = \frac{1}{2r}; \quad \frac{A}{B} = \frac{r}{R} = 0{,}64 \text{ и } \alpha = 0{,}456.$$

Таким образом,

$$\sigma_{\max} = 0{,}456 \sqrt[3]{\frac{P}{R^2} E^2} = 108 \text{ кг/мм}^2;$$

расчётное напряжение внутри рельса равно

$$\sigma_{r4} = 0{,}60 \cdot 108 = 65 \text{ кг/мм}^2.$$

На поверхности соприкасания расчётное напряжение равно

$$\sigma'_{r4} = 0{,}24 \cdot 108 = 26{,}0 \text{ кг/мм}^2.$$

Здесь $n = 0{,}24$ взято по графику (фиг. 92) средним между значениями n_1 и n_2.

На поверхности соприкасания расчётные напряжения близки к пределу текучести, внутри же превышают его; это показывает, что остаточные деформации, правда захватывающие небольшой объём материала, неизбежны в головке рельса.

ОТДЕЛ III.

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ.

ГЛАВА X.

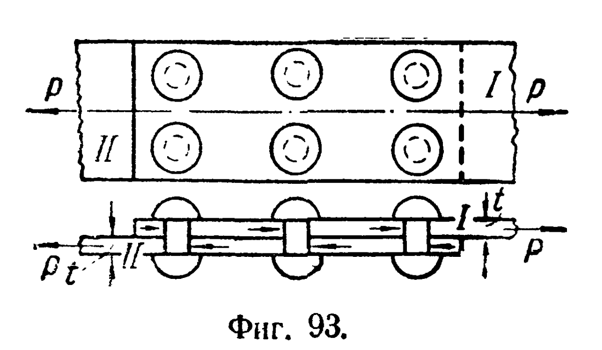
ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА. ЧИСТЫЙ СДВИГ.

§ 47. Понятие о сдвиге. Расчёт заклёпок на перерезывание.

Мы видим в предыдущем отделе (§ 33), что при простом растяжении или простом сжатии две части стержня, разделённые наклонным сечением, стремятся не только *оторваться* друг от друга, но и *сдвинуться* одна относительно другой. Растяжению сопротивляются *нормальные*, а сдвигу — *касательные* напряжения.

На практике целый ряд деталей и элементов конструкций работает в таких условиях, что внешние силы стремятся их разрушить именно путём *сдвига*.

В соответствии с этим при проверке прочности таких элементов на первый план выступают касательные напряжения. Простейшими примерами подобных деталей являются болтовые и заклёпочные соединения. Заклёпки во многих случаях уже вытеснены сваркой; однако они имеют ещё очень большое применение для соединения частей всякого рода металлических конструкций: стропил, ферм мостов, кранов, для соединения листов в котлах, судах, резервуарах и т. п.



Фиг. 93.

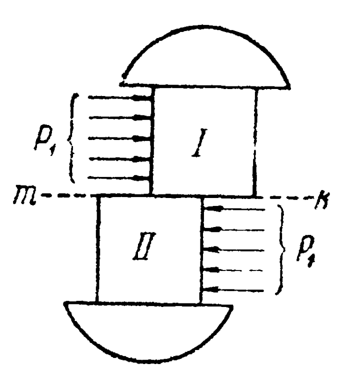
Для образования заклёпочного соединения в обоих листах просверливают или продавливают отверстия. В них закладывается нагретый до красного каления стержень заклёпки с одной головкой; другой конец заклёпки расклёпывается ударами специального молотка или давлением гидравлического пресса (клепальной машины) для образования второй головки. Мелкие заклёпки (малого диаметра — меньше 8 *мм*) ставятся в холодном состоянии (авиационные конструкции).

Для изучения работы заклёпок рассмотрим простейший пример заклёпочного соединения (фиг. 93). Шесть заклёпок, расположенных в два ряда, соединяют два листа *внахлёстку*. Под действием сил P

эти листы стремятся сдвинуться один по другому, чему препятствуют заклёпки, на которые и будет передаваться действие сил P[1]).

Для проверки прочности заклёпок применим общий порядок решения задач сопротивления материалов.

На каждую заклёпку передаются по две равные и прямо противоположные силы: одна — от первого листа, другая — от второго. Опытные исследования показывают, что одни из заклёпок ряда нагружаются больше, другие — меньше. Однако к моменту разрушения усилия, передающиеся на различные заклёпки, более или менее выравниваются за счёт пластических деформаций. Поэтому принято считать, что все заклёпки работают одинаково. Таким образом, при n заклёпках в соединении, изображённом на фиг. 93, на каждую из них действуют по две равные и противоположные силы $P_1 = \frac{P}{n}$ (фиг. 94); эти силы передаются на заклёпку путём нажима соответствующего листа на боковую полуцилиндрическую поверхность стержня. Силы P_1 стремятся *перерезать* заклёпку по плоскости mk раздела обоих листов.



Фиг. 94.

Для вычисления напряжений, действующих по этой плоскости, разделим мысленно заклёпочный стержень сечением mk и отбросим нижнюю часть (фиг. 94). Внутренние усилия, передающиеся по этому сечению от нижней части на верхнюю, будут уравновешивать силу P_1, т. е. будут действовать параллельно ей в *плоскости* сечения, и в сумме дадут равнодействующую, равную P_1. Следовательно, напряжения, возникающие в этом сечении и действующие касательно к плоскости сечения, это — *касательные* напряжения τ. Обычно принимают равномерное распределение этих напряжений по сечению. Тогда при диаметре заклёпки d на единицу площади сечения будет приходиться напряжение

$$\tau = \frac{P_1}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{P}{n\frac{\pi d^2}{4}}. \tag{10.1}$$

Определение величины допускаемого касательного напряжения $[\tau]_з$, или, как говорят, допускаемого *напряжения на срез*, дано в § 53. Зная $[\tau]_з$, мы напишем условие прочности заклёпки на перерезывание в таком виде:

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{P}{n\frac{\pi d^2}{4}} \leqslant [\tau]_з, \tag{10.2}$$

т. е. действительное касательное напряжение τ в материале заклёпки должно быть равно допускаемому $[\tau]_з$ или меньше его.

---
[1]) Сопротивление трения не учитывается.

Из этого условия можно определить необходимый диаметр заклёпок, если задаться их числом, и наоборот. Обычно задаются диаметром заклёпочных стержней d в соответствии с толщиной t склёпываемых частей (обычно $d \approx 2t$) и определяют необходимое число заклёпок n:

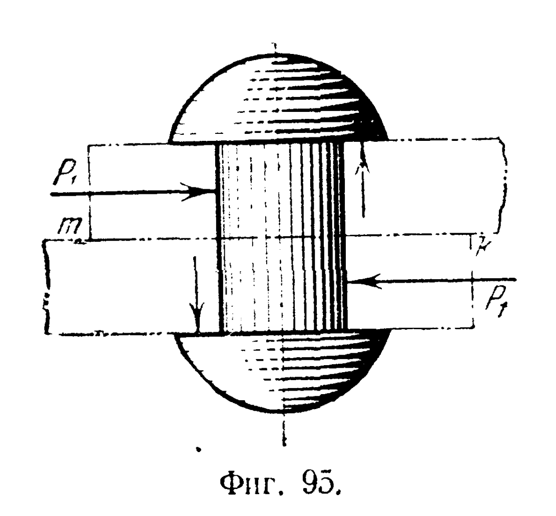
$$n \geqslant \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}[\tau]_з}. \qquad (10.3)$$

Знаменатель этой формулы представляет собой ту силу, которую безопасно может взять на себя каждая заклёпка.

Пусть $P = 72\,000$ *кг*; $d = 2$ *см*; $[\tau]_з = 1000$ *кг/см*^{2}; тогда

$$n \geqslant \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}[\tau]_з} = \frac{72\,000}{\frac{3{,}14 \cdot 4}{4} \cdot 1000} \approx 24.$$

При выводе формулы (10.2), помимо оговорённых, допущена ещё одна неточность. Дело в том, что силы P_1, действующие на заклёпку, не направлены по одной прямой, а образуют пару. Эта пара уравновешивается другой парой, образующейся из реакций соединённых листов на головку заклёпки (фиг. 95) и ведёт к появлению нормальных напряжений, действующих по сечению mk.



Фиг. 95.

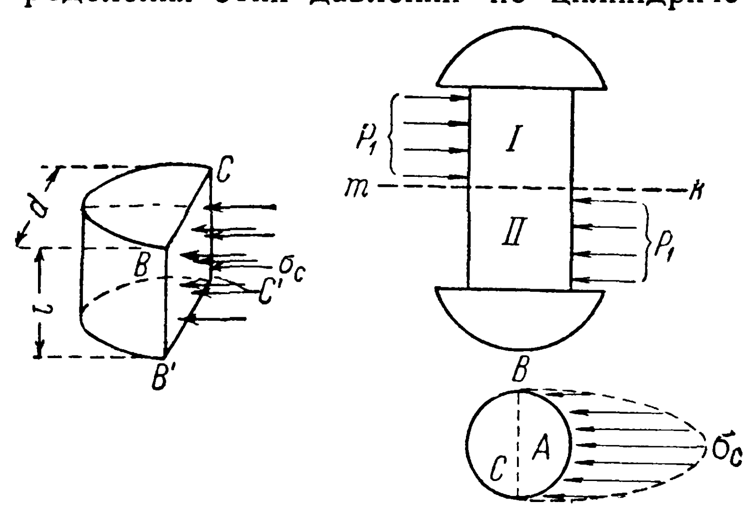
Кроме этих нормальных напряжений, по сечению mk действуют ещё нормальные напряжения, вызванные тем, что при охлаждении заклёпочный стержень стремится сократить свою длину, чему мешает упор головок заклёпки в листы. Это обстоятельство, с одной стороны, обеспечивает стягивание заклёпками листов и возникновение между ними сил трения, с другой — вызывает значительные *нормальные* напряжения по сечениям стержня заклёпки. Особых неприятностей эти напряжения принести не могут. На заклёпки идёт сталь, обладающая значительной пластичностью; поэтому даже если бы *нормальные* напряжения достигли предела текучести, можно ожидать некоторого пластического удлинения стержня заклёпки, что вызовет лишь уменьшение сил трения между листами и осуществление в действительности той схемы работы заклёпки на перерезывание, на которую она и рассчитывается. Поэтому эти нормальные напряжения расчётом не учитываются.

§ 48. Проверка заклёпок на смятие и листов на разрыв.

В § 47 рассмотрены условия прочности, ограждающие заклёпочное соединение от разрушения путём срезывания заклёпок. Однако заклёпкам и соединяемым листам в конструкции, показанной на фиг. 93, угрожают и иные опасности.

Так как передача сил на заклёпочный стержень происходит путём нажатия стенок заклёпочного отверстия на заклёпку, то необходимо установить, не произойдёт ли наружное обмятие этого стержня или стенок отверстия, — произвести *проверку на смятие.*

На фиг. 96 указана примерная схема передачи давлений на стержень заклёпки. Закон распределения этих давлений по цилиндрической поверхности нам неизвестен; он во многом зависит от неправильностей формы заклёпочного отверстия и стержня, вызванных условиями изготовления конструкции. Поэтому расчёт производится условно. Принято считать, что неравномерное давление, передающееся на поверхность заклёпки от листа, распределяется равномерно по диаметральной плоскости сечения заклёпки (фиг. 96). При этом напряжение по этой диаметральной плоскости оказывается примерно равным наибольшему сминающему напряжению σ_c в точке A поверхности заклёпки.



Фиг. 96.

Чтобы вычислить это условное напряжение смятия, необходимо разделить силу, приходящуюся на заклёпку, на площадь диаметрального сечения $BCC'B'$ (фиг. 96). Эта площадь представляет собой прямоугольник, одной стороной которого служит диаметр заклёпки, другая же равна толщине листа, передающего давление на стержень заклёпки.

Так как давление на одну заклёпку равно $\frac{P}{n}$, то

$$\sigma_c = \frac{P}{ntd}; \qquad (10.4)$$

условие прочности на смятие будет иметь вид:

$$\sigma_c = \frac{P}{ntd} \leqslant [\sigma_c], \qquad (10.5)$$

где $[\sigma_c]$ — допускаемое напряжение на смятие. Отсюда необходимое число заклёпок

$$n \geqslant \frac{P}{td\,[\sigma_c]}. \qquad (10.6)$$

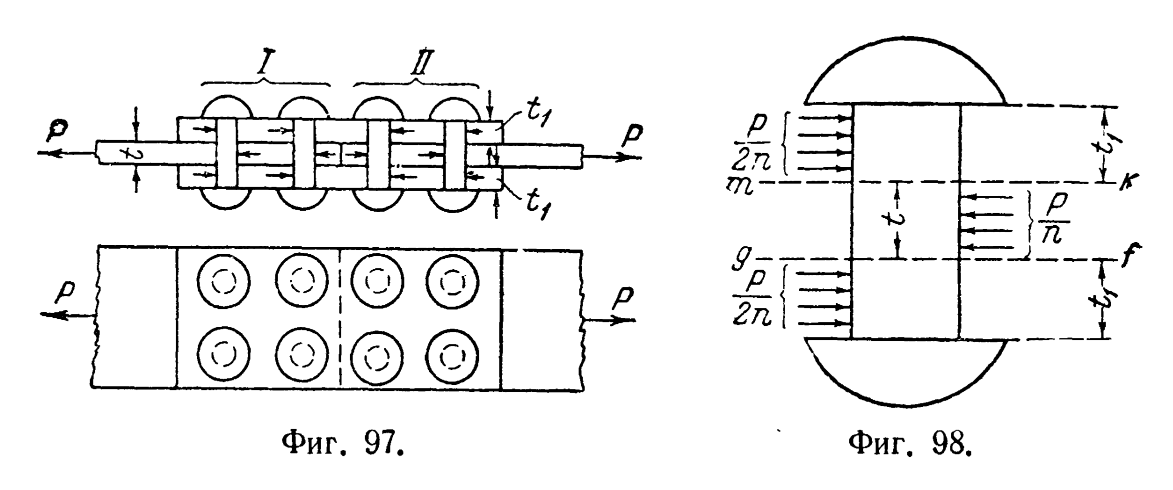
Допускаемое напряжение на смятие принимают обычно в 2—2,5 раза больше основного допускаемого напряжения на растяжение и сжатие $[\sigma]$, так как расчёт на смятие по существу является упрощённой проверкой прочности по контактным напряжениям.

Таким образом, число заклёпок, необходимое для прочного соединения листов, определяется формулами (10.3) и (10.6). Из двух полученных значений n, конечно, надо взять большее.

Если мы вернёмся к рассмотренной выше задаче (фиг. 93) и примем $P = 72\,000$ *кг*; $t = 1$ *см*; $d = 2$ *см*; $[\sigma_c] = 2400$ *кг/см²*, то получим:

$$n \geqslant \frac{P}{td\,[\sigma_c]} = \frac{72\,000}{2 \cdot 1 \cdot 2400} = 15.$$

Таким образом, условие прочности заклёпок на перерезывание требует постановки двадцати четырёх заклёпок; условие же прочности на смятие — пятнадцати заклёпок. Очевидно, необходимо поставить двадцать четыре заклёпки. В этом примере работа заклёпок на срез оказывается опаснее работы их на смятие. Это обычно бывает в соединениях с так называемыми *односрезными* заклёпками, в которых каждая заклёпка перерезывается в одной плоскости.



Фиг. 97.

Фиг. 98.

В несколько других условиях будут работать заклёпки соединения, показанного на фиг. 97. Здесь стык двух листов осуществлён при помощи двух накладок. Сила P при помощи первой группы заклёпок передаётся от левого листа обеим накладкам, а от последних при помощи второй группы заклёпок передаётся правому листу.

Называя через n число заклёпок, необходимое для передачи усилия P от листа на накладки и от накладок на другой лист, получаем, что на каждую заклёпку передаётся усилие от основного листа P/n. Оно уравновешивается усилиями $P/2n$, передающимися на заклёпку от накладок (фиг. 98).

Стержень заклёпки теперь подвергается перерезыванию уже в двух плоскостях; средняя часть заклёпки сдвигается влево. Допускают, что срезывающая сила P/n равномерно распределяется по двум сечениям, mk и gf. Напряжение τ определяется формулой

$$\tau = \frac{P}{n \cdot 2\,\frac{\pi d^2}{4}},$$

и условие прочности для *двухсрезной* заклёпки принимает вид:

$$\frac{P}{n\frac{\pi d^2}{2}} \leqslant [\tau]_з \quad \text{и} \quad n \geqslant \frac{P}{\frac{\pi d^2}{2}[\tau]_з}. \tag{10.7}$$

Таким образом, при двойном перерезывании число заклёпок по срезыванию оказывается в два раза меньше, чем при одиночном перерезывании [формула (10.3)].

Переходим к проверке на смятие. Толщина склёпываемых листов t; толщина накладок t_1 не должна быть меньше $0{,}5t$, так как *две* накладки должны взять от основного листа всю силу P. Поэтому

$$0{,}5t < t_1 \leqslant t.$$

Сила P/n сминает и среднюю часть заклёпки и верхнюю с нижней. Опаснее будет смятие той части, где площадь смятия меньше.

Так как толщина среднего листа не больше суммы толщин обеих накладок, то в худших условиях по смятию будет средняя часть заклёпки. Условие прочности на смятие (10.5) останется таким же, как и при односрезных заклёпках:

$$\sigma_c = \frac{P}{ntd} \leqslant [\sigma_c], \quad n \geqslant \frac{P}{td[\sigma_c]}.$$

Таким образом, для рассматриваемой конструкции число заклёпок в первой и во второй группах определится из условий (10.7) и (10.6).

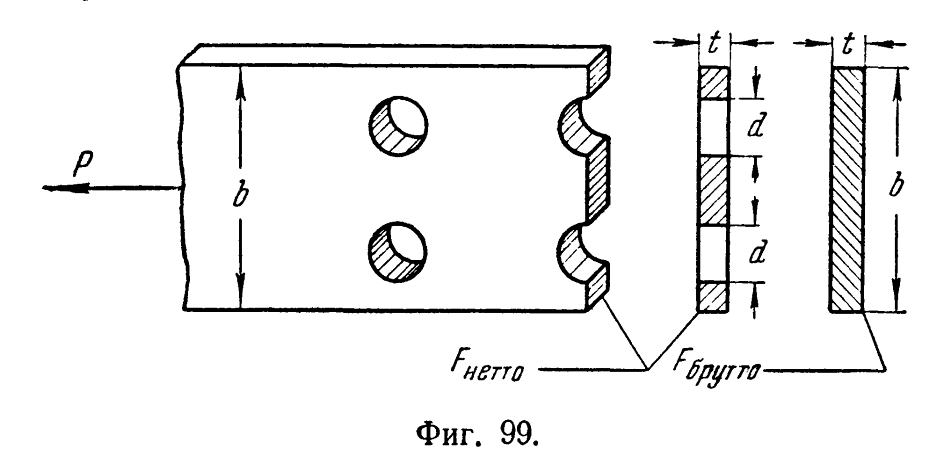
Пусть $P = 72\,000$ *кг*; $d = 2$ *см*; $t = 1$ *см*; $t_1 = 0{,}8$ *см*; $[\tau] = 1000$ *кг/см*^{2}; $[\sigma_c] = 2400$ *кг/см*^{2}. Тогда

$$n \geqslant \frac{P}{\frac{\pi d^2}{2}[\tau]_з} = \frac{72\,000}{\frac{3{,}14\cdot 4}{2}\cdot 1000} \approx 12, \quad n \geqslant \frac{P}{td[\sigma]} = \frac{72\,000}{2\cdot 1\cdot 2400} = 15.$$

В этом случае при двухсрезных заклёпках условия их работы на смятие тяжелее, чем на срезывание; следует принять $n = 15$.

На двух рассмотренных примерах мы установили общие методы проверки прочности заклёпочных соединений. В металлических конструкциях иногда приходится склёпывать целые пакеты соединяемых элементов. В таких пакетах заклёпки могут работать и на большее число срезов. Однако методы расчёта многосрезных заклёпок не отличаются от изложенных. Для вычисления касательных напряжений следует разделить силу, относящуюся к одной заклёпке, на суммарную площадь среза, воспринимающую эту силу. Для вычисления же напряжений смятия следует найти ту часть заклёпки, которая находится в наиболее опасных условиях, т. е. воспринимает наибольшую силу на наименьшем протяжении. Напряжения смятия получаются делением этой силы на площадь диаметрального сечения наиболее напряжённой части заклёпки. Затем останется написать два условия прочности и получить n.

Наличие заклёпок вносит некоторые изменения и в проверку прочности на растяжение или сжатие самих склёпанных листов. Опасным сечением каждого листа (фиг. 99) будет теперь сечение, проходящее через заклёпочные отверстия; здесь рабочая ширина



Фиг. 99.

листа будет наименьшей; принято говорить, что это сечение *ослаблено* заклёпочным отверстием. Называя полную ширину листа b, получаем для него такое условие прочности:

$$\frac{P}{t(b-md)} \leqslant [\sigma], \tag{10.8}$$

где m — число отверстий, попадающих в сечение (в нашем случае — два).

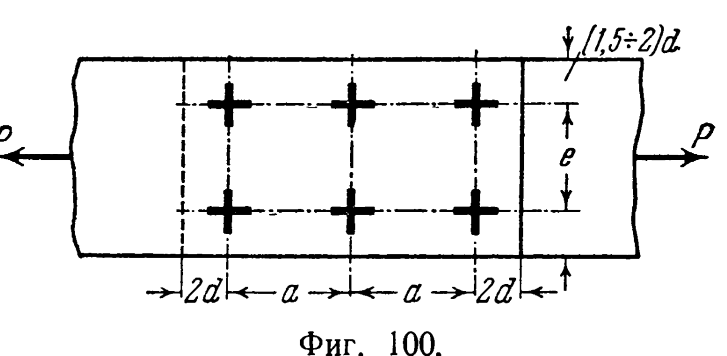
Отсюда можно найти величину b, задавшись толщиной листа t. Площадь $(b-md)t$ ослабленного сечения называется площадью нетто, площадь же полного сечения листа bt называется площадью брутто.

Этот учёт влияния заклёпочных отверстий на прочность склёпываемых листов общепринят, но является весьма условным. На самом деле, влияние отверстия в листе вызывает у его краёв, на концах диаметра, перпендикулярного к направлению растяжения, значительные *местные напряжения,* которые могут достичь предела текучести материала и вызвать остаточные деформации, захватывающие, однако, весьма небольшой объём материала листа.

Некоторую опасность в отношении образования трещин эти местные напряжения могут представить лишь при действии переменных нагрузок в материале, имеющем низкий предел усталости (§ 17). Однако в обычных условиях работы заклёпочных соединений эта опасность может считаться исключённой. Во избежание возможности разрушения листов заклёпками заклёпки размещаются на определённых расстояниях друг от друга и от края листа.

Расположение заклёпок в плане производится как по условиям обеспечения прочности и плотности соединения, так и по чисто производственным соображениям. Расстояния между центрами заклё-

пок принимаются не менее $3d$ и не более $7d$. Расстояния до края листов должны быть не менее $(1,5 \div 2)\,d$ (фиг. 100). Чтобы длина стыка была возможно меньше, берут $a = (3 \div 4)\,d$, а в целях меньшего ослабления сечения расстояние e берут возможно бо́льшим (до $7d$), что позволяет уменьшить число рядов, а следовательно, и ослабление.



Фиг. 100.

При проектировании заклёпочных соединений для котлов и резервуаров, где добиваются плотных швов, помимо расчёта на срез производят проверку сопротивления скольжению за счёт трения. Однако допускаемое напряжение по скольжению даётся в *кг/см*² поперечного сечения заклёпки; таким образом, проверка на трение при односрезных заклёпках сводится к проверке на срез лишь с другим допускаемым напряжением. При двухсрезных заклёпках в расчёт на трение вводится, конечно, одна площадь сечения заклёпки, но зато повышается почти вдвое допускаемое напряжение на трение за счёт двух накладок.

Поэтому так называемый *расчёт заклёпок на трение* является, по существу, проверкой прочности на срез с другими лишь допускаемыми напряжениями на квадратный сантиметр площади поперечного сечения заклёпки.

Правильнее было бы сохранить лишь один метод проверки заклёпочных соединений на смятие и срез, учитывая влияние сил трения при *назначении допускаемых напряжений* в зависимости от способа клёпки, качества отверстий и требований, предъявляемых ко шву в отношении плотности.

В заклёпочных соединениях для котлов принимают обычно допускаемое напряжение на скольжение (на 1 *см*² площади заклёпки):

от 500 до 700 *кг/см*² при швах внахлёстку,
» 900 » 1200 » » » с двумя накладками.

При проверке по этим данным, очевидно, надо вести расчёт, как при заклёпках одиночного перерезывания, с допускаемым напряжением от 500 до 700 или от 900 до 1200 *кг/см*².

В таблице 12 приведены допускаемые величины касательных напряжений $[\tau]$ для стали 3 ($\sigma_в = 38 \div 45$ *кг/мм*²), а также допускаемые напряжения на смятие $[\sigma_c]$ для заклёпок по существующим нормам. Таблица относится к гидротехническим и промышленным сооружениям при условии действия статической нагрузки.

В авиастроении употребляют обычно дюралюминовые заклёпки (с пределом прочности на разрыв — около 40 *кг/мм*²); допускаемые

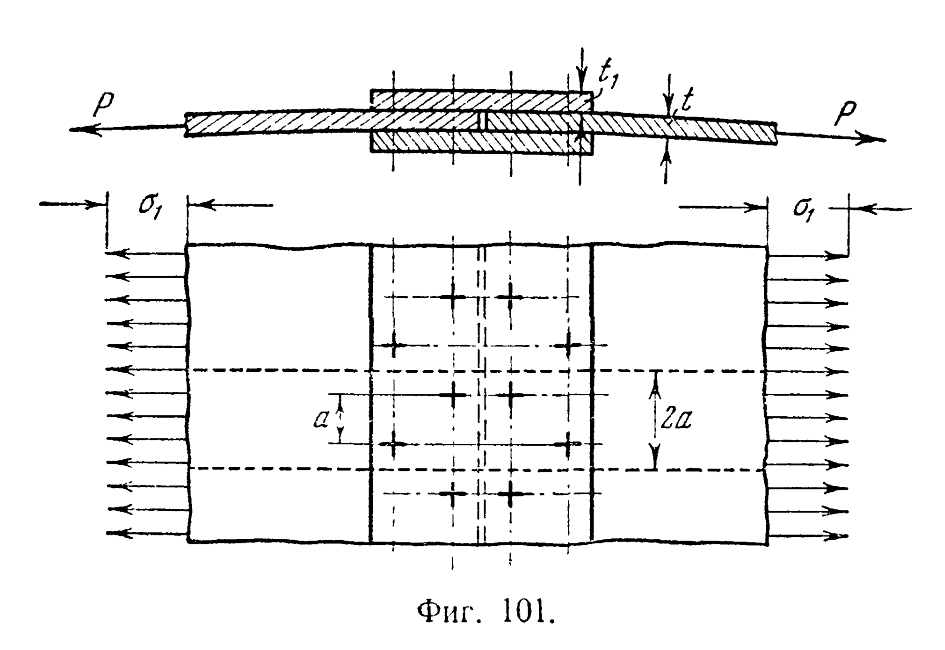
напряжения для них колеблются в пределах $[\tau] = 18 \div 25$ *кг/мм²*, $[\sigma_c] = 60 \div 70$ *кг/мм²* (Т. У. Министерства авиапромышленности 345 СМТУ).

Таблица 12. **Допускаемые напряжения в заклёпочных соединениях.**

Объект	Напряжения *кг/см²*
Основные элементы	$[\sigma] = 1600$, $[\tau] = 1000$
Заклёпки:	
Класс *B* — в рассверленных дырах	$[\tau] = 1400$, $[\sigma_c] = 3200$
Класс *C* — в продавленных дырах	$[\tau] = 1000$, $[\sigma_c] = 2800$

§ 49. Примеры.

Пример 28. Проверить прочность заклёпок в продольном шве листов котла, сомкнутых впритык; шов перекрыт двойными накладками. Диаметр котла $D = 1500$ *мм*; толщина листов $t = 18$ *мм*; толщина накладок $t_1 = 10$ *мм*; диаметр заклёпок $d = 22$ *мм*; $[\tau]_з = 800$ *кг/см²*; $[\sigma_c] = 2000$ *кг/см²*. Заклёпки расположены в два ряда в шахматном порядке (фиг. 101), расстоя-



Фиг. 101.

ние между рядами $b = 75$ *мм*; шаг заклёпок $a = 90$ *мм*. Давление пара $q = 9$ *ат*.

Напряжение в стенках котла (§ 35) $\sigma = \frac{qD}{2t}$; вырежем из котла кольцо длиной по образующей, равной 2 шагам заклёпок: $2a = 180$ *мм*. Концы этого кольца соединены через накладки четырьмя двухсрезными заклёпками по две с каждой стороны стыка. Кольцо растягивается силой $P = \sigma 2at = qDa$.

Проверяем прочность заклёпок на срез:

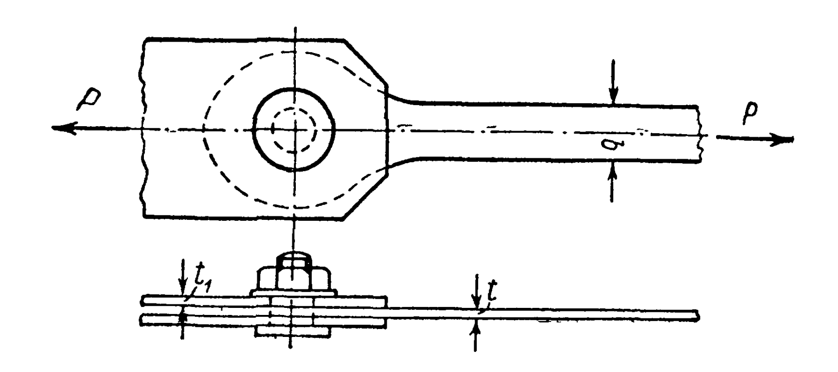
$$\tau = \frac{qDa}{2\frac{\pi d^2}{4} \cdot 2} = \frac{9 \cdot 150 \cdot 9}{3{,}14 \cdot 2{,}2^2} \approx 800 \ кг/см^2 = [\tau]_з.$$

На смятие:

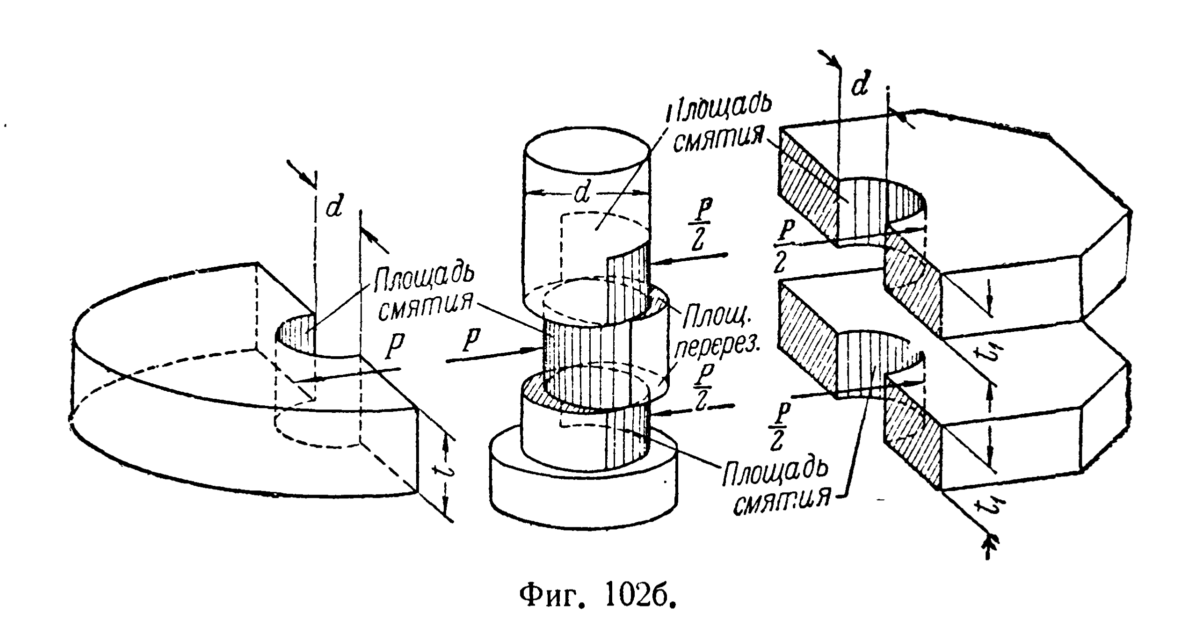
$$\sigma_c = \frac{qDa}{2dt} = \frac{9 \cdot 150 \cdot 9}{2 \cdot 2{,}2 \cdot 1{,}8} = 1520 \ кг/см^2 < [\sigma_c].$$

Проверка на смятие оказывается благоприятнее, чем на срез, несмотря на то, что здесь заклёпки двойного перерезывания. Это объясняется весьма большой толщиной листов.

Пример 29. Болт скрепляет проушину с двумя накладками (фиг. 102а). Толщина стержня проушины $t = 15$ *мм*; найти диаметр болта d и ширину



Фиг. 102а.



Фиг. 102б.

стержня b; стержень растянут силой $P = 12$ *т*; $[\sigma] = 800$ *кг/см²*; $[\tau] = 600$ *кг/см²*, $[\sigma_c] = 1600$ *кг/см²*. Схема работы соединения дана на фиг. 102б.

Ширина стержня определяется из условия прочности на растяжение:

$$b \geqslant \frac{P}{t[\sigma]} = \frac{12\,000}{1{,}5 \cdot 800} = 10 \ см;$$

диаметр болта определяется из условий прочности на срез и смятие:

$$d \geqslant \sqrt{\frac{2P}{\pi [\tau]_з}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12\,000}{\pi \cdot 600}} = 3{,}6\ см$$

и

$$d \geqslant \frac{P}{t\,[\sigma_с]} = \frac{12\,000}{1{,}5 \cdot 1600} = 5\ см.$$

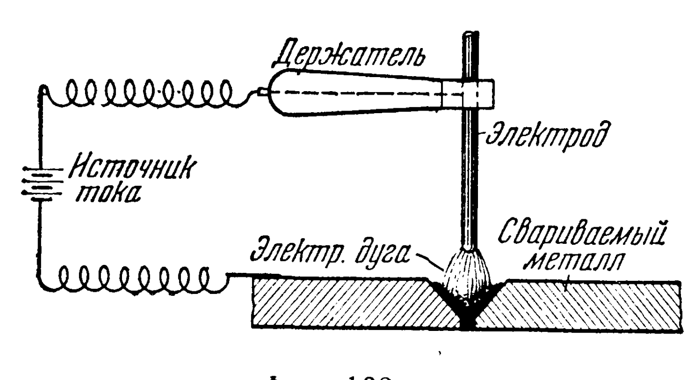
Диаметр должен быть принят равным 5 *см*.

§ 50. Расчёт сварных соединений.

А. При изготовлении металлических конструкций часто применяется сварка с помощью электрической дуги.

Впервые электрическая дуга была открыта русским учёным проф. В. В. Петровым в 1802 г. Обнаружив плавление металла в пламени полученной им электрической дуги, проф. Петров указал на возможность использования этого явления в технике. Однако электрическая дуговая сварка была изобретена лишь в конце XIX века русскими инженерами Н. Н. Бенардосом (1882 г.) и Н. Г. Славяновым (1888 г.) и получила впоследствии широкое распространение во всём мире.

Сущность электросварки по методу Славянова заключается в том, что, расплавляя электрической дугой материал электрода (сталь), заполняют им стык соединяемых элементов, также прогреваемых дугой до температуры плавления. В результате, после остывания расплавленного металла, образуется шов, прочно соединяющий стыкуемые элементы.



Фиг. 103.

Схема сварки показана на фиг. 103. Электрическая дуга горит между металлическим электродом и свариваемым металлом, расплавляя электрод и кромки соединяемых элементов металла, между которыми образуется так называемая сварочная ванна.

Для защиты плавящегося металла от попадания вредных включений из окружающего воздуха на поверхность электрода наносится толстая защитная обмазка, выделяющая при плавлении электрода большое количество шлака и газов, благодаря чему плавящийся металл изолируется от окружающего воздуха.

Этим обеспечивается высокое качество металла сварного шва, механические свойства которого могут резко ухудшиться под влия-

нием кислорода и азота воздуха (при отсутствии обмазки или при тонкой обмазке). С той же целью автоматическая сварка производится под слоем флюса, защищающим плавящийся металл от попадания кислорода и азота воздуха.

При правильном выборе конструкции соединений, материалов и технологии сварки сварные соединения по надёжности не уступают заклёпочным при действии как статических, так и динамических нагрузок (в том числе ударных и знакопеременных). В то же время электросварка имеет ряд преимуществ перед клёпкой, из которых важнейшими являются меньшая трудоёмкость сварочных работ и отсутствие ослабления сечений соединяемых элементов отверстиями. Это даёт значительную экономию средств и металла, помимо экономии, получаемой за счёт большей компактности соединений. Большие экономические выгоды, приносимые электросваркой, и даваемое ею упрощение конструкций привели в последнее время к постепенному вытеснению заклёпочных соединений сварными.

Значительное развитие электросварка получила в СССР благодаря трудам советских учёных Патона, Вологдина, Никитина, Хренова и др., разработавших новые методы сварки, обеспечивающие высокую прочность соединений.

Б. Расчёт сварных соединений, как и заклёпочных, условно ведётся в предположении равномерного распределения напряжений по сечению швов. При этом он тесно связан с технологией сварки; в частности, это находит отражение в величине допускаемых напряжений для материала швов, назначаемых в зависимости от способа сварки (ручная или автоматическая), а также от состава и толщины защитной обмазки электродов.

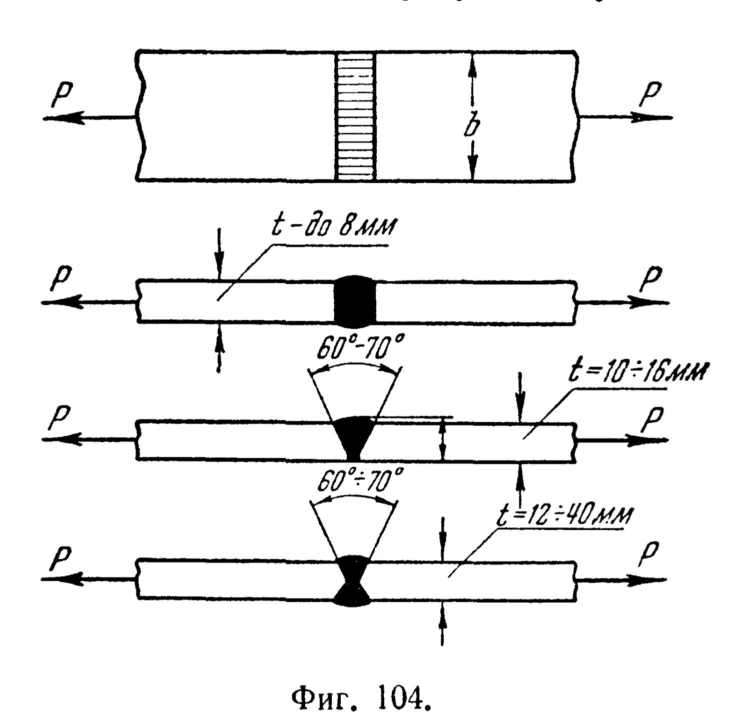
В таблице 13 приведены допускаемые напряжения для сварных швов в конструкциях из стали марки ст. 3 по существующим нормам

Таблица 13. **Допускаемые напряжения при сварке.**

Вид напряжения	Обозначения	Ручная сварка		Автоматическая сварка
		электроды с тонкой обмазкой	электроды с толстой обмазкой	
Растяжение . .	$[\sigma_э]$	1000 *кг/см*²	1300 *кг/см*²	1300 *кг/см*²
Сжатие	$[\sigma_э]$	1100 »	1450 »	1450 »
Срез	$[\tau_э]$	800 »	1100 »	1100 »

(ГОСТ-960-46). При проверке прочности сварных швов учитывается возможный непровар в начале шва и образование кратера в конце. Поэтому расчётная длина шва принимается меньшей, чем действительная или проектная (по техническим условиям 1946 г. на 10 *мм*).

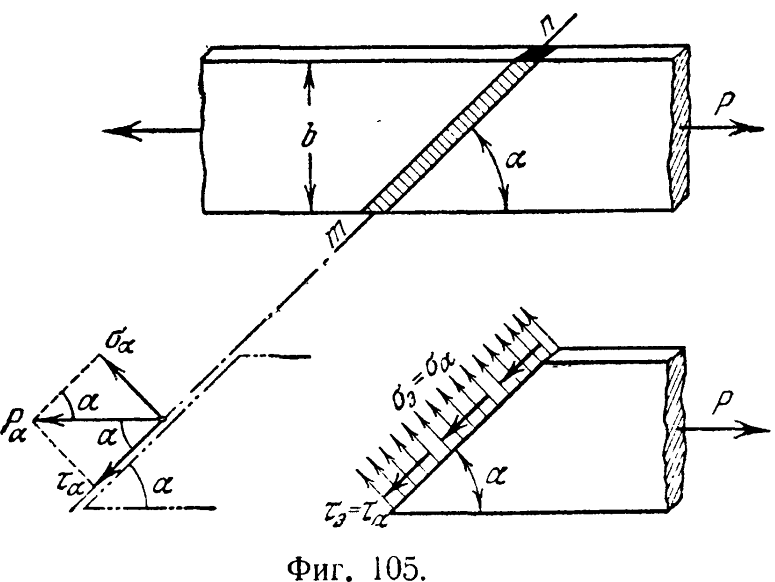
В. Наиболее простым и надёжным видом соединения является *соединение встык*, образуемое путём заполнения зазора между торцами соединяемых элементов наплавленным металлом. Соединение встык осуществляется, в зависимости от толщины соединяемых элементов, по одному из типов, показанных на фиг. 104. Проверка прочности производится на растяжение или сжатие по формуле



Фиг. 104.

$$\sigma_э = \frac{P}{lt} \leqslant [\sigma_э]. \qquad (10.9)$$

Здесь $lt = F_э$ — условная рабочая площадь сечения шва, где расчётная длина шва $l = b - 10$ *мм*, а высота шва h принимается равной толщине свариваемых элементов t.



Фиг. 105.

Поскольку допускаемое напряжение для сварного шва ниже, чем для основного металла, стремятся к увеличению длины стыкового шва. С этой целью применяют соединение встык с косым швом (фиг. 105). Исследования таких соединений, произведённые Институтом электросварки Академии наук УССР, показали, что равнопрочность их с основным металлом всегда обеспечивается.

Проверка прочности косых швов производится и по нормальным и по касательным напряжениям, возникающим по сечению шва mn:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \frac{P}{F_\alpha} \cdot \sin\alpha,$$

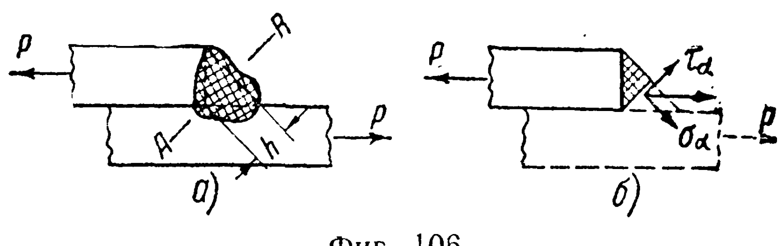
$$\tau_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \frac{P}{F_\alpha} \cdot \cos\alpha.$$

Имея в виду, что $F_\alpha = lt$ (фиг. 106), получим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_э &= \frac{P}{lt} \cdot \sin\alpha \leqslant [\sigma_э], \\ \tau_э &= \frac{P}{lt} \cdot \cos\alpha \leqslant [\tau_э]. \end{aligned}\right\} \qquad (10.10)$$

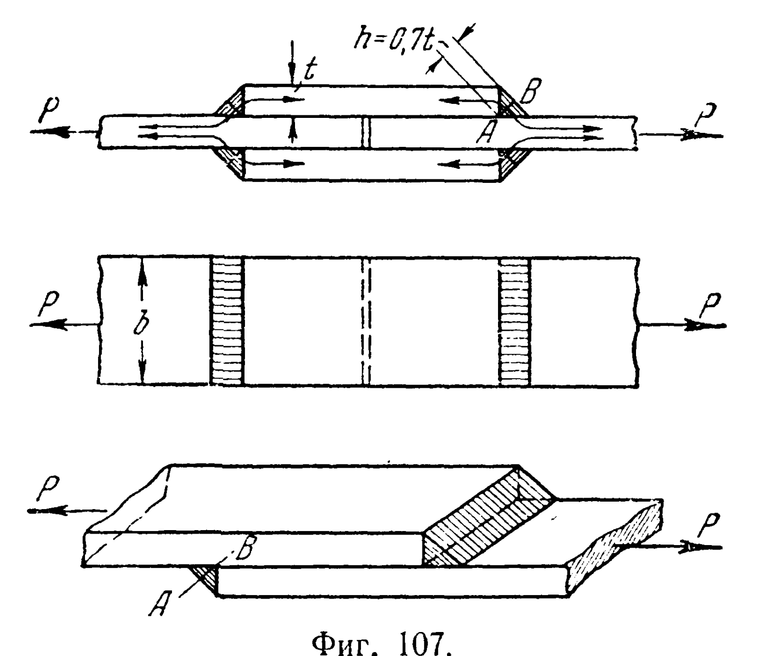
Здесь расчётная длина шва по техническим условиям принимается равной $l = \frac{b}{\sin\alpha} - 10$ *мм*.

Как установлено опытом, наиболее рациональным углом наклона шва к линии действия сил является $\angle 45 \div 50°$. Недостатком соединения косым швом является неудобство центрировки стыкуемых элементов при сварке, поэтому его применяют редко.



Фиг. 106.

Г. Иногда соединение листов производится внахлёстку или встык с перекрытием накладками. Это вызывает необходимость сваривать листы, не лежащие в одной плоскости, что осуществляется при помощи так называемых валиковых (или угловых) швов — лобовых или торцевых (перпендикулярных к направлению действующей силы) и боковых или фланговых (параллельных ей).



Фиг. 107.

Валиковый шов в сечении имеет довольно неопределённую форму (фиг. 106, *а*). В теоретических расчётах на прочность сечение шва принимается в виде равнобедренного треугольника (очерченного пунктиром) с расчётной высотой h [1]).

Соединения торцевыми (лобовыми) швами показаны на фиг. 107. Разрушение таких швов происходит по наиболее слабому сечению AB, как это установлено опытами.

Как это видно из фиг. 106, *б*, полное напряжение, возникающее в сечении AB, может быть разложено на нормальную и касательную составляющие. Поскольку сопротивление стали сдвигу ниже,

[1]) Иногда лобовые швы делают вогнутыми с высотой $h < 0{,}7t$. Катет шва может быть и меньше толщины листа.

чем при растяжении, расчёт лобовых швов производится условно на срез в предположении равномерного распределения касательных напряжений по площади сечения AB. Имея в виду, что на восприятие силы P в этих соединениях (фиг. 107) работают два лобовых шва, верхний и нижний, получим:

$$\tau_э = \frac{P}{2F_э}.$$

Так как площадь сечения шва $F_э = hl = t \cos 45° l \approx 0,7\ tl$, а расчётная длина $l = b - 10$ *мм*, то условие прочности примет вид:

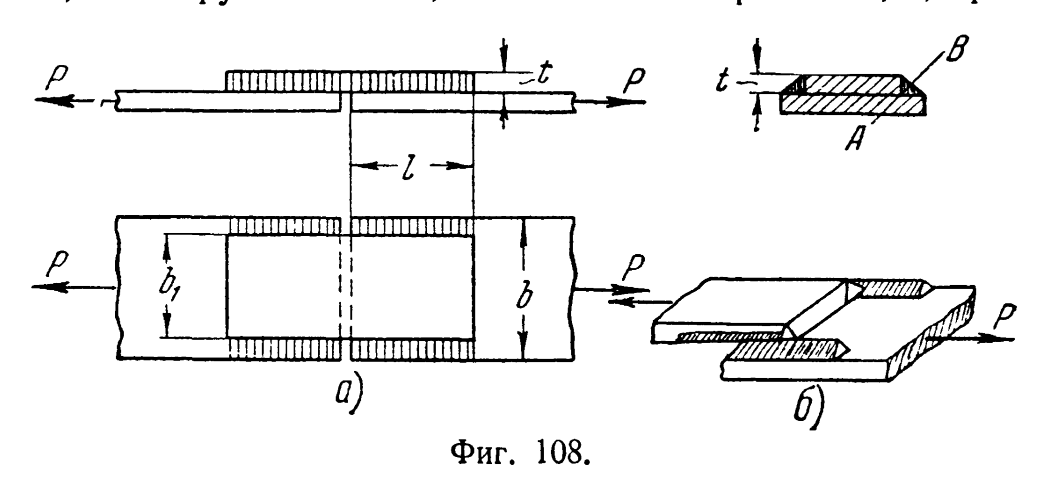
$$\tau_э = \frac{P}{1,4 \cdot tl} \leqslant [\tau_э]. \qquad (10.11)$$

В действительности, материал шва испытывает сложное напряжённое состояние, причём напряжения по сечению AB распределяются неравномерно. Исследования, произведённые методами теории упругости и подтверждённые экспериментально, показали, что в углах шва имеет место высокая концентрация напряжений.

Кроме того, вследствие укорочения швов при остывании в зоне сварки возникают дополнительные напряжения не только в материале швов, но и в основном металле, вызывающие переход его в сложное напряжённое состояние.

Это обстоятельство может повести к снижению пластичности металла в стыке, что делает такое соединение (с лобовыми швами) менее надёжным, особенно при ударных и переменных нагрузках, чем соединение встык без накладок.

Д. Соединение фланговыми (или боковыми) швами показано на фиг. 108, *а*. Разрушение шва, показанное на фиг. 108, *б*, происходит



Фиг. 108.

на значительном его протяжении путём срезывания наплавленного металла в направлении, параллельном шву по наиболее слабой плоскости AB. Условие прочности для двух симметрично расположенных швов таково:

$$\tau_э = \frac{P}{2 \cdot 0,7 \cdot t \cdot l} \leqslant [\tau_э]. \qquad (10.12)$$

Если стык перекрыт двухсторонними накладками, число швов удвоится и условие прочности примет вид:

$$\tau_э = \frac{P}{4 \cdot 0{,}7 \cdot t \cdot l} \leqslant [\tau_э]. \qquad (10.12')$$

Из формул (10.12) и (10.12′) обычно определяют необходимую расчётную длину l фланговых швов. Проектная же длина каждого шва принимается равной $l_0 = l + 10$ *мм*.

Как показали опыты, разрушение фланговых швов происходит по типу разрушений пластичных материалов со значительными остаточными деформациями. Это делает работу фланговых швов более благоприятной, чем работу лобовых швов. Однако следует иметь в виду, что у концов фланговых швов также имеет место высокая концентрация напряжений.

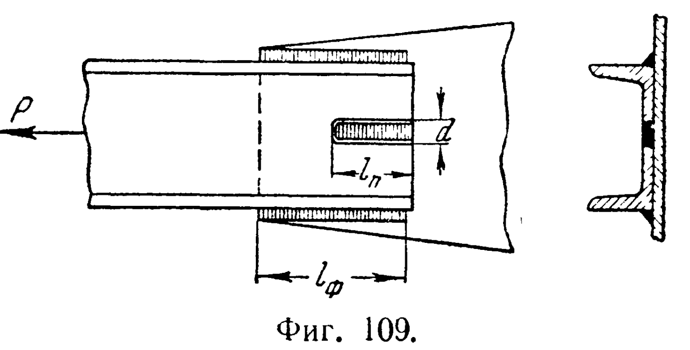
При проектировании часто стремятся обеспечить бóльшую надёжность соединения, применяя вместо сварки встык, или в дополнение к ней, перекрытие стыка накладками, которые привариваются фланговыми или торцевыми швами, а иногда и теми и другими вместе. Как уже указывалось, при переменных и ударных нагрузках такое «усиление» стыка может принести больше вреда, чем пользы.

Что касается расчёта такого комбинированного стыка, то при одновременном применении лобовых и фланговых швов считают, что сопротивление соединения равно сумме сопротивлений всех швов, т. е. $P = P_т + P_ф$, где сопротивление торцевого шва при расчётной длине $l_т$ равно $P_т = 0{,}7\, t \cdot l_т [\tau_э]$, а сопротивление двух фланговых швов $P_ф = 2 \cdot 0{,}7 t \cdot l_ф [\tau_э]$, причём $l_т = b$, где b — ширина накладки. В результате подстановки получаем:

$$P = (0{,}7\, tl_т + 1{,}4\, tl_ф)\,[\tau_э]. \qquad (10.13)$$

Зная длину торцевого шва, определяют длину фланговых швов $l_ф$. При двухсторонних накладках число швов удваивается, т. е. правую часть формулы (10.13) следует удвоить.

Так как торцевые швы более жёстки, то при совместной работе с фланговыми они перегружаются, что ведёт к неравномерной работе соединения. Если учесть, что в таком соединении и термические напряжения достигают больших значений, то устройства такого стыка следует избегать.



Фиг. 109.

Е. Иногда при соединении внахлёстку в дополнение к фланговым швам применяют *прорезные* швы, осуществляемые путём наплавки металла в узкую прорезь, сделанную в одном из соединяемых элементов параллельно действующему на соединение усилию (фиг. 109).

При длине прорезного шва $l_п$ и ширине прорези d сопротивление такого шва срезу равно:

$$P_п = [\tau_э] l_п d,$$

где $P_п$ — усилие, приходящееся на прорезной шов.

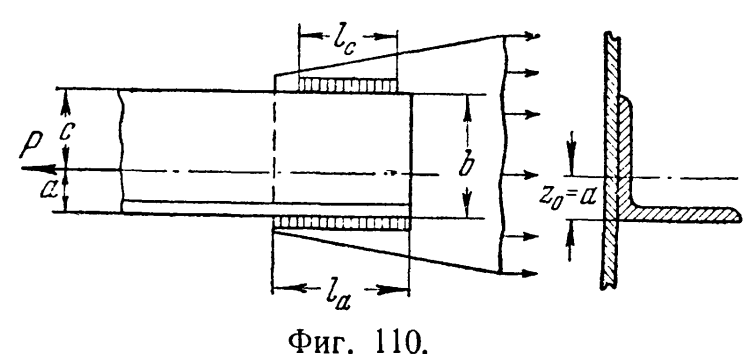
В комбинированном соединении с фланговыми швами для записи расчётного условия принимают, что $P = P_ф + P_п$, или

$$P = (2 \cdot 0{,}7 \cdot t l_ф + l_п \cdot d) [\tau_э]. \qquad (10.14)$$

Задавшись размерами одного из швов (обычно флангового), находят необходимую длину другого. При этом ширина прорези d принимается равной двойной толщине прорезанного металла, длина — не более двадцати толщин.

Недостатками соединения с прорезными швами являются: 1) ослабление сечения прорезями вследствие неизбежного непровара и 2) высокая концентрация напряжений в основном металле в зоне сварки, могущая повести в некоторых случаях к возникновению трещин около углов прорезного шва. Поэтому такое соединение может применяться лишь в случаях, когда стык не предназначен для работы при переменных и ударных нагрузках.

В заключение заметим, что в том случае, когда приходится прибегать к соединению внахлёстку, лучше всего ограничиться одними фланговыми швами, избегая комбинированных соединений.



Фиг. 110.

Ж. При сварке элементов металлических конструкций встречается необходимость приварки элементов, например уголков, для которых линия действия силы не проходит посредине привариваемой полки. В этом случае приходится применять два фланговых шва разной длины или разной высоты. Общая длина швов определяется величиной передаваемого усилия, соотношение же их длин зависит от положения линии действия усилия.

На фиг. 110 изображено прикрепление уголка к листу; сумма длин фланговых швов l_a и l_c определяется уравнением

$$\tau_э = \frac{P}{0{,}7\ t l_a + 0{,}7\ t l_c} \leqslant [\tau_э].$$

Отсюда

$$l_a + l_c = \frac{P}{0{,}7\ t [\tau_э]} = l_ф.$$

С другой стороны, усилия, приходящиеся на каждый из двух швов, распределяются обратно пропорционально расстояниям от линии

действия силы P, проходящей через центр тяжести сечения уголка; поэтому

$$\frac{l_a}{l_c}=\frac{c}{a}.$$

Зная сумму длин и их отношение, определяем рабочую длину каждого шва. Проектные длины швов принимаются на 10 *мм* больше.

§ 51. Примеры.

Пример 30. Рассчитать растянутый сварной стык двух листов сечением 12×250 *мм*, перекрытый двумя накладками, из условия равнопрочности соединения с основным металлом при допускаемых напряжениях:

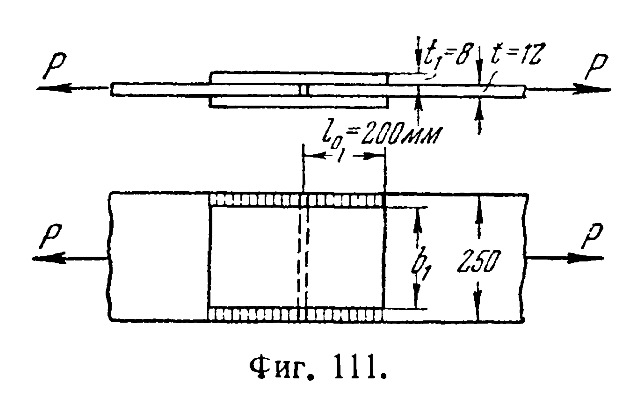
на растяжение основного металла $[\sigma]=1600$ *кг/см*²,
» срез металла швов $[\tau_э]=1100$ »

Допускаемая нагрузка на стык из условия прочности листов на растяжение:

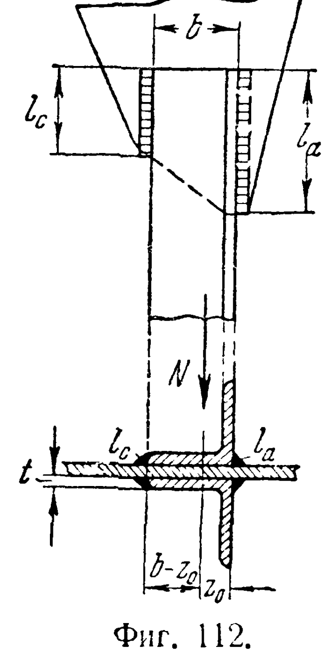
$$P=[\sigma]F=1600\cdot 1{,}2\cdot 25=48\,000 \text{ кг}.$$

Прикрепление накладок лучше всего осуществить с помощью фланговых швов (фиг. 111).

Для размещения фланговых швов примем ширину накладок $b_1=220$ *мм*. Так как, по условию равнопрочности, площадь сечения двух



Фиг. 111.



Фиг. 112.

накладок должна быть не менее площади сечения листа, т. е. $2b_1t_1>F$, то толщина накладки:

$$t_1\geqslant\frac{F}{2b_1}=\frac{1{,}2\cdot 25}{2\cdot 22}=0{,}68 \text{ см}.$$

Примем $t_1=8$ *мм*. Необходимая рабочая длина фланговых швов [формула (10.12)]

$$l\geqslant\frac{P}{4\cdot 0{,}7\cdot t_1[\tau_э]}=\frac{48\,000}{2{,}8\cdot 0{,}8\cdot 1100}=19{,}5 \text{ см}.$$

Полная длина флангового шва по техническим условиям должна быть принята:

$$l_0=l+10 \text{ мм}=195+10 \text{ мм}=205 \text{ мм}.$$

Примем $l_0=200$ *мм*.

Пример 31. Определить необходимую длину фланговых швов для прикрепления стержня фермы, состоящего из двух равнобоких уголков $75\times 75\times 8$ (фиг. 112). Растягивающее усилие $N=32$ *т*. Допускаемое напряжение на срез швов $[\tau_э]=1100$ *кг/см*².

Усилие, приходящееся на один уголок и приложенное в центре тяжести сечения, $P = 0{,}5 \cdot 32 = 16$ *т*. Расстояние от обушка уголкового сечения до его центра тяжести (по сортаменту) $a = z_0 = 2{,}15$ *см*, а от края полки $c = b - z_0 = 7{,}5 - 2{,}15 = 5{,}35$ *см*.

Общая длина фланговых швов, необходимая для прикрепления уголка к косынке:

$$l = l_a + l_c = \frac{P}{0{,}7t \cdot [\tau_э]} = \frac{16\,000}{0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 1100} = 26 \text{ см}.$$

Имея в виду, что отношение $l_a/l_c = c/a$, получим:

$$l_a = \frac{c}{a} \cdot l_c = \frac{5{,}35}{2{,}15} l_c, \qquad \text{или} \qquad l_a = 2{,}49 l_c.$$

Зная сумму $l_a + l_c$ и их отношение, находим:

$$2{,}49 l_c + l_c = 26 \text{ см}, \quad \text{откуда} \quad l_c = \frac{26}{3{,}49} = 7{,}45 \text{ см},$$

$$l_a = 2{,}49 l_c = 2{,}49 \cdot 7{,}45 = 18{,}55 \text{ см}.$$

Так как размещение швов столь различной длины вызывает иногда конструктивные неудобства, то можно уменьшить длину шва со стороны обушка l_a, увеличив соответственно его толщину. Приняв высоту катета шва $t_a = 12$ *мм*, можно уменьшить длину его в отношении $\frac{t_a}{t} = \frac{12}{8} = 1{,}5$. Тогда

$$l_a = \frac{18{,}55}{1{,}5} = 12{,}3 \text{ см}.$$

Учитывая возможные непровары, примем проектные размеры швов:

$$l_a = 140 \text{ мм} \qquad t_a = 12 \text{ мм}$$

$$l_c = 90 \text{ »} \qquad t_c = 8 \text{ »}$$

§ 52. Расчёт врубок.

С напряжениями скалывания и смятия приходится встречаться при расчётах прочности деревянных сопряжений — врубок.

Дерево, как материал неоднородный, оказывает различное сопротивление одним и тем же деформациям в зависимости от направления сил по отношению к волокнам. В отношении смятия и срезывания обычно различают сопротивление этим двум деформациям вдоль волокон и поперёк волокон.

В таблице 14 приведены в качестве примера данные о сопротивлении дерева скалыванию. Допускаемые напряжения для дерева

Таблица 14. **Предел прочности при скалывании в** ***кг/см²***.

Порода	Вдоль волокон	Поперёк волокон
Сосна	60	30
Дуб	90	—

во врубках зависят от породы дерева и характера конструкции. Применительно к нормам их можно назначать по данным таблицы 15. Отклонения в ту или другую сторону (на 25—30%, о чём подробно сказано в нормах) стоят в зависимости от сорта дерева, степени влажности, условий работы конструкций и пр.

Таблица 15. **Данные о допускаемых напряжениях в *кг/см²*.**

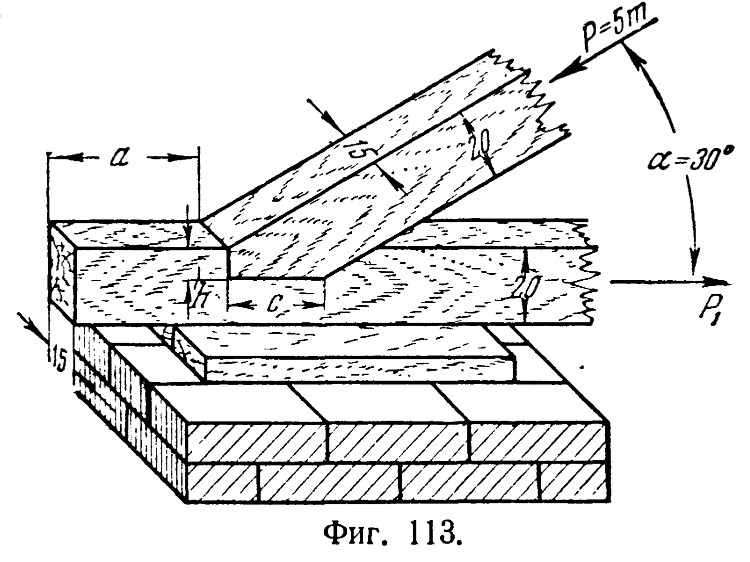
Вид напряжения	Обозначения	Сосна	Дуб
Растяжение	$[\sigma]$	100	130
Сжатие вдоль волокон и смятие торца	$[\sigma_c]$	120	150
Смятие во врубках вдоль волокон	$[\sigma_{см}]$	80	110
Смятие перпендикулярно к волокнам (на длине >10 *см*)	$[\sigma_{см}]_{90}$	24	48
Скалывание во врубках вдоль волокон	$[\tau]$	5—10	8—14
Скалывание во врубках поперёк волокон	$[\tau]_{90}$	6	8
Изгиб	$[\sigma_и]$	120	150
Скалывание при изгибе	$[\tau_и]$	20	28

При смятии (или скалывании) под углом α к направлению волокон допускаемое напряжение имеет промежуточное значение между $[\sigma_{см}]$ и $[\sigma_{см}]_{90}$ или $[\tau]$ и $[\tau]_{90}$ и определяется по условной формуле:

$$[\sigma_\alpha] = \frac{[\sigma_{см}]}{1 + \left\{\frac{[\sigma_{см}]}{[\sigma_{см}]_{90}} - 1\right\} \cdot \sin^3 \alpha}. \qquad (10.15)$$

При действии скалывающих сил в тангенциальной плоскости под углом α к направлению волокон допускаемое напряжение определяется по подобной же формуле, где вместо $[\sigma_{см}]$ берётся $[\tau]$.

Приёмы проверки прочности врубки покажем на примере.



Фиг. 113.

Пример 32. Стропильная нога (фиг. 113) упирается в затяжку под углом $\alpha = 30°$; усилие в ноге $P = 5$ *т*; определить размеры врубки ноги в затяжку и длину выпущенного за врубку конца затяжки. Материал — сосна. Размеры брусьев 20×15 *см*.

Конец затяжки испытывает скалывание вдоль волокон горизонтальной проекцией P_1 силы P:

$$P_1 = P \cos 30° = 5 \cdot 0{,}865 = 4{,}325 \text{ т}.$$

При ширине затяжки $b = 15$ *см* и длине скалывания a условие прочности имеет вид:

$$\frac{P_1}{ba} \leqslant [\tau], \quad \text{или} \quad a \geqslant \frac{P_1}{b[\tau]} = \frac{4325}{15 \cdot 10} = 29 \text{ см}.$$

Та же сила P_1 производит смятие вертикальной плоскости врубки. Для затяжки это будет смятие вдоль волокон, для ноги же — смятие по сечению под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению волокон. Вычислим допускаемое напряжение:

$$[\sigma_\alpha] = \frac{[\sigma_{см}]}{1 + \left\{\frac{[\sigma_{см}]}{[\sigma_{см}]_{90}} - 1\right\}\sin^3\alpha} = \frac{80}{1 + \left(\frac{80}{24} - 1\right)\sin^3 30^\circ} = 63 \text{ кг/см}^2.$$

Глубина врубки h определится из условия, чтобы сминающая сила была меньше или равна сопротивлению врубки смятию. Площадь смятия — прямоугольник высотой h, шириной b; условие прочности имеет вид:

$$\sigma_\alpha = \frac{P_1}{bh} \leqslant [\sigma_\alpha], \quad \text{откуда} \quad h \geqslant \frac{P_1}{b[\sigma_\alpha]} = \frac{4325}{15 \cdot 63} \approx 4{,}6 \text{ см}.$$

Необходимо далее проверить смятие затяжки перпендикулярно к волокнам силой P_2 — вертикальной проекцией силы P:

$$P_2 = P\cos 60^\circ = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5 \text{ т}.$$

Длина площади смятия c определится из условия $\sigma_{см_{90}} = \frac{P_2}{bc} \leqslant [\sigma_{см}]_{90}$, откуда

$$c \geqslant \frac{P_2}{b[\sigma_{см}]_{90}} = \frac{2500}{15 \cdot 24} \approx 7 \text{ см}.$$

§ 53. Чистый сдвиг. Определение главных напряжений и проверка прочности.

В предыдущих параграфах мы рассмотрели ряд широко применяющихся на практике соединений, работающих на сдвиг (заклёпочные, болтовые, сварные соединения, врубки).

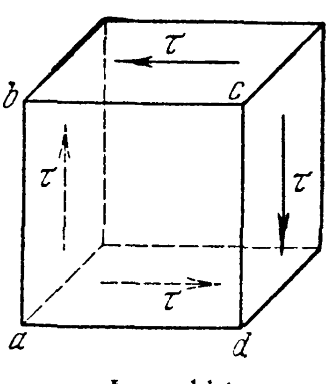
Расчёт таких соединений, как это уже указывалось, в значительной мере является условным. Проверка прочности на сдвиг обычно производится в предположении равномерного распределения касательных напряжений по площади сечения по формуле

$$\tau = \frac{P}{F} \leqslant [\tau]. \tag{10.2}$$

Чтобы установить величину допускаемого напряжения $[\tau]$, нам нужно было бы найти, руководствуясь опытом, величину предела прочности и предела текучести для стержня, в сечениях которого возникали бы только касательные напряжения, и, задавшись затем коэффициентом запаса, назначить величину допускаемого касательного напряжения $[\tau]$. Однако такой опыт поставить нельзя, так как при испытании на срез соединительного элемента (болт, заклёпка и т. п.) в поперечных его сечениях будут возникать не только

касательные, но и нормальные напряжения (§ 47), и деформация будет сложной.

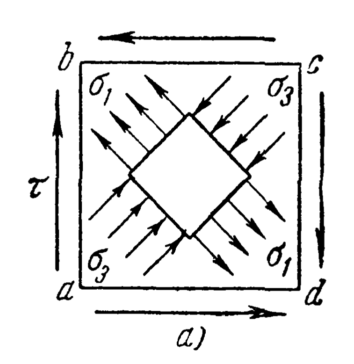
Это заставляет нас исходить при установлении величины допускаемого напряжения [τ] в общем случае не из рассмотрения достаточно сложных действительных условий работы заклёпочных или иных видов соединений, а из некоторых общих теоретических соображений. Теоретическое значение [τ] при установлении норм, конечно, корректируется данными опытов.

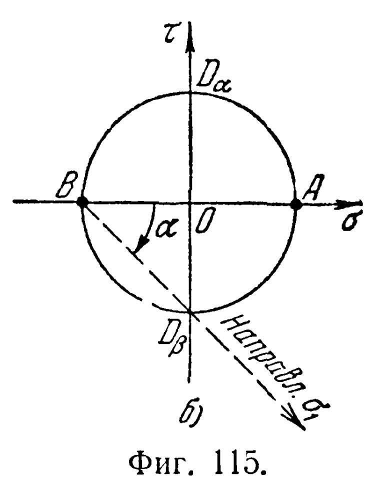


Фиг. 114.

Пусть мы имеем малый элемент материала, по *гранями которого действуют только касательные напряжения* (фиг. 114). Такой вид плоского напряжённого состояния называется *чистым* сдвигом. Пусть, кроме того, допускаемое нормальное напряжение [σ] для материала известно, и требуется найти величину допускаемого касательного напряжения [τ], написав условие прочности для рассматриваемого элемента.

Как известно (см. главы VII и VIII), для любой точки напряжённого материала можно найти главные площадки и главные напряжения (§ 34); поэтому задачу расчёта на сдвиг можно свести к задаче проверки прочности при сложном напряжённом состоянии (§ 42).





Фиг. 115.

Для решения поставленной задачи найдём величины главных напряжений и проследим применение рассмотренных в § 43 теорий прочности.

Заметим, что по закону парности касательных напряжений [§ 36, формула (7.8)] касательные напряжения, действующие по вертикальным и горизонтальным граням элемента, одинаковы. По фасадной грани *abcd* нет никаких напряжений. Следовательно, это — одна из главных площадок, на которой главное напряжение равно нулю.

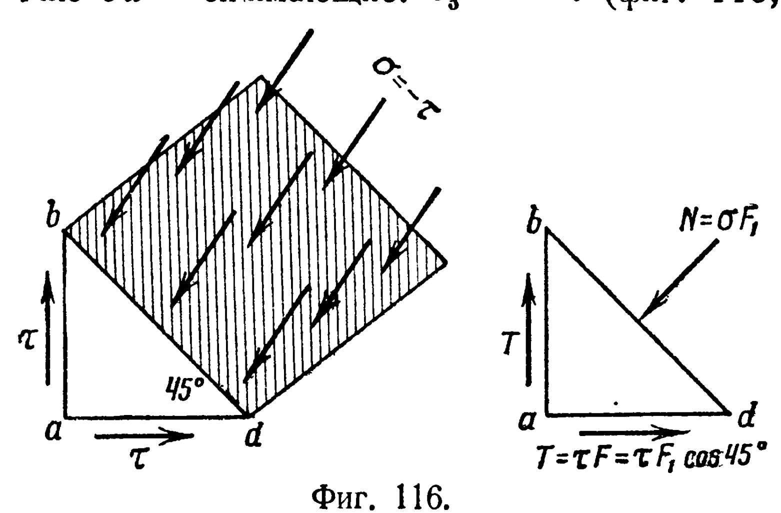
Для определения направления и величины двух других главных напряжений воспользуемся построением круга напряжений, что можно сделать, если известны напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам (фиг. 115, *б*). От точки O, поскольку нормальные напряжения при гранях элемента (фиг. 114) равны нулю, отложены: вверх — отрезок OD_α, равный $\tau_{ab} = \tau$, и вниз — OD_β, равный $\tau_{bc} = -\tau$. Так как точки D_α и D_β лежат на круге, то радиус его равен $OD_\alpha = \tau$.

Отрезки OA и OB определяют величины главных напряжений σ_1 и σ_3 и равны радиусам круга, а направление BD_β, составляющее угол 45° с нормалью к площадке bc, совпадает с направлением σ_1. Следовательно, применяя обозначения § 34, имеем:

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Напряжение по фасадной грани $abcd$ $\sigma_2 = 0$.

Таким образом, если рассечь наш элемент (при условии, что грань $abcd$ — квадрат) диагональными плоскостями, то по сечению ac будут действовать растягивающие напряжения $\sigma_1 = \tau$, а по сечению bd — сжимающие: $\sigma_3 = -\tau$ (фиг. 115, *а*). Это можно было бы доказать и иначе, не пользуясь построением круга напряжений, а рассматривая условия равновесия отсечённой части (фиг. 116). Такое доказательство рекомендуется читателям выполнить самостоятельно.



Фиг. 116.

Следовательно, чистый сдвиг эквивалентен комбинации двух равных по числовой величине нормальных напряжений — одного растягивающего и другого сжимающего. Каждое из этих напряжений равно по числовой величине касательному напряжению, вызывающему чистый сдвиг; площадки, по которым действуют главные (нормальные) напряжения, составляют угол 45° с площадками действия только касательных напряжений.

Если мы выделим элемент из параллелепипеда $abcd$ плоскостями, перпендикулярными к диагоналям ac и bd (фиг. 115, *а*), то этот элемент будет подвергаться растяжению в направлении bd напряжениями σ_1 и сжатию в направлении ac напряжениями σ_3.

В § 33 мы выяснили, с какими *видами* деформаций связаны нормальные и касательные напряжения. Первым соответствовало удлинение или укорочение, вторым — сдвиг. Теперь мы видим, что такого резкого разграничения провести нельзя. Деформация сдвига непременно сопровождается и деформациями растяжения и сжатия.

Как видно по фиг. 115, *а*, из элемента, подвергающегося по его граням действию *только* касательных сил, можно выделить новый элемент, по граням которого действуют *только* нормальные напряжения. Таким образом, весь элемент, изображённый на фиг. 114, испытывает деформацию чистого сдвига, а *материал* этого элемента в то же время претерпевает в некоторых направлениях растяжение или сжатие.

Зная главные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 и допускаемое напряжение для материала нашего элемента при простом растяжении $[\sigma]$, мы можем составить условие прочности для этого элемента, применяя ту или иную из изложенных выше теорий. По теории наибольших нормальных напряжений проводить проверку прочности не следует, так как она устарела. Поэтому мы начнём решение вопроса о проверке прочности при чистом сдвиге с применения теории наибольших относительных удлинений, которая применялась в машиностроении более полувека, хотя, строго говоря, она неприменима к пластичным материалам.

В этом случае (§ 43) условие прочности принимает вид:

$$[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leqslant [\sigma].$$

Подставляя значения $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = -\tau$, получаем:

$$[\tau - \mu(-\tau)] \leqslant [\sigma], \quad \text{или} \quad \tau(1+\mu) \leqslant [\sigma].$$

Отсюда величина касательных напряжений при чистом сдвиге должна удовлетворять условию:

$$\tau \leqslant \frac{[\sigma]}{1+\mu} = [\tau]. \tag{10.16}$$

Дробь, стоящая в правой части неравенства, представляет собой допускаемую величину касательного напряжения $[\tau]$ при чистом сдвиге. Для стали $\mu \approx 0{,}3$, поэтому

$$[\tau] = (0{,}7 \div 0{,}8)[\sigma].$$

Если же мы возьмём за основу третью теорию прочности (наибольших касательных напряжений), то получим:

$$[\sigma_1 - \sigma_3] \leqslant [\sigma] \quad \text{или} \quad [\tau - (-\tau)] \leqslant [\sigma].$$

Отсюда

$$\tau \leqslant \frac{[\sigma]}{2} = [\tau] \quad \text{и} \quad [\tau] = 0{,}5\,[\sigma]. \tag{10.17}$$

Наконец, по четвёртой теории прочности (энергетической) имеем:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leqslant [\sigma],$$

или

$$\sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2} \leqslant [\sigma]$$

и

$$\tau \leqslant \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = [\tau];$$

отсюда

$$[\tau] = 0{,}57\,[\sigma] \approx 0{,}6\,[\sigma]. \tag{10.18}$$

Мы видим, что результаты, полученные по различным теориям прочности, существенно отличаются друг от друга. Поэтому вопрос

о выборе той или иной теории приобретает важное практическое значение.

Прежде расчётные формулы составлялись по теории наибольших удлинений; тогда за допускаемое касательное напряжение принимали величину $[\tau]=0{,}8\,[\sigma]$. В настоящее время надо считать для пластичных материалов наиболее достоверной энергетическую теорию, по которой соотношение между $[\tau]$ и $[\sigma]$ выражается формулой

$$[\tau]=0{,}6\,[\sigma].$$

Значит ли это, как иногда думают, что применение энергетической теории должно вызвать снижение допускаемой величины касательных напряжений и увеличение расхода материала? Такое предположение совершенно неверно; наоборот, правильное применение новой теории прочности должно привести к повышению допускаемого напряжения, к ещё лучшему использованию материала.

Это легко показать на следующем примере. Сравним нормы допускаемых напряжений для металлических конструкций в период широкого применения теории наибольших относительных удлинений (примерно 1910—1912 гг.) и современные нормы.

Наряду с применением специальных сталей (ДС, малолегированные и др.) для изготовления металлических конструкций и теперь часто применяется та же сталь, которая применялась и в 1912 г. (ст. 3 — с пределом прочности около 4000 *кг/см*^{2} и пределом текучести около 2400 *кг/см*^{2}).

Допускаемые напряжения в 1912 г. имели следующие значения: для нормальных напряжений $[\sigma]=1000$ *кг/см*^{2}, для касательных напряжений $[\tau]=0{,}8\;[\sigma]=800$ *кг/см*^{2}. Как надлежит изменить эти нормы в настоящее время, когда мы применяем энергетическую теорию прочности? Следует ли считать, что, принимая за основное допускаемое напряжение значения $[\sigma]=1000$ *кг/см*^{2}, мы для $[\tau]$ должны принять величину $[\tau]=0{,}6\;[\sigma]=600$ *кг/см*^{2}?

Это было бы *грубой ошибкой*. Величина $[\tau]=800$ *кг/см*^{2} *оправдана практикой*, опытом проектирования конструкций, поэтому снижать её мы не имеем никаких оснований. А если это так, значит занижены были основные допускаемые напряжения на растяжение $[\sigma]$.

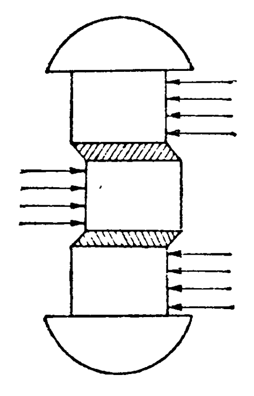
Переход к новой, более совершенной энергетической теории прочности позволяет вскрыть *излишний* запас прочности в величине нормальных напряжений. В настоящее время для стали 3 величина допускаемых напряжений на растяжение и сжатие повышена до 1600 *кг/см*^{2} (ГОСТ-960-46), а допускаемых напряжений на сдвиг — до 1000 *кг/см*^{2}, что и составляет примерно 0,6 $[\sigma]$.

Таким образом, *правильное*, не схоластическое, *опирающееся* на *практику* применение новых теорий прочности не только *не вызывает снижения* допускаемых напряжений, а наоборот, даёт метод для их повышения, для дальнейшего использования излишних запасов прочности.

Что касается величины допускаемых напряжений на срез заклёпок, условия работы которых не отвечают рассмотренному случаю чистого сдвига, то на практике эта величина колеблется довольно сильно ($[\tau] = 0{,}6 \div 0{,}8\ [\sigma]$), в зависимости от способа изготовления заклёпочного соединения. Правильный выбор допускаемых напряжений для заклёпок может быть сделан только с учётом экспериментов над целыми заклёпочными соединениями.

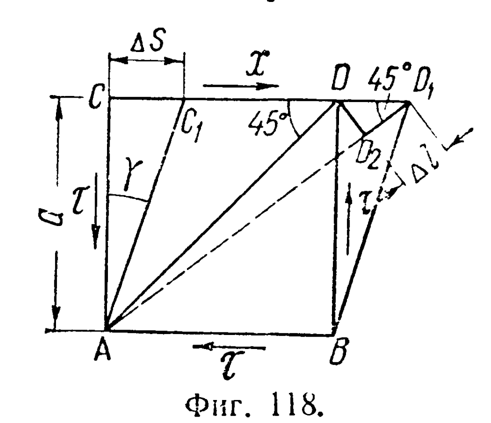
§ 54. Связь между напряжениями и деформацией при чистом сдвиге. Потенциальная энергия сдвига.

В дальнейшем, при изучении кручения, нам придётся встретиться с вопросом о деформациях, которые возникают в элементах материала при действии на него касательных напряжений. Пока речь идёт о расчёте заклёпок и болтов, изучение этих деформаций практического значения не имеет и осложняется вдобавок тем, что во всех этих соединениях мы имеем в действительности гораздо более сложное распределение касательных напряжений, чем то, которое было положено в основу наших расчётов по проверке прочности.



Фиг. 117.

Однако общий характер этой деформации может быть выяснен и на примере хотя бы той же заклёпки. Выделенный из стержня заклёпки очень тонкий слой материала (фиг. 117) стремится при действии на него касательных напряжений *перекоситься*; этот перекос и является характерным для деформации сдвига. Изучить связь этого перекоса с напряжениями τ в заклёпке невозможно, ибо мы не знаем действительного закона распределения касательных напряжений по поперечному сечению заклёпки. Поэтому мы будем изучать деформацию при действии касательных напряжений на элементе, испытывающем чистый сдвиг (фиг. 118).



Фиг. 118.

Если мы закрепим грань AB этого элемента неподвижно, то под действием касательных напряжений грань CD сдвинется параллельно AB на некоторую величину $DD_1 = CC_1 = \Delta s$, называемую *абсолютным* сдвигом. Элемент $ABCD$ перекосится, прямые углы обратятся в острые или тупые, изменившись на величину γ. Этот угол называется *относительным* сдвигом, или углом сдвига, и служит мерой искажения (перекоса) углов прямоугольника. Поскольку в конструкциях мы имеем дело лишь с упругими деформациями, этот угол будет весьма малым.

Относительный сдвиг связан по своей величине с абсолютным сдвигом и расстоянием a между плоскостями AB и CD:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a}, \tag{10.19}$$

т. е. относительный сдвиг равен абсолютному, делённому на расстояние между сдвигающимися плоскостями; выражается он в радианах.

Можно показать, что величина относительного сдвига будет пропорциональна напряжениям τ; таким образом, именно относительный сдвиг, величина перекоса элемента, и является тем, что характеризует числовым образом деформацию сдвига.

Для установления зависимости между γ и τ рассмотрим фиг. 118. При перекосе нашего элемента диагональ AD удлиняется. Это удлинение можно связать, с одной стороны, с действующими напряжениями, с другой — с относительным сдвигом; комбинируя обе зависимости, найдём связь между τ и γ.

На фиг. 118 абсолютное удлинение диагонали мы получим, если из точки A радиусом, равным AD, сделаем засечку на новом положении этой диагонали — AD_1. Тогда получаем прямоугольный треугольник DD_1D_2, в котором сторона DD_1 — абсолютный сдвиг Δs, сторона D_2D_1 — удлинение диагонали Δl; угол при точке D_1 может быть по малости деформаций принят равным 45°. Тогда

$$\Delta l = \Delta s \cos 45^\circ.$$

Относительное удлинение диагонали

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \text{где} \quad l = \frac{a}{\sin 45^\circ}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{a} \cos 45^\circ \sin 45^\circ;$$

так как $\frac{\Delta s}{a} = \gamma$, а $\cos 45^\circ \sin 45^\circ = 0{,}5$, то

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \gamma. \tag{10.20}$$

С другой стороны, относительное удлинение диагонали, вызванное действием главных напряжений $\sigma_1 = \tau$ и $\sigma_3 = -\tau$ (§ 53, фиг. 115), может быть выражено формулой (7.18):

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\tau}{E}(1 + \mu).$$

Подставив это значение ε в формулу (10.20), получим:

$$\frac{\tau}{E}(1 + \mu) = \frac{1}{2} \gamma,$$

откуда

$$\tau = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma. \tag{10.21}$$

Таким образом, относительный сдвиг γ и касательное напряжение τ друг другу пропорциональны, т. е. и при сдвиге напряжение и соответствующая ему относительная деформация связаны законом Гука.

Величину $\frac{E}{2(1+\mu)}$ обозначают буквой G и называют *модулем упругости при сдвиге* или модулем сдвига. Числовые величины G для различных материалов приведены в таблице в конце книги (Приложение VII).

Формула (10.20) принимает вид:

$$\tau = \gamma G, \tag{10.21'}$$

и мы имеем полную аналогию в формулах, связывающих напряжение и относительную деформацию при растяжении и сдвиге:

$$\sigma = \varepsilon E; \quad \tau = \gamma G.$$

Величину G можно вычислить по формуле

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \tag{10.22}$$

но можно найти и прямым путём в опыте на кручение.

Величина *абсолютного* сдвига зависит не только от величины касательных напряжений, но и от размеров выделенного элемента. Назовём площадь граней, по которым действуют касательные напряжения, F; расстояние между параллельными гранями обозначено через a (фиг. 118). Абсолютный сдвиг равен:

$$\Delta s = a\gamma = \frac{a\tau}{G}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{Q}{F},$$

следовательно,

$$\Delta s = \frac{Qa}{GF}. \tag{10.23}$$

Абсолютный сдвиг прямо пропорционален сдвигающей силе, расстоянию между сдвигаемыми гранями и обратно пропорционален площади сечения этих граней и модулю упругости при сдвиге т. е. мы имеем формулу, выражающую закон Гука для деформации сдвига, вполне подобную формуле для вычисления абсолютного удлинения при растяжении:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}.$$

Так как в формуле (10.22) для модуля сдвига из трёх так называемых упругих постоянных E, μ и G независимыми являются лишь две, третья может быть выражена через первые. Эта особенность является характерной для изотропного материала, свойства которого во всех направлениях одинаковы.

Заметим, что при деформации сдвига изменение объёма элемента материала равно нулю. Это следует из формулы (7.19) § 40, так как при чистом сдвиге сумма главных напряжений равна нулю.

Теперь можно подсчитать также и потенциальную энергию при чистом сдвиге. Считая, что сила Q приложена статически, можем выразить работу этой силы на перемещении Δs:

$$A = \frac{1}{2} Q\Delta s$$

(половина вошла в формулу для A, так как сила возрастает от нуля до конечного значения постепенно, — работа выражается площадью треугольника). Подставив значение Δs (10.23), получим:

$$U = \frac{Q^2 a}{2GF} = \frac{\tau^2 aF}{2G}. \qquad (10.24)$$

Поделив на объём $v = aF$, найдём значение удельной потенциальной энергии при чистом сдвиге:

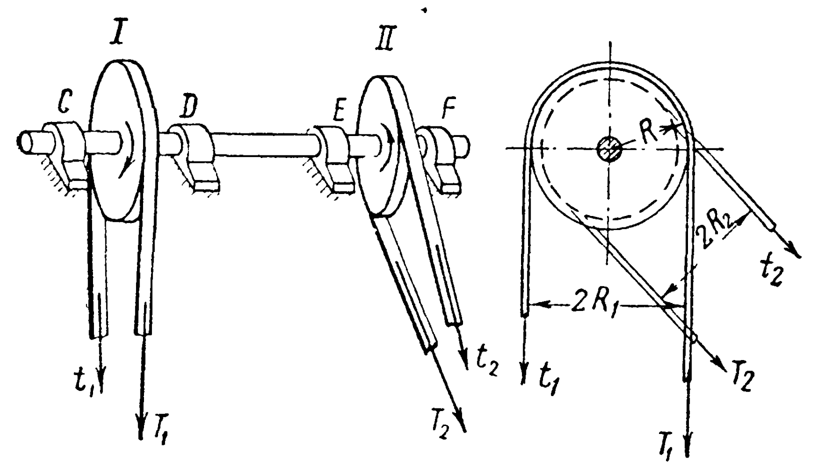
$$u = \frac{U}{\gamma} = \frac{\tau^2}{2G}. \qquad (10.25)$$

К такому же результату можно было притти на основании формулы (7.26) § 41, рассматривая чистый сдвиг как сложное напряжённое состояние при главных напряжениях: $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$.

ГЛАВА XI.
КРУЧЕНИЕ. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ.

§ 55. Понятие о крутящем моменте.

Результаты, которые получены при изучении деформации сдвига, позволяют перейти к решению задачи о проверке прочности при кручении. С кручением на практике приходится встречаться очень часто: оси подвижного состава, трансмиссионные валы, элементы пространственных конструкций, пружины и даже обыкновенный замочный ключ — всё это примеры стержней, работающих на кручение.



Фиг. 119.

Рассмотрим сначала задачу о скручивании валов круглого поперечного сечения.

Представим себе (фиг. 119) вал CF, на который насажены два шкива I и II. Вал поддерживается подшипниками C, D, E и F[1]). Шкив I передаёт валу вращение при помощи

[1]) Подшипники считаем расположенными так, что изгибом вала можно пренебречь.

ремённой передачи от электромотора. Шкив *II* передаёт это вращение станку, с которым он соединён тоже при помощи ремня.

К шкиву *I* приложены силы натяжения ведущей и набегающей ветвей ремня, T_1 и t_1, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси вала. Аналогично, к шкиву *II* приложены силы натяжения ремня T_2 и t_2.

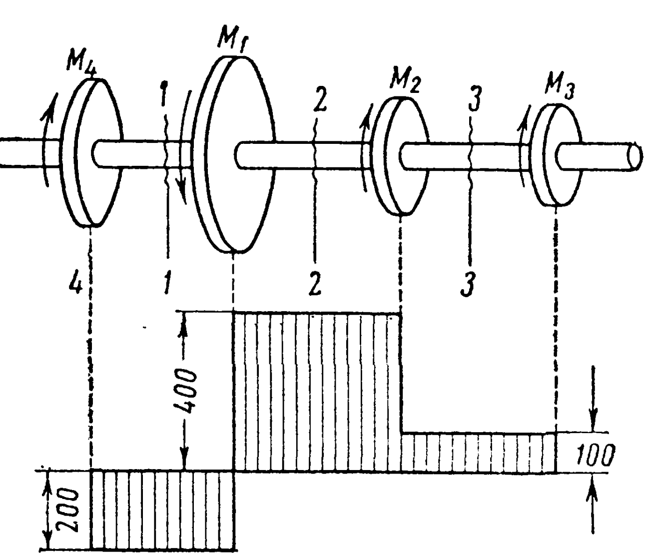
Эти силы, с одной стороны, создают давление на подшипники (как и собственный вес шкивов), а с другой — образуют пары сил, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси вала.

Момент, передающийся от шкива *I* на вал (фиг. 119), будет:

$$M_1 = T_1R_1 - t_1R_1 = (T_1 - t_1)R_1.$$

Аналогично, от шкива *II* на вал передаётся момент M_2, направленный в противоположную сторону и равный

$$M_2 = (T_2 - t_2)R_2.$$



Фиг. 120.

При равномерном ходе машины все силы, действующие на вал, находятся в равновесии; вращающий момент $(T_1 - t_1)R_1$ всё время уравновешивается сопротивляющимся: $(T_2 - t_2)R_2$, т. е.

$$(T_1 - t_1)R_1 = (T_2 - t_2)R_2 = M_к. \qquad (11.1)$$

Участок вала между центрами шкивов подвергается действию двух равных и противоположных пар сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к оси вала: *он скручивается. Деформация кручения, таким образом, вызывается парами сил, лежащими в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня.*

Момент пар, скручивающих вал, называется крутящим моментом. В рассмотренном случае величина его выражается формулой (11.1); но так как натяжения T и t обычно неизвестны, то для вычисления $M_к$ применяется иной путь (§ 56).

Мы рассмотрели тот случай, когда на валу имеются лишь два шкива, передающих ему равные и противоположно направленные моменты $M_к$; тогда часть вала между шкивами скручивалась этим моментом $M_к$.

Бывают более сложные случаи, когда на валу насажено несколько шкивов; один — ведущий, остальные — ведомые; каждый шкив передаёт валу свой момент, и при равномерном ходе машины сумма всех моментов, действующих на вал, равна нулю.

На фиг. 120 показан вал, на который действуют моменты M_1, M_2, M_3, M_4; M_1 — в одну сторону (от ведущего шкива), M_2, M_3,

M_4 — в другую сторону (от ведомых шкивов). При равномерном ходе вала

$$-M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 0.$$

Здесь крутящий момент на разных участках вала будет иметь различную величину. Часть вала слева от сечения *1—1* будет находиться в равновесии под действием момента M_4 и касательных напряжений по сечению *1—1*; таким образом, для этого сечения $M_к$ будет равен M_4. Если же мы возьмём сечение *2—2* между шкивами *1* и *2*, то напряжениям по этому сечению придётся уравновешивать сумму моментов, передаваемых на отсечённую левую часть шкивами *1* и *4*, т. е. крутящий момент равен $M_к = M_4 - M_1$.

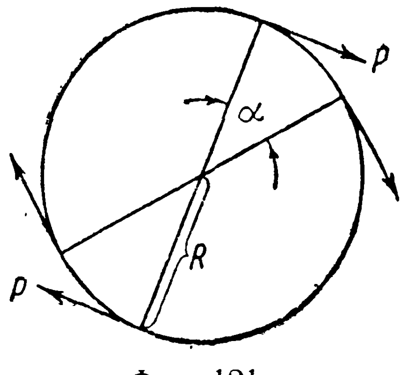
К той же величине крутящего момента для сечения *2—2* мы пришли бы, если бы рассматривали равновесие правой отсечённой части, на которую действуют моменты M_3 и M_2. В этом случае $M_к = M_3 + M_2$; но из условия равновесия

$$M_3 + M_2 = M_1 - M_4.$$

Таким образом, крутящий момент $M_к$ *в сечении 2—2* является одним и тем же по величине, будем ли мы рассматривать равновесие правой или левой части вала. *Он равен сумме моментов, действующих на вал справа или слева от проведённого сечения.* Знак крутящего момента будем считать по знаку внешних моментов, действующих слева от сечения, т. е. при взгляде слева вдоль оси вала момент, действующий по часовой стрелке, считаем положительным.

Величину крутящего момента на различных участках вала можно изобразить графически, построив так называемую *эпюру крутящих моментов*. Для этого под чертежом вала располагаем ось абсцисс и от неё откладываем ординаты, изображающие величину крутящего момента на каждом участке.

Пусть в предыдущем примере $M_1 = +600$ *кгм*; $M_2 = -300$ *кгм*; $M_3 = -100$ *кгм*; $M_4 = -200$ *кгм*. На фиг. 120 изображено распределение крутящих моментов по длине вала.



Фиг. 121.

§ 56. Вычисление моментов, передаваемых на вал.

Для вычисления крутящих моментов необходимо знать моменты, передаваемые на вал каждым шкивом.

Эти моменты можно определить, если нам известны число оборотов вала и передаваемая шкивом мощность. Пусть (фиг. 121) на шкив действует пара сил с моментом M. Эту пару можно себе представить состоящей из двух сил P, приложенных к окружности шкива. При вращении шкива она производит работу, величина

которой в единицу времени равна мощности, передаваемой шкивом.

Вычислим работу пары M при вращении шкива. При повороте его на угол α каждая сила пары пройдёт путь $R\alpha$, где R — радиус шкива; вся пара произведёт работу

$$A = 2PR\alpha = M\alpha.$$

Таким образом, *работа пары сил при повороте на угол α равна моменту пары, умноженному на угол поворота (в радианах).*

Если вал совершает m оборотов в единицу времени, то работа момента будет равна $A = M \cdot 2\pi m$. С другой стороны, работа в единицу времени — это мощность W. Следовательно, крутящий момент может быть выражен через известные мощность и число оборотов вала:

$$M = \frac{W}{2\pi m}. \tag{11.2}$$

Если мощность задана в лошадиных силах $W = N$ *л. с.*, или $W = 75N$ *кгм/сек*, а число оборотов в минуту $m = n$ об/мин., или в секунду $\frac{n}{60}$, то

$$M = \frac{75 \cdot N \cdot 60}{2\pi \cdot n} = \frac{2250 \cdot N}{\pi \cdot n} = 716{,}2 \cdot \frac{N}{n}\ \text{кгм}. \tag{11.3}$$

Мощность может быть задана также в киловаттах $W = K$ *квт*. Так как 1 *квт* равен приближённо 102 *кгм/сек*, то

$$M = \frac{102 \cdot 60}{2\pi} \cdot \frac{K}{n}\ \text{кгм} = 973{,}6\ \frac{K}{n}\ \text{кгм}. \tag{11.4}$$

Из этих формул мы получаем по данным N (или K) и n величину момента, передаваемого каждым шкивом, в *килограммометрах*, после чего находим сечение вала с наибольшим крутящим моментом и по нему определяем необходимые размеры вала (§§ 57 и 59).

§ 57. Определение напряжений при кручении круглого вала.

А. Построив эпюру крутящих моментов, мы можем найти величину крутящего момента в любом сечении вала. Чтобы найти напряжения, вызываемые крутящим моментом в сечении, воспользуемся основным методом решения задач сопротивления материалов — методом сечений.

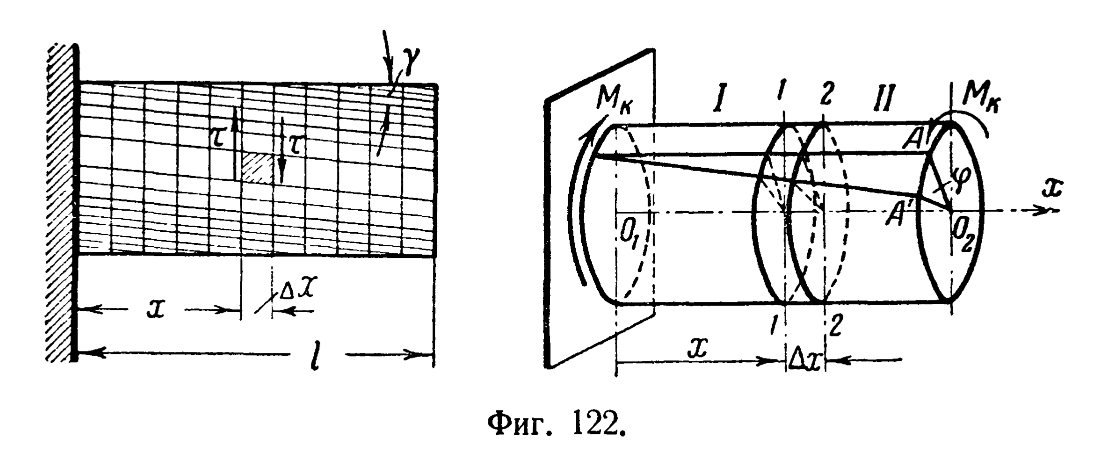
Однако прежде чем приступить к решению поставленной задачи, обратимся к рассмотрению результатов опытных исследований.

Опыты показывают, что при скручивании вала круглого сечения парами $M_к$ (фиг. 122) происходит следующее.

Все образующие поворачиваются на один и тот же угол γ, а квадраты, нанесённые на поверхность вала, перекашиваются, обращаясь в ромбы, т. е. подвергаются деформации сдвига.

Каждое поперечное сечение поворачивается относительно другого вокруг оси вала на некоторый угол, называемый углом закручивания. Величина этого угла пропорциональна величине крутящего момента и расстоянию между сечениями.

Торцевое сечение остаётся плоским, а контуры всех проведённых сечений не искажаются (круги остаются кругами).



Фиг. 122.

Радиусы, нанесённые на торцевом сечении, после деформации не искривляются.

Расстояния между смежными сечениями практически не меняются, т. е. сечения *1—1* и *2—2*, поворачиваясь друг относительно друга на угол $\Delta\varphi$, сохраняют между собой расстояние Δx.

Таким образом, результаты опытов показывают, что при кручении стержень представляет как бы систему жёстких кружков, насаженных центрами на общую ось O_1O_2. При деформации все эти кружки, не меняя своего вида, размеров и взаимных расстояний, поворачиваются один относительно другого.

Перечисленные опытные наблюдения дают основание для принятия следующих *гипотез*:

1. Все поперечные сечения остаются плоскими.
2. Радиусы, проведённые в них, остаются прямыми.
3. Расстояния между сечениями не изменяются.

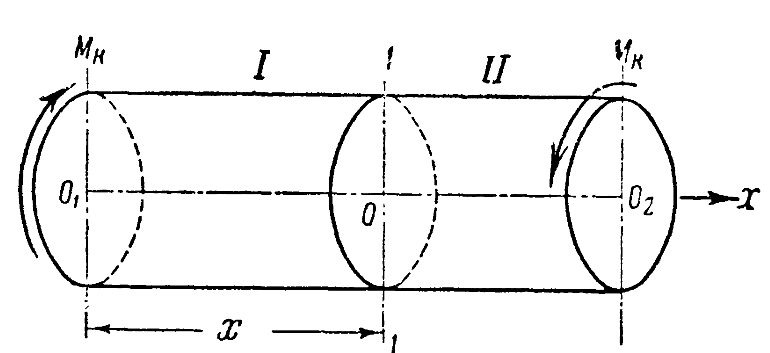
Приемлемость этих гипотез подтверждается тем, что формулы, полученные на их основе, хорошо согласуются с результатами опытов.

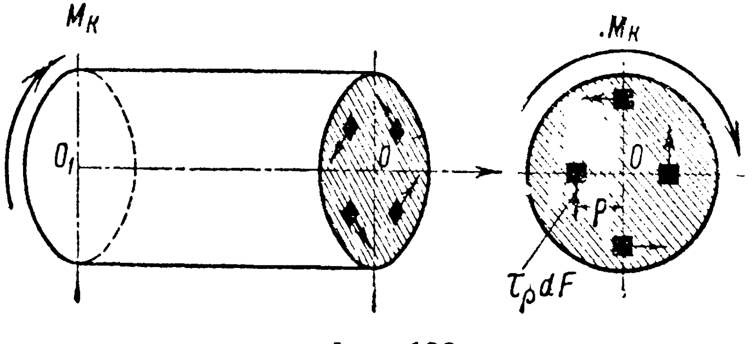
Б. Теперь перейдём к отысканию напряжений, действующих по сечениям, перпендикулярным к оси вала. Разрежем мысленно (фиг. 123) скручиваемый стержень O_1O_2 на две части *I* и *II* сечением *1—1*, перпендикулярным к оси вала и находящимся на расстоянии x от сечения O_1. Отбросим часть *II* стержня и оставим

часть I; на неё действует из внешних сил лишь один момент $M_к$, приложенный в сечении O_1.

Оставленная часть стержня находится в равновесии под действием этого момента и сил в сечении $1-1$, передающихся от отброшенной отсечённой части на оставленную (фиг. 123).

Так как силы в сечении уравновешивают внешнюю пару $M_к$, лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси вала, то они также должны приводиться к паре, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси Ox, т. е. в плоскости сечения $1-1$. Следовательно, эти силы и соответствующие напряжения касательны к сечению и перпендикулярны к радиусам (фиг. 123).





Фиг. 123.

Составим условие равновесия оставленной части I в форме уравнения моментов всех сил относительно оси O_1O:

$$M_к - \sum M_\tau = 0,$$

или

$$\sum M_\tau = M_к.$$

Для вычисления $\sum M_\tau$ — суммы моментов сил, действующих в сечении $1-1$, возьмём любую точку сечения в расстоянии ρ от центра круга и выделим вокруг неё элементарную площадку dF. Тогда усилие, приложенное к ней, будет $dP = \tau_\rho\, dF$, где τ_ρ — касательное напряжение в рассматриваемой точке. Момент же этого усилия относительно точки O равен:

$$dM_\tau = \tau_\rho\, dF\rho.$$

Считая площадку dF бесконечно малой, можно найти сумму моментов всех сил, как определённый интеграл, распространённый по площади сечения:

$$\sum M_\tau = \int_F \tau_\rho\, dF\rho,$$

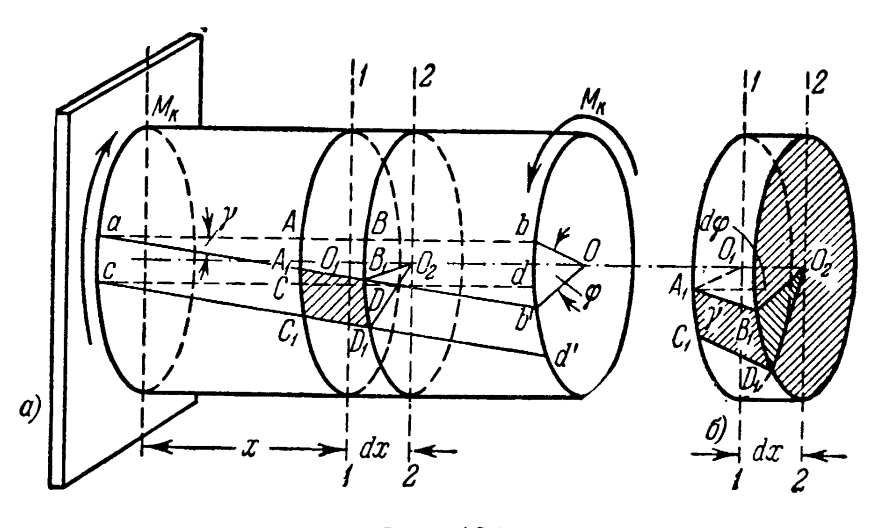
или, используя составленное ранее уравнение равновесия, получим:

$$\int_F \tau_\rho \cdot \rho \cdot dF = M_к. \qquad (11.5)$$

Однако найти из полученного уравнения величину τ мы пока не можем, так как ещё не знаем, как распределяются касательные напряжения по сечению.

В. Уравнения статики не дают возможности довести до конца решение задачи определения напряжений по сечению *1—1*. Задача оказывается статически неопределимой, и для окончания её решения нам придётся обратиться к рассмотрению деформаций стержня, показанных на фиг. 122 и 124.

Выделим (фиг. 124) на поверхности скручиваемого стержня до его деформации двумя смежными образующими ab и cd и двумя контурами смежных сечений *1—1* и *2—2* прямоугольник $ABDC$.



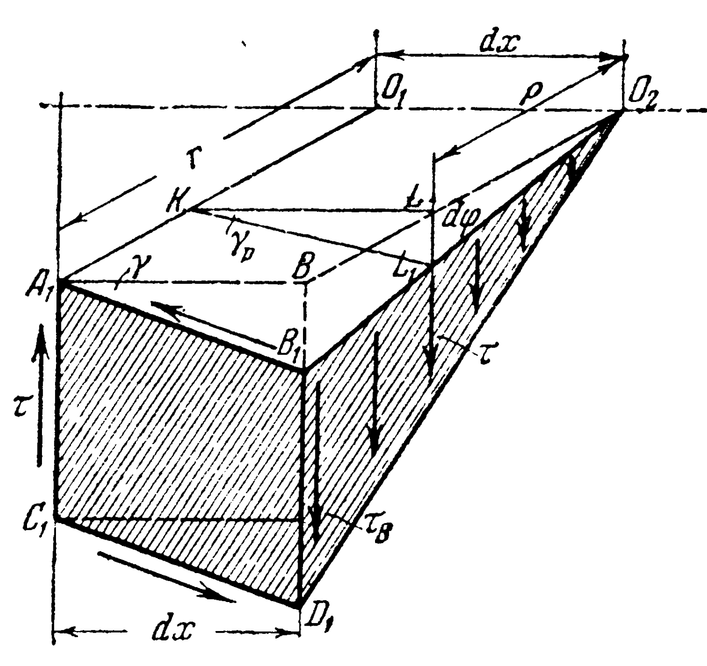
Фиг. 124.

После деформации оба сечения, *1—1* и *2—2*, повернутся относительно защемлённого конца на углы φ_x (сечение *1—1*) и $\varphi_x + d\varphi$ (сечение *2—2*). На основании принятых гипотез оба сечения останутся плоскими, радиусы O_2B и O_1A, O_1C и O_2D останутся прямыми, а расстояние dx между сечениями *1—1* и *2—2* останется без изменения. При таких условиях весь элемент $ABDCO_1O_2$ сместится и *перекосится*, так как его правая грань, совпадающая с сечением *2—2*, повернётся на угол $d\varphi$ относительно левой, совпадающей с сечением *1—1*. Прямоугольник $ABDC$ займёт положение, показанное на фиг. 124 штриховкой. Перекошенный элемент $A_1B_1D_1C_1O_1O_2$ показан на фиг. 125; там же пунктиром изображён вид этого элемента, если бы он не испытал перекоса, т. е. если бы его левая и правая грани обе повернулись на один и тот же угол.

Перекос, вызванный неодинаковым поворотом сечений *1—1* и *2—2*, обращает прямые углы прямоугольника $ABDC$ в тупые и острые; материал нашего элемента испытывает деформацию сдвига (фиг. 122 и 124). Величина этой деформации будет характеризоваться *углом перекоса* — относительным сдвигом; на поверхности стержня в прямоугольнике $A_1B_1D_1C_1$ этот угол будет равен BA_1B_1; он обозначен на фиг. 125 буквой γ.

Как известно, деформация сдвига сопровождается возникновением касательных напряжений по граням перекашиваемого элемента (§ 54).

На фиг. 125 изображены эти напряжения, действующие на площадки, выделенные на правой грани (поперечное сечение 2—2) и горизонтальной поверхности элемента $A_1B_1D_1C_1O_1O_2$. Величину этих напряжений мы можем выразить через относительный сдвиг γ, характеризующий перекос прямоугольника $A_1B_1D_1C_1$, по формуле (10.21): $\tau = \gamma G$.



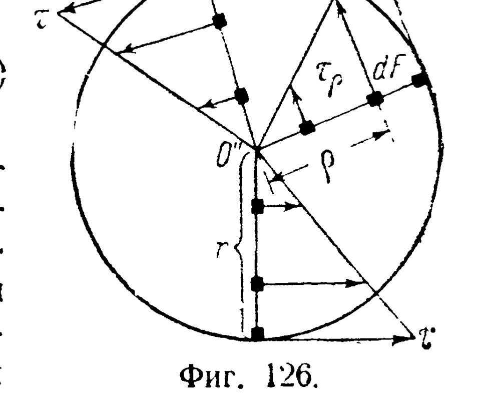
Фиг. 125.

Так как абсолютный сдвиг элемента на поверхности вала равен $BB' = r\,d\varphi$, а относительный сдвиг $\gamma = \frac{BB'}{A_1B} = \frac{r\,d\varphi}{dx}$, то напряжение у точки B_1 будет:

$$\tau_B = G\gamma = rG\frac{d\varphi}{dx}.$$

Найдём теперь напряжение τ_ρ в какой-нибудь другой точке сечения L_1, отстоящей от центра на расстоянии ρ (фиг. 125). Для этого нужно найти величину относительного сдвига, который испытывает материал у точки L_1. На фиг. 125 показан относительный сдвиг — угол перекоса LKL_1, обозначенный γ_ρ. Он будет *меньше*, чем относительный сдвиг γ на поверхности стержня. Повторяя те же рассуждения, что и при вычислении γ, мы найдём, что $\gamma_\rho = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx}$, и получим:

$$\tau_\rho = \rho G\frac{d\varphi}{dx}. \qquad (11.6)$$



Фиг. 126.

Относительный сдвиг и касательное напряжение в каждой точке поперечного сечения скручиваемого стержня *прямо пропорциональны* расстоянию ρ этой точки от центра сечения. Графически этот закон изменения касательных напряжений выражается прямой линией (фиг. 126). Наибольшего значения τ достигают в точках, лежащих у самого края сечения, и обращаются в нуль в центре.

Таким образом, найден закон распределения касательных напряжений по поперечным сечениям скручиваемого стержня.

Г. Величина касательных напряжений теперь может быть найдена из уравнения (11.5), выражающего условие равновесия отсечённой части.

Подставляя вместо τ_ρ его значение (11.6) и вынося за знак интеграла величину $G\frac{d\varphi}{dx}$, постоянную при интегрировании по площади, получим:

$$G\frac{d\varphi}{dx}\int\limits_F \rho^2\,dF = M_к.$$

$\int\limits_F \rho^2\,dF$, т. е. сумма произведений из элементарных площадок на квадраты расстояния их до точки O, называется полярным моментом инерции и обозначается J_p. Тогда

$$G\frac{d\varphi}{dx}\cdot J_p = M,$$

откуда угол закручивания на единицу длины вала (относительный угол закручивания) равен:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_к}{GJ_p}. \tag{11.7}$$

Подставляя это в уравнение (11.6), получим:

$$\tau_\rho = \frac{M_к}{J_p}\rho. \tag{11.8}$$

Наибольшего значения напряжения достигнут в точках сечения у поверхности вала при $\rho = \rho_{max} = r$:

$$\tau_{max} = \frac{M_к\rho_{max}}{J_p} = \frac{M_к r}{J_p}. \tag{11.9}$$

Формулу для τ_{max} можно представить в ином виде:

$$\tau_{max} = \frac{M_к\rho_{max}}{J_p} = \frac{M_к}{\left(\frac{J_p}{\rho_{max}}\right)} = \frac{M_к}{W_p}. \tag{11.10}$$

Отношение $\frac{J_p}{\rho_{max}} = W_p$ называется моментом сопротивления при кручении; так как момент инерции J_p выражается в единицах длины в четвёртой степени, то момент сопротивления W_p измеряется в единицах длины в третьей степени.

§ 58. Вычисление полярных моментов инерции и моментов сопротивления сечения вала.

Для вычисления $J_p = \int\limits_F \rho^2 \, dF$ выделим в сечении кольцевую площадку радиусами ρ и $\rho + d\rho$ (фиг. 127). В пределах этого кольца выделим маленькую площадку dF. Просуммируем произведения $\rho^2 \, dF$ сначала для кольцевой площадки, а потом сложим полученные величины для всех кольцевых площадок, на которые можно разделить сечение. Так как все площадки внутри кольца находятся на одном и том же расстоянии ρ от центра, то для них

$$\sum \rho^2 \, dF = \rho^2 \sum dF.$$

Фиг. 127.

Но $\sum dF$ для кольца, как площадь узкой полоски, равна $\sum dF = 2\pi\rho \, d\rho$ и, следовательно, $\rho^2 \sum dF = 2\pi\rho^3 \, d\rho$. Тогда, суммируя эти величины для всего сечения, получаем:

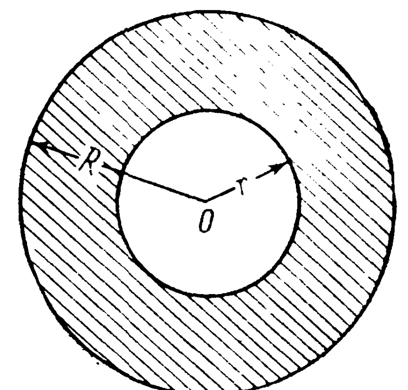
$$J_p = \int\limits_0^r 2\pi\rho^3 \, d\rho = 2\pi \int\limits_0^r \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi r^4}{2}$$

или, выражая через диаметр,

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1 d^4. \qquad (11.11)$$

Это и будет полярный момент инерции для круга. Момент сопротивления при кручении для круга равен:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi r^4}{2 \cdot r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2 d^3. \qquad (11.12)$$



Фиг. 128.

Из формулы (11.8) видно, что напряжения τ в точках сечения, близких к центру (ρ мало), невелики. Крутящий момент уравновешивается, главным образом, напряжениями, действующими в части сечения, близкой к поверхности стержня; материал же средней части вала принимает очень слабое участие в этой работе. Поэтому с целью облегчения валов иногда делают их трубчатыми (фиг. 128). При этом удаляется и наиболее загрязнённая посторонними примесями центральная часть поковки, из которой изготовляют вал.

Вычислим момент инерции и момент сопротивления такого трубчатого сечения. Радиус наружного очертания назовём R, внутреннего r. Тогда

$$J_p = \int_F \rho^2\, dF = 2\pi \int_r^R \rho^3\, d\rho = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$$

или

$$J_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \approx 0{,}1\,(D^4 - d^4). \qquad (11.13)$$

Момент сопротивления

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2R} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}. \qquad (11.14)$$

Если задаться отношением диаметров $\frac{d}{D} = \alpha$, или $d = \alpha D$, то получим:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4), \qquad (11.13')$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4). \qquad (11.14')$$

При малой толщине t стенок трубчатого сечения ($t < 0{,}1R$), обозначив средний радиус трубы $r_0 = \frac{R+r}{2}$ и имея в виду, что $R - r = t$, получим:

$$J_p = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2}(R^2 + r^2)(R + r)(R - r) =$$
$$= \frac{\pi}{2}(R^2 + r^2)\, 2r_0 t.$$

Заменяя $R = r_0 + \frac{t}{2}$ и $r = r_0 - \frac{t}{2}$ и пренебрегая квадратом малой толщины, после возведения в квадрат получим для полярного момента инерции:

$$J_p \approx 2\pi r_0^3 t. \qquad (11.15)$$

Точно так же для момента сопротивления найдём:

$$W_p \approx 2\pi r_0^2 t. \qquad (11.16)$$

Эти приближённые формулы очень удобны для практических расчётов.

Как видно, для каждого поперечного сечения полярные момент инерции и момент сопротивления J_p и W_p имеют только одно вполне определённое значение, зависящее от поперечных размеров вала.

§ 59. Условие прочности при кручении.

Зная величину полярного момента сопротивления сечения, можем найти $\max \tau$ по формуле (11.10).

По условию прочности наибольшее касательное напряжение не должно превышать допускаемого, т. е.

$$\max \tau = \frac{M_к}{W_p} \leqslant [\tau]. \qquad (11.17)$$

Отсюда при известном крутящем моменте и выбранном допускаемом напряжении можно определить необходимый момент сопротивления сечения, а затем и необходимый радиус или диаметр вала.

Что касается величины допускаемого напряжения $[\tau]$, то, как выяснено выше (§ 53), его следует принимать от 0,5 до 0,6 основного допускаемого напряжения на растяжение.

На практике величина $[\tau]$ колеблется для мягкой стали от 200 до 1000 *кг/см²*, для твёрдой — от 300 до 1200 *кг/см²*, в зависимости от характера нагрузки (постоянная, переменная, ударная) и величины местных напряжений, возникающих в тех местах вала, где в нём имеются гнёзда для шпонок, выкружки и другие изменения формы сечения.

Применение условия прочности (11.15) для подбора сечения вала покажем на примере.

Пример 33. Найдём диаметр стального вала, передающего мощность $N = 150$ *л. с.* при $n = 60$ об/мин. Допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 400$ *кг/см²*.

Из формулы (11.3) получаем:

$$M_к = \frac{2250 \cdot 150}{\pi \cdot 60} = 1790 \text{ кгм}.$$

Из формулы (11.15) имеем:

$$\max \tau = \frac{M_к}{W_p} = \frac{2M_к}{\pi r^3} \leqslant [\tau].$$

Отсюда

$$r \geqslant \sqrt[3]{\frac{2M_к}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 179\,000}{\pi \cdot 400}} = 6{,}58 \text{ см} \approx 6{,}6 \text{ см}.$$

Диаметр вала $d \geqslant 13{,}2$ *см*.

§ 60. Определение деформаций при кручении.

Как мы видели в § 57, при скручивании цилиндрического стержня с круглым поперечным сечением парами сил $M_к$, приложенными по его концам, деформация состоит в повороте сечений стержня относительно неподвижного опорного сечения.

Для сечения на расстоянии x от опорного сечения этот угол поворота мы обозначали (фиг. 122) буквой φ_x и называли углом закручивания. Для определения его воспользуемся равенством (11.7):

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{M_к}{GJ_p}, \quad \text{или} \quad d\varphi=\frac{M_к dx}{GJ_p}.$$

Интегрируя по x, получаем (при постоянном $M_к$):

$$\varphi_{(x)}=\int\limits_0^x \frac{M_к dx}{GJ_p}=\frac{M_к x}{GJ_p}.$$

При длине стержня l наибольший угол закручивания будет между крайними сечениями (при $x=l$):

$$\varphi=\frac{M_к l}{GJ_p}. \qquad (11.18)$$

Формула (11.18) имеет вид, вполне аналогичный соответствующей формуле при растяжении или сжатии.

Здесь уместно указать на физический смысл величины $J_p=\frac{\pi r^4}{2}$. Как видно из формулы (11.18), величина угла закручивания φ тем меньше (при данном $M_к$), чем больше произведение GJ_p — так называемая *жёсткость* при кручении. Таким образом, J_p отражает влияние размеров поперечного сечения на деформируемость стержня при кручении.

Если мы будем иметь вал с несколькими шкивами, делящими его на участки, скручиваемые различными моментами $M_к$, то по формуле (11.18) можно вычислить для каждого участка угол закручивания одного его конца по отношению к другому. Суммируя алгебраически эти углы закручивания для всех участков, получим полный угол закручивания для всего вала.

Вычисление углов закручивания имеет двоякое практическое значение: во-первых, оно необходимо для определения опорных реакций скручиваемых стержней в статически неопределимых системах, — это редкий случай; во-вторых, умение вычислить угол закручивания необходимо для проверки жёсткости вала.

Практикой выработаны высшие допустимые пределы для угла φ, которых нельзя переходить, чтобы не получить нарушения работы машины. Эти пределы таковы: в обычных условиях $[\varphi]=0{,}3^\circ$ на каждый метр длины вала; при переменных нагрузках $[\varphi]=0{,}25^\circ$; для внезапно (с ударом) меняющихся нагрузок $[\varphi]=0{,}15^\circ$. Иногда для обычных условий принимают $[\varphi]=1^\circ$ на длину, равную 20 диаметрам вала [1]).

---

[1]) В последнее время в советском машиностроении допускаемый угол закручивания $[\varphi]$ принимается до 2° на погонный метр длины вала.

Таким образом, размеры вала следует определять не только из условия прочности (11.15), но и из условия жёсткости:

$$\varphi = \frac{M_к l}{GJ_p} \leqslant [\varphi]. \tag{11.19}$$

Это условие часто выдвигается на первое место при длинных валах. Проверку жёсткости вала покажем на примере.

Пример 34. Для задачи, решённой в § 59 (пример 33), проверим величину угла закручивания вала на длине $l = 1$ *м*; модуль упругости примем равным $G = 8 \cdot 10^5$ *кг/см²*. По формуле (11.19) получаем:

$$\varphi = \frac{179\,000 \cdot 100}{8 \cdot 10^5 \frac{\pi \cdot 6{,}6^4}{2}} = 0{,}0075 \text{ радиана} = 0{,}43^\circ,$$

что превышает допустимую норму 0,3° на 1 *м*. Чтобы соблюсти условие жёсткости, следует определить радиус вала из неравенства (11.19):

$$\frac{M_к l}{GJ_p} \leqslant [\varphi], \quad \text{или } J_p = \frac{\pi r^4}{2} \geqslant \frac{M_к l}{G[\varphi]},$$

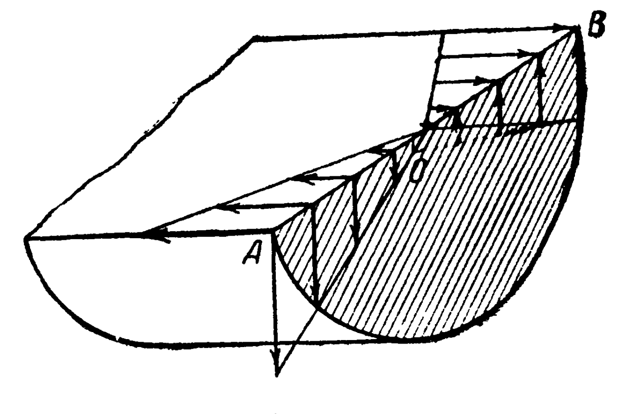
откуда

$$r \geqslant \sqrt[4]{\frac{2M_к l}{\pi G[\varphi]}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 179\,000 \cdot 100 \cdot 180}{\pi \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 0{,}3}} = 7{,}25 \text{ см}.$$

Диаметр должен быть равен $d = 14{,}5$ *см*.

§ 61. Напряжения при кручении по сечениям, наклонённым к оси стержня.

Изучая напряжения при скручивании стержня круглого сечения (§ 57), мы видели, что по сечениям, перпендикулярным к оси, в каждой точке действуют касательные напряжения τ. По закону парности касательных напряжений такие же напряжения (фиг. 125 и 130) будут действовать и по продольным граням вырезанного нами из стержня элемента. Эти напряжения будут также наибольшими в точках у поверхности стержня и дойдут до нуля в точках оси.

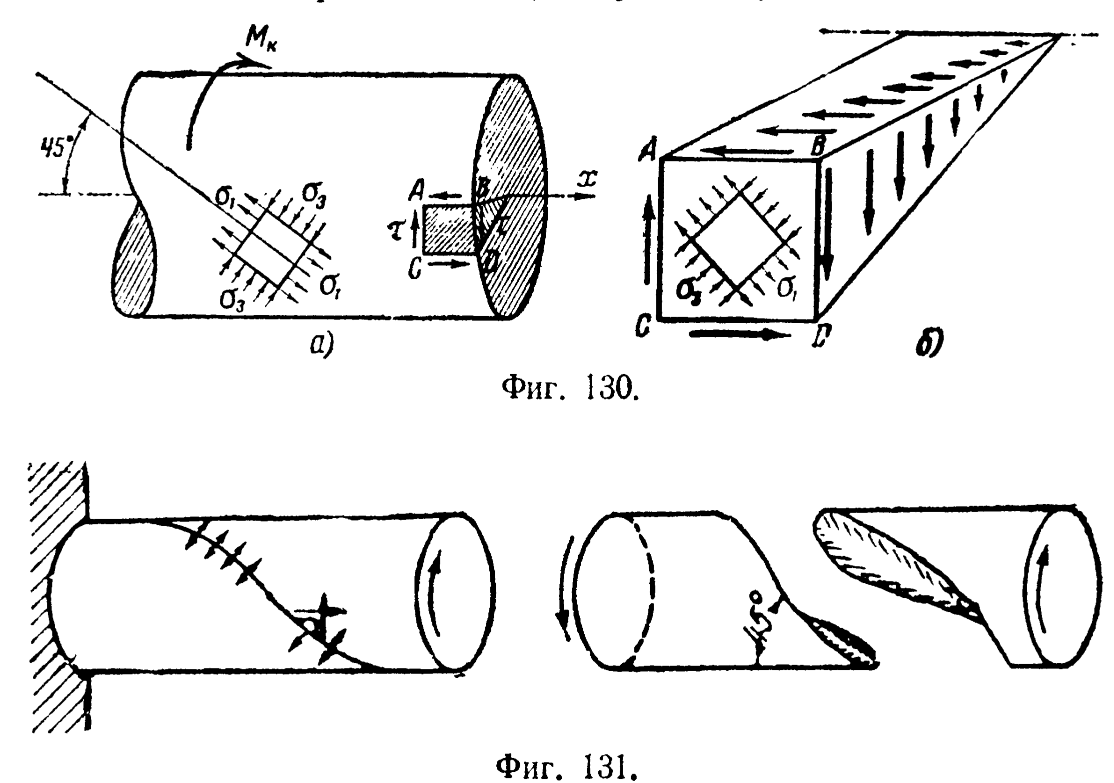


Фиг. 129.

Таким образом, если мы проведём сечение через ось скручиваемого стержня диаметральной плоскостью (фиг. 129), то в точках, расположенных по прямой AB, перпендикулярной к оси стержня, касательные напряжения будут изменяться по закону прямой линии. Нормальных напряжений по этим плоскостям не будет.

Они действуют по наклонным сечениям и достигают наибольшего значения по сечениям, наклонённым к оси стержня под углом 45°.

В самом деле, элемент $ABCD$, вырезанный у поверхности вала (фиг. 130), подвергается по своим боковым граням действию лишь касательных напряжений; он находится в тех же условиях, что и элемент $abcd$ на фиг. 115, т. е. в условиях чистого сдвига. Поэтому по площадкам, наклонённым на угол 45° к оси стержня, касательных напряжений не будет; это — главные площадки, по которым действуют рястягивающие и сжимающие главные напряжения σ_1 и σ_3, равные в каждой точке напряжению τ (см. фиг. 115).



Фиг. 130.

Фиг. 131.

Величина их для всех точек сечения меняется пропорционально расстоянию до центра и равна τ. Хрупкие материалы, например чугун, разрушаются (фиг. 131) при кручении от разрыва по наклонным сечениям BC (фиг. 130), т. е. по тем, где действуют наибольшие растягивающие напряжения.

Зная величину и направление главных напряжений в любой точке, мы можем найти нормальные и касательные напряжения по какой угодно наклонной площадке из круга напряжений или по формулам (7.5) и (7.6). Что касается проверки прочности, то, так как при кручении наибольшие нормальные и касательные напряжения равны по абсолютной величине, допускаемые же величины для касательных напряжений меньше, чем для нормальных, то понятно, что при кручении, как и вообще при чистом сдвиге, можно ограничиться проверкой лишь по отношению к касательным напряжениям.

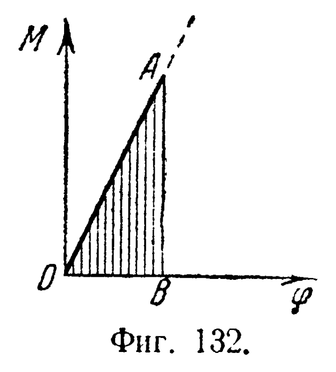
§ 62. Потенциальная энергия при кручении.

Выше, при изучении растяжения, было показано (§ 41), что при деформации упругой системы в ней накапливается энергия, которую мы назвали потенциальной энергией деформации.

Это явление имеет место и при кручении. Если упругий стержень в пределах упругости закрутить на некоторый угол, то после удаления внешних сил он будет раскручиваться и может произвести работу за счёт накопившейся в стержне потенциальной энергии кручения. Пренебрегая необратимыми потерями (нагревание, внутреннее трение и т. п.), мы должны считать, что обнаруживаемая таким образом работа внутренних сил, определяемая количеством потенциальной энергии деформации U, равна работе внешних сил A.

Пусть имеется вал, закреплённый одним концом, к свободному концу которого будем прикладывать пару сил с моментом, постепенно возрастающим от нуля до конечного значения $M_к$. По мере возрастания величины момента пары сил будет расти и угол закручивания φ, связанный с $M_к$ уравнением (11.18):

$$\varphi=\frac{M_к l}{GJ_p}.$$



Фиг. 132.

Если откладывать по оси абсцисс углы закручивания (деформацию), а по оси ординат соответствующие значения крутящего момента, то их взаимная зависимость изобразится наклонной прямой OA (фиг. 132). Повторяя рассуждения, проведённые для вычисления работы силы P при растяжении, найдём, что работа пары $M_к$ выразится площадью треугольника OAB:

$$A=\frac{M_к\varphi}{2}. \qquad (11.20)$$

Наличие множителя $\frac{1}{2}$ в формуле (11.20) объясняется тем, что момент $M_к$ был приложен не сразу всей своей величиной, а прикладывался в порядке постепенного, «статического» роста от нуля до конечного его значения.

Подставляя вместо φ его значение из уравнения (11.18) и имея в виду, что $U=A$, получим выражение для потенциальной энергии при кручении:

$$U=\frac{M_к^2 l}{2GJ_p}. \qquad (11.21)$$

Потенциальная энергия может быть выражена и через деформацию, если в формуле (11.20) заменить значение крутящего момента выражением из формулы (11.18):

$$M_к=\frac{GJ_p}{l}\cdot\varphi.$$

Тогда

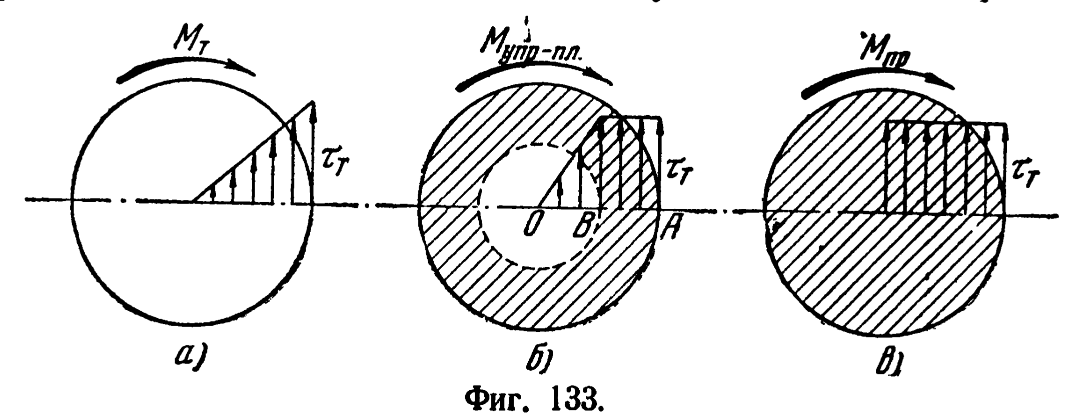
$$U=\frac{GJ_p}{2l}\cdot\varphi^2. \qquad (11.22)$$

Из формул (11.21) и (11.22) видим, что потенциальная энергия при кручении, так же как и при растяжении, является функцией второй степени от силы или от деформации.

§ 63. Определение предельной грузоподъёмности скручиваемого стержня.

В предыдущих параграфах мы определяли необходимые размеры скручиваемого стержня, выполняя условие, чтобы *наибольшие* касательные напряжения в точках у контура поперечного сечения не превысили допускаемого напряжения $[\tau]$. Таким образом, не считаясь с неравномерностью в распределении напряжений по сечению, мы вели расчёт по допускаемым напряжениям.

В этом способе расчёта, так же как и при решении статически неопределимых систем, мы не используем полностью предельной



Фиг. 133.

грузоподъёмности стержня. В предыдущих главах мы считали опасным то состояние стержня, при котором лишь в контурных точках сечения напряжения достигнут предела текучести материала (стали) при сдвиге $\tau_т$ (фиг. 133, *а*). Величина $\tau_т$ по энергетической теории прочности должна быть равна $0,6\sigma_т$. Крутящий момент при этом будет равен:

$$M_т=\frac{\pi r^3\tau_т}{2},$$

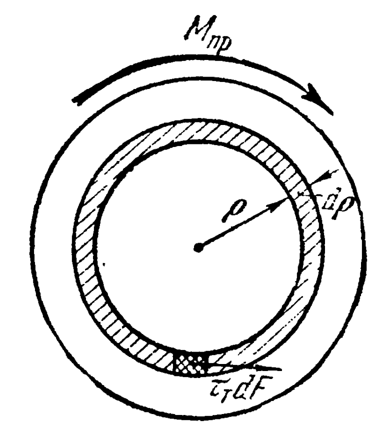
а угол закручивания

$$\varphi_т=\frac{M_т l}{GJ_p}=\frac{\pi r^3\tau_т l}{2G\frac{\pi r^4}{2}}=\frac{\tau_т l}{Gr}.$$

Для дальнейшего увеличения угла закручивания необходимо возрастание крутящего момента, так как материал внутри стержня находится ещё в упругом состоянии. При увеличении деформации рост напряжения у краёв сечения остановится (явление текучести),

и при некотором $M > M_т$ распределение напряжений будет соответствовать графику, изображённому на фиг. 133, *б*. Внутри незаштрихованной окружности радиуса *OB* материал будет по-прежнему в упругом состоянии.

Предельным состоянием, соответствующим полному исчерпанию грузоподъёмности стержня, будет то распределение напряжений, когда упругая зона исчезнет, — по всему сечению напряжения будут равны пределу текучести $\tau_т$ (фиг. 133, *в*) [1].



Фиг. 134.

Крутящий момент $M_{пр}$ в этом случае можно вычислить, составляя сумму моментов всех внутренних сил относительно центра круга. Для этого разобьём площадь нашего сечения концентрическими кругами на бесконечно малые (кольцевые) площадки.

Напряжения, действующие на каждую такую площадку, в предельном состоянии имеют постоянное значение и равны $\tau_т$ (фиг. 133, *в*). Внутренние усилия, приложенные к элементарной площадке радиуса ρ, будут равны (фиг. 134) $\tau_т \cdot dF$, а момент внутреннего усилия $\tau_т \cdot dF\rho$. Суммируя элементарные моменты внутренних сил по площади кольца, получим:

$$d\,M_{вн} = \tau_т\rho \sum dF = \tau_т\rho\, 2\pi\rho\, d\rho.$$

Составляя теперь условие равновесия внешних и внутренних моментов, найдём:

$$\sum M_0 = 0; \quad M_{пр} - \int_0^r 2\pi\tau_т\rho^2\, d\rho = 0.$$

Отсюда

$$M_{пр} = \frac{2}{3}\pi r^3 \tau_т. \tag{11.23}$$

Допускаемый крутящий момент при коэффициенте запаса k будет равен:

$$[M_к] = \frac{M_{пр}}{k} = \frac{2\pi}{3} r^3 \frac{\tau_т}{k} = \frac{2\pi}{3} r^3 [\tau], \tag{11.24}$$

откуда

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{3M_к}{2\pi[\tau]}};$$

[1]) Эта схема работы сечения в предельном состоянии является лишь приближённой. В действительности, в центре вала напряжения растут не скачком, хотя и очень резко, и на поверхности не остаются равными $\tau_т$, а возрастают вследствие упрочнения материала.

в то же время по обычному расчёту мы имеем:

$$r \geqslant \sqrt[3]{\frac{2M_к}{\pi[\tau]}}.$$

В результате переход к расчёту по допускаемым нагрузкам позволяет уменьшить диаметр вала в отношении

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2\cdot 2}} = 0{,}91.$$

Таким образом, вследствие *неравномерного* распределения напряжений по сечению при упругом состоянии стержня, переход к методу расчёта по допускаемым нагрузкам может дать экономию материала.

Надо, однако, помнить, что приведённый расчёт мог бы иметь силу лишь при статической нагрузке, когда опасным состоянием является состояние текучести материала. Скручиваемые же стержни, валы, в подавляющем большинстве случаев работают на переменную нагрузку в условиях, когда проверка прочности должна производиться из расчёта на возможность появления трещин усталости. Поэтому применение изложенного способа к валам, повидимому, в большинстве случаев невозможно. Иначе будет обстоять дело, как увидим дальше, при расчётах балок на изгиб.

Приведённый результат интересен потому, что даёт возможность проверить его на опыте. Опыты показали, что величина напряжения $\tau_т$, получаемого из формулы (11.23), по предельному моменту, определённому экспериментально, достаточно близка к $0{,}6\ \sigma_т$, что и следует ожидать на основании энергетической теории прочности.

§ 64. Примеры.

Пример 35. Заменить сплошной вал диаметром $d = 300$ *мм* полым валом наружного диаметра $D = 350$ *мм*, эквивалентным в отношении прочности. Найти внутренний диаметр полого вала d_1; сравнить веса этих валов.

Наибольшие касательные напряжения в обоих валах должны быть равны между собою:

$$\max\tau = \frac{M_к}{W_p} = \frac{2M_к}{\pi r^3} = \frac{2M_к}{\pi R^3(1-\alpha^4)}.$$

Отсюда получаем формулу для вычисления α:

$$\alpha = \sqrt[4]{1-\left(\frac{r}{R}\right)^3} = \sqrt[4]{1-\left(\frac{150}{175}\right)^3} = 0{,}78.$$

Внутренний диаметр равен $d_1 = \alpha D = 0{,}78 \cdot 350 = 273$ *мм*. Отношение весов равно отношению площадей поперечных сечений; поэтому вес полого вала составляет

$$\frac{D^2-d_1^2}{d^2} = \frac{35^2-27{,}3^2}{30^2} = 0{,}534 \text{ веса сплошного вала.}$$

Пример 36. Определить диаметр стального вала, передающего мощность 450 *л. с.* при 300 об/мин. Допускаемое напряжение $[\tau]=800$ *кг/см²*; допускаемый угол закручивания 0,3° на метр длины; модуль $G=8\cdot10^5$ *кг/см²*.

Крутящий момент равен $M_к=716{,}2\frac{N}{n}=716{,}2\frac{450}{300}=1075$ *кгм*. Необходимый диаметр определяется формулами

$$\max\tau=\frac{M_к}{W_p}=\frac{2M_к}{\pi r^3}\leqslant[\tau],\quad \varphi=\frac{M_к l}{GJ_p}=\frac{2M_к l}{G\pi r^4}\leqslant[\varphi],$$

откуда

$$d\geqslant 2\sqrt[3]{\frac{2M_к}{\pi[\tau]}}=2\sqrt[3]{\frac{2\cdot1075\cdot100}{\pi\,800}}=8{,}82\ см;$$

$$d\geqslant 2\sqrt[4]{\frac{2M_к l}{\pi G[\varphi]}}=2\sqrt[4]{\frac{2\cdot1075\cdot100\cdot100\cdot180}{\pi\cdot8\cdot10^5\cdot\pi\cdot0{,}3}}=12{,}8\ см.$$

Таким образом, диаметр вала определяется из условий жёсткости и должен быть принят равным $d=12{,}8$ *см*.

Пример 37. Для стального вала, рассмотренного в § 55 (фиг. 120), определить диаметр и полный угол поворота третьего шкива относительно четвёртого; расстояния между шкивами равны соответственно:

$$l_{41}=1{,}0\ м;\quad l_{12}=0{,}9\ м;\quad l_{23}=1{,}5\ м.$$

Допускаемое напряжение равно $[\tau]=400$ *кг/см²*; допускаемый угол закручивания на 1 *м* равен $\varphi_{доп}=0{,}25°$; $G=8\cdot10^5$ *кг/см²*.

Величины моментов, скручивающих вал, даны на фиг. 120. Наибольший крутящий момент будет на участке между шкивами *1* и *2*; он равен 400 *кгм*. Определим диаметр вала из условия прочности:

$$\max\tau=\frac{M_к}{W_p}\approx\frac{M_к}{0{,}2d^3}\leqslant[\tau],\quad или\quad d\geqslant\sqrt[3]{\frac{M_к}{0{,}2[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{40\,000}{0{,}2\cdot400}}\approx8\ см.$$

По условию жёсткости:

$$\varphi=\frac{M_к l}{GJ_p}=\frac{M_к l}{G\cdot0{,}1d^4}\leqslant[\varphi].$$

Так как допускаемый угол закручивания на 1 *м* равен $0{,}25\frac{\pi}{180}=4{,}36\cdot10^{-3}$ радиана, то получаем:

$$d\geqslant\sqrt[4]{\frac{M_к l_0}{0{,}1G[\varphi]}}=\sqrt[4]{\frac{40\,000\cdot100\cdot10^3}{0{,}1\cdot8\cdot10^5\cdot4{,}36}}\approx10{,}4\ см.$$

Полярный момент инерции равен $J_p=\frac{\pi}{2}\cdot5{,}2^4=1145$ *см⁴*. Углы закручивания отдельных участков вала равны:

$$\varphi_{41}=\frac{M_{41}l_{41}}{GJ_p}=\frac{20\,000\cdot100}{8\cdot10^5\cdot1145}=2{,}18\cdot10^{-3};$$

$$\varphi_{12}=\frac{M_{12}l_{12}}{GJ_p}=\frac{40\,000\cdot90}{8\cdot10^5\cdot1145}=3{,}98\cdot10^{-3};$$

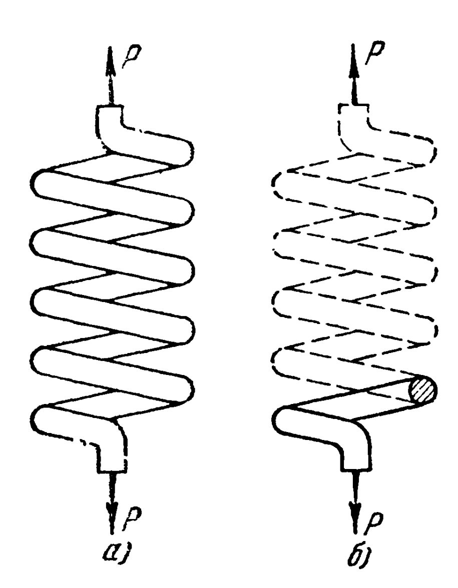
$$\varphi_{23}=\frac{M_{23}l_{23}}{GJ_p}=\frac{10\,000\cdot150}{8\cdot10^5\cdot1145}=1{,}64\cdot10^{-3}.$$

Так как угол φ_{41} направлен по часовой стрелке, а углы φ_{12} и φ_{23} — против часовой стрелки, то полный угол поворота третьего шкива относительно четвёртого равен:

$$\varphi_{34}=(3{,}98+1{,}64-2{,}18)\cdot 10^{-3}=3{,}44\cdot 10^{-3}\text{ радиана}=0{,}197^{\circ}.$$

§ 65. Напряжения и деформации в винтовых пружинах с малым шагом.

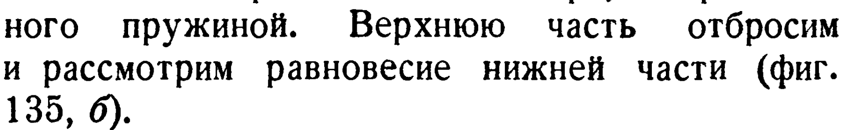
В рессорах вагонов, в клапанах и в других деталях механизмов применяются винтовые пружины, подвергающиеся действию сил, сжимающих или растягивающих пружину. При проектировании таких пружин необходимо уметь вычислять наибольшее напряжение (для проверки прочности) и определять деформацию пружины — её удлинение или осадку. Последнее необходимо, так как на практике регулируют нагрузки, приходящиеся на пружину, давая ей бо́льшие или меньшие деформации сжатия или растяжения.

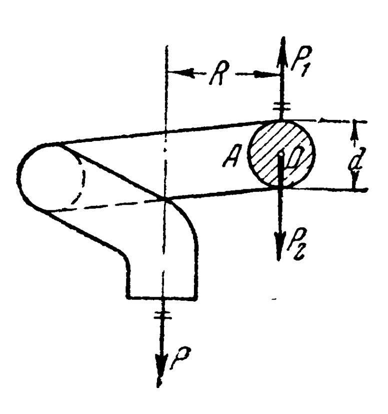


Фиг. 135.

Таким образом, необходимо по размерам пружины уметь вычислить зависимость между её деформацией и силой. Оказывается, что материал пружины испытывает напряжения кручения, как это будет показано ниже.

Представим себе (фиг. 135, *а*) цилиндрическую пружину, растянутую силами P, приложенными по её оси. Назовём: R — радиус винтовой оси (витка) пружины, n — число витков, r — радиус поперечного сечения стержня пружины, G — модуль сдвига. Наклоном витков пренебрегаем.


Для вычисления напряжений разрежем эту пружину на две части сечением, проходящим через ось цилиндра, образованного пружиной. Верхнюю часть отбросим и рассмотрим равновесие нижней части (фиг. 135, *б*).



Фиг. 136.

На эту часть действует внешняя сила P и напряжения по сечению стержня пружины. Чтобы выяснить, какие это напряжения, приложим в точке O, центре поперечного сечения пружины, две силы P_1 и P_2, равные по величине P и направленные по вертикали в разные стороны (фиг. 136).

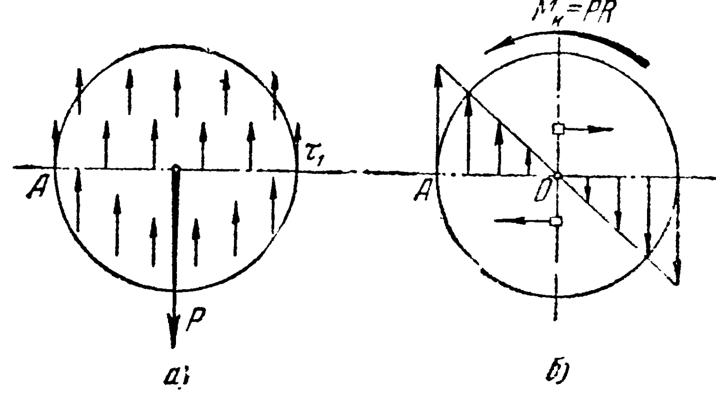
Так как и сила P_2, и пара сил $P=P_1$ с моментом $M_к=P\cdot R$ лежат в плоскости проведённого разреза, то они должны уравновеситься касательными напряжениями.

Сила P_2 сдвигает отсечённую часть пружины вниз и вызывает появление касательных напряжений, показанных на фиг. 137, *а* и равных:

$$\tau_1 = \frac{P_2}{F} = \frac{P}{\pi r^2}.$$

Момент пары $M_к = PR$ вызывает скручивание стержня пружины и является причиной возникновения второй группы касательных напряжений (11.8):

$$\tau_2 = \frac{M_к}{J_p}\rho.$$



Фиг. 137.

Эти напряжения будут меняться по своей величине пропорционально расстоянию от центра (фиг. 137, *б*) и достигают наибольшего значения по площадкам, расположенным у контура сечения; их величина равна:

$$\max\tau_2 = \frac{M_к}{W_p} = \frac{PR}{\frac{\pi r^3}{2}}.$$

Накладывая обе группы напряжений друг на друга, получаем полное распределение напряжений по сечению.

Опасной точкой будет та из точек контура, в которой направления τ_1 и $\max\tau_2$ совпадут. Такой точкой будет A — у внутреннего края сечения; в ней полное касательное напряжение равно (фиг. 137):

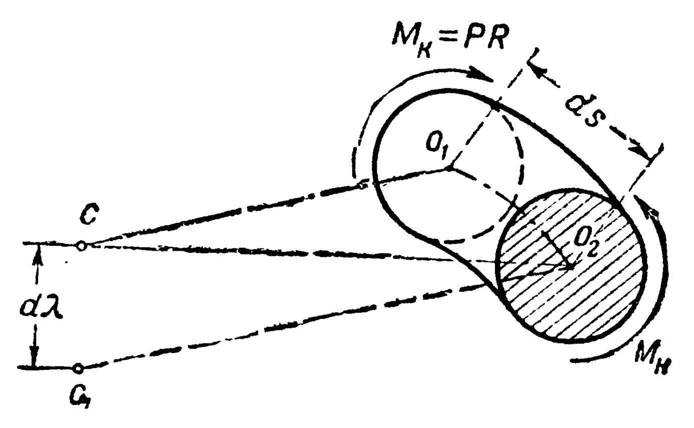
$$\tau_{max} = \frac{P}{\pi r^2} + \frac{2PR}{\pi r^3} = \frac{P}{\pi r^2}\left(1 + \frac{2R}{r}\right). \qquad (11.25)$$

Так как в большинстве случаев второе слагаемое в скобках значительно больше единицы, то обычно пренебрегают первым слагаемым — напряжением от простого перерезывания — и учитывают лишь кручение стержня парами PR. Тогда

$$\tau_{max} = \frac{2PR}{\pi r^3}. \qquad (11.26)$$

При таком упрощении очень легко вычислить деформацию растяжения пружины, которую мы обозначим λ.

Вырежем из пружины отрезок длиной ds двумя смежными сечениями — CO_1 и CO_2, проходящими через ось пружины (фиг. 138). Так как эти сечения мы выбираем весьма близко, то можно принять, что до деформации



Фиг. 138.

радиусы R, идущие от оси пружины к центрам проведённых сечений, лежат в одной плоскости и образуют треугольник O_1CO_2.

После деформации второе сечение, вследствие скручивания участка стержня ds, повернётся относительно первого на угол $d\theta=\frac{M_к ds}{GJ_p}$. Тогда радиус O_2C повернётся относительно радиуса O_1C тоже на угол $d\theta$, и точка C переместится в положение C_1, что повлечёт опускание конца пружины на величину

$$d\lambda=R\,d\theta=R\frac{M_к ds}{GJ_p}.$$

Если мы учтём, что все элементы ds стержня пружины деформируются таким же образом, то полное опускание нижнего конца пружины, т. е. её удлинение, выразится суммой величин $d\lambda$:

$$\lambda=\sum d\lambda=\int_0^l R\frac{M_к ds}{GJ_p}=R\frac{M_к J}{GJ_p}. \qquad (11.27)$$

Здесь $l=\int_0^l ds$ — полная длина стержня пружины, а $\frac{M_к J}{Gl_p}$ — взаимный угол закручивания концов стержня пружины, определённый в предположении, что стержень распрямлён.

Пренебрегая наклоном витков к горизонтали и принимая число их n, получаем, что полная длина винтового стержня равна:

$$l=2\pi Rn;$$

тогда

$$\lambda=\frac{M_к R}{GJ_p}2\pi nR=\frac{4PR^3n}{Gr^4}. \qquad (11.28)$$

Формулы (11.25) и (11.28) дают возможность проверить прочность и определить деформацию пружины.

Чем выше допускаемое напряжение на срез $[\tau]$, тем более гибкой будет пружина, тем бóльшую осадку она даст при том же грузе P, так как её можно сделать из стержня меньшего поперечного сечения.

Так как рессоры должны быть достаточно гибкими, то для них берётся закалённая сталь с очень высоким пределом упругости; допускаемое напряжение на срез достигает здесь 40 *кг/мм*^{2} и даже 80 *кг/мм*^{2}. Для хромованадиевой стали допускаются напряжения в растянутых пружинах до 70 *кг/мм*^{2} при r от 6 *мм* до 8 *мм*. Для фосфористой бронзы при $G=4400$ *кг/мм*^{2} и r до 8 *мм* допускают $[\tau]=13$ *кг/мм*^{2}.

Эти напряжения могут быть допущены при спокойной нагрузке. Для изменяющейся нагрузки они понижаются примерно на $^1/_3$, а при

непрерывно работающих пружинах (пружины клапанов) примерно на $^2/_3$. В этих случаях большую роль играет возможность развития трещин усталости (см. § 17). Кроме того, клапанные пружины часто работают при высоких температурах, что также требует снижения основных допускаемых напряжений.

На практике при расчёте пружин в формулу (11.25) вводят поправочный коэффициент k, учитывающий как влияние перерезывания, так и ряд других, не учтённых выше факторов (изгиб стержня пружины, продольные деформации и т. д.); величина этого коэффициента тем больше, чем больше отношение $\frac{r}{R}$, т. е. чем более жёстка в геометрическом отношении пружина.

Вместо формулы (11.25), учитывающей помимо кручения только дополнительное влияние перерезывания сечения пружины силой P, ведут расчёт по формуле:

$$\max\tau = k\frac{M_к}{W_p} = k\frac{PR}{\frac{\pi r^3}{2}}; \tag{11.29}$$

поправочный коэффициент k может быть взят по таблице 16.

При расчёте пружин иногда заданной является не сила, сжимающая или растягивающая пружину, а энергия T, которая должна быть ею поглощена. Подобно тому, как это было при растяжении или сжатии стержня, потенциальная энергия деформации пружины U измеряется работой внешних сил.

Таблица 16. **Поправочные коэффициенты k.**

$\frac{R}{r}$	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

Так как для пружины зависимость между λ и P прямолинейна (формула (11.28), потенциальная энергия деформации пружины равна:

$$U = \frac{1}{2}P\lambda = \frac{2P^2R^3n}{Gr^4}. \tag{11.30}$$

Из формулы (11.26) имеем:

$$PR = \frac{\tau\pi r^3}{2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (11.30), получим:

$$U = \frac{2\pi Rn}{4G}\pi r^2\tau^2.$$

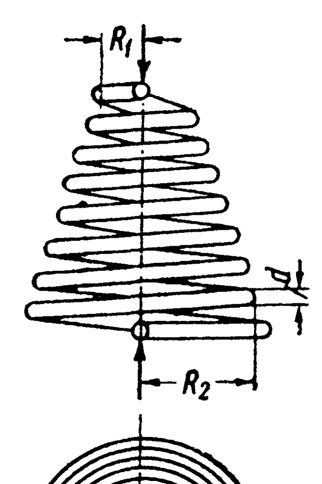
Так как $2\pi Rn$ — длина стержня пружины, а πr^2 — площадь сечения, то

$$U = \frac{\tau^2}{4G}V, \tag{11.31}$$

где V — объём пружины; из (11.31), учитывая, что $U = T$, находим:

$$V = \frac{4GT}{[\tau]^2}. \tag{11.32}$$

Таким образом, задавшись предельной величиной напряжения $\tau = [\tau]$, мы можем вычислить объём пружины, необходимый для поглощения заданной величины энергии $T = U$ с тем, чтобы не были превышены допускаемые напряжения $[\tau]$. При этом необходимо проверить осадку пружины при напряжениях $[\tau]$; она должна быть такой, чтобы не произошло закрытия зазоров между витками.



Фиг. 139.

Кроме цилиндрических винтовых пружин на практике приходится встречаться с коническими пружинами (фиг. 139). Радиусы верхнего и нижнего витков обозначены соответственно R_1 и R_2; величина промежуточного радиуса R определяется формулой

$$R = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{2\pi n}\alpha,$$

где n — число витков, а α — угол, образованный рассматриваемым радиусом с верхним радиусом R_1 и отсчитываемый по виткам пружины.

Проверка прочности для конической пружины производится по формулам (11.25) или (11.26) с заменой в них величины R её наибольшим значением R_2. Что касается осадки λ, то при её вычислении, как и раньше, надо суммировать элементарные деформации

$$d\lambda = \frac{M_к R\, ds}{GJ_p},$$

где $M_к$ — теперь переменная величина PR.

Таким образом,

$$\lambda = \int \frac{M_к ds}{GJ_p} R = \frac{P}{GJ_p}\int\limits_0^{2\pi n}\left[R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}\right]^3 d\alpha =$$

$$= \frac{Pn}{r^4 Q}\left[R_1^2 + R_2^2\right]\left[R_1 + R_2\right]. \quad (11.33)$$

Иногда пружины делают из стержня не круглого, а прямоугольного сечения; тогда приходится для вычисления напряжений и деформаций пользоваться формулами, приведёнными в § 67 (таблица 17).

§ 66. Примеры.

Пример 38. Предохранительный клапан диаметром $D = 75$ *мм* должен открываться при давлении пара $q = 6$ *ат*. Пружина клапана сделана из круглой стали диаметром $d = 12$ *мм*; диаметр витка пружины $2R = 60$ *мм*. При отсутствии нагрузки расстояние между осями смежных витков по вертикали (шаг пружины) равно $t = 17$ *мм*.

Требуется найти необходимое число витков пружины n, предполагая, что при максимальном поднятии клапана должно оставаться не менее $\lambda_2 = 35$ *мм* в запас на дальнейшее сжатие пружины (до соприкасания витков), а также определить начальное сжатие пружины λ_1 и напряжение τ при полном открытии клапана; модуль упругости $G = 8 \cdot 10^5$ *кг/см²*.

Определим силу, поднимающую клапан:

$$P = q\frac{\pi D^2}{4} = 6\frac{\pi \cdot 7{,}5^2}{4} = 265 \text{ кг}.$$

Для того чтобы только при этой силе пружина начала сжиматься, надо ей дать первоначальную осадку:

$$\lambda_1 = \frac{4PR^3n}{Gr^4} = \frac{4 \cdot 265 \cdot 3^3 n}{8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}6^4} = 0{,}276n \text{ см}.$$

Полная длина пружины в ненагружённом состоянии (считая по её вертикальной оси) будет складываться из λ_1 и запаса λ_2.

Эта сумма должна равняться предельному сжатию пружины $\lambda_0 = (t - d)\,n$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (t - d)\,n,$$

или

$$0{,}276n + 3{,}5 = (1{,}7 - 1{,}2)\,n,$$

откуда

$$n = \frac{3{,}5}{0{,}224} = 16 \text{ витков}.$$

Предварительная осадка пружины равна:

$$\lambda_1 = 0{,}276 \cdot 16 = 4{,}4 \text{ см}.$$

Наибольшее напряжение в пружине при полном открытии клапана мы вычислим, связав λ с τ; с одной стороны,

$$\tau_{\max} = \frac{2PR}{\pi r^3};$$

с другой стороны,

$$\lambda_1 = \frac{4PR^3n}{Gr^4}.$$

Из второго равенства имеем:

$$P = \frac{\lambda r^4 G}{4R^3 n};$$

подставляя это значение P в первое равенство, получаем:

$$\tau_{\max} = \frac{\lambda r G}{2R^2 n\pi}.$$

При полном открытии клапана имеем:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 4{,}4 + 3{,}5 = 7{,}9 \text{ мм}; \quad \max\tau = \frac{7{,}9 \cdot 0{,}6 \cdot 8 \cdot 10^5}{2 \cdot 3^2 \cdot 16 \cdot 3{,}14} = 4070 \text{ кг/см}^2.$$

Пример 39. Винтовая пружина сделана из проволоки диаметром $d = 4$ *мм*. Диаметр образующего цилиндра равен $D = 46$ *мм*. В ненапряжённом состоянии зазор в свету между витками равен $t = 1{,}0$ *мм*. Какой силой надо сжать пружину, чтобы зазор исчез? $G = 8 \cdot 10^5$ *кг/см*^{2} $= 8 \cdot 10^3$ *кг/мм*^{2}.

Диаметр витка пружины $D = 2R$ равен сумме диаметров образующего цилиндра и стержня пружины: $2R = D_1 + d = 50$ *мм*. Чтобы зазор закрылся, надо, чтобы осадка одного витка равнялась зазору. Тогда

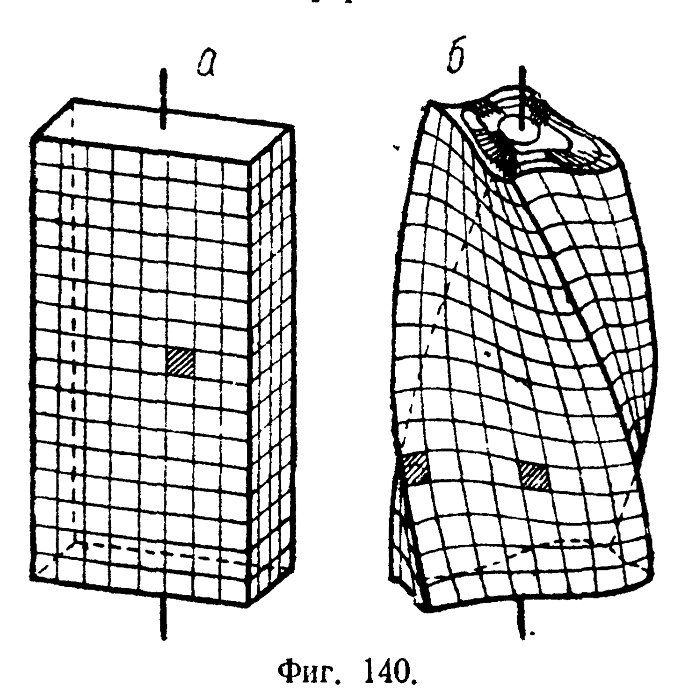
$$\lambda = t = \frac{4PR^3}{Gr^4} \quad \text{и} \quad P = \frac{Gr^4t}{4R^3} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 2^4 \cdot 1{,}0}{4 \cdot 25^3} = 2{,}05 \text{ кг}.$$

Напряжения при этой нагрузке равны:

$$\max\tau = \frac{M_к}{W_p} = \frac{PR}{\frac{\pi r^3}{2}} = 2 \cdot \frac{2{,}05 \cdot 25}{\pi \cdot 2^3} = 4{,}1 \text{ кг/мм}^2.$$

§ 67. Чистое кручение стержней некруглого сечения.

На практике довольно часто встречаются случаи, когда скручиванию подвергаются стержни некруглого сечения. В таких стержнях поперечное сечение после деформации не остаётся плоским, а коробится, и касательные напряжения распределяются по более сложному закону, чем для круглого сечения (фиг. 140).



Фиг. 140.

Чистым (или свободным) кручением называется кручение стержня, не сопровождающееся возникновением нормальных напряжений в его поперечных сечениях, что возможно лишь при условии беспрепятственной депланации (короблении) всех сечений. При чистом кручении распределение и величины касательных напряжений во всех поперечных сечениях стержня одинаковы.

Чистое кручение возможно лишь для стержня постоянного сечения по всей длине при скручивании его парами сил, приложенными к его концам [1]).

Из сказанного выше ясно, что основная гипотеза сопротивления материалов — гипотеза плоских сечений — неприменима к расчёту на кручение стержней некруглого сечения. Поэтому расчёт таких стержней на кручение может быть выполнен лишь методами теории упругости.

Общий метод решения задачи о чистом кручении стержня некруглого сечения впервые был дан Сен-Венаном в 1864 г. Им же был разобран и ряд случаев решения этой задачи (прямоугольник, эллипс и др.). В 1865 г. русским учёным А. Соколовым было дано оригинальное решение ряда задач на кручение стержней некруглого сечения.

Впервые были исследованы многие задачи чистого кручения стержней сложного очертания советскими учёными В. Г. Галёркиным, Н. И. Мусхелишвили, Л. С. Лейбензоном, А. Н. Динником и др. Общее решение задачи о кручении тонкостенных стержней дал проф. В. З. Власов.

Решение этих задач приводится в курсах теории упругости и в специальной литературе.

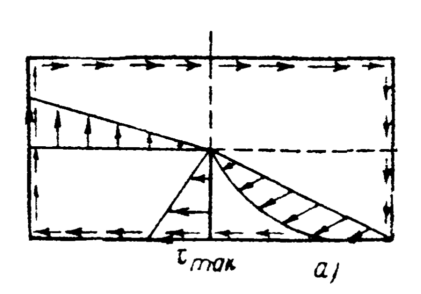
Для иллюстрации на фиг. 141 показано распределение напряжений для эллиптического и прямоугольного сечений. На основании закона парности касательных напряжений легко доказывается, что при кручении стержней любого сечения касательные напряжения в точках контура сечения направлены вдоль контура (по касательной); составляющие, перпендикулярные к контуру, требуют появления равных им составляющих касательных напряжений на боковой поверхности; но так как боковая (внешняя) поверхность свободна от них, в поперечном сечении нет касательных напряжений, перпендикулярных к контуру.

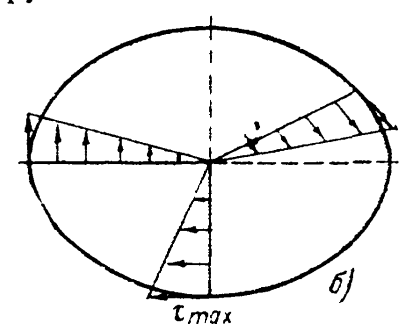
По этим соображениям можно считать, что касательные напряжения образуют сплошной поток, направленный вдоль контура сечения, как это видно из фиг. 141.

---

[1]) Подробнее вопрос о чистом и стеснённом кручении изложен в главе XXX.

Некоторые результаты, полученные теорией упругости, приведены в таблице 17. При пользовании таблицей 17 следует иметь в виду некоторые новые обозначения. Для всех видов сечений угол закручивания и наибольшее касательное напряжение могут быть выражены формулами, подобными формулам для круглого сечения; только вместо полярного момента инерции J_p будет входить величина $J_к$, выражающаяся тоже в единицах длины в четвёртой степени и зависящая от размеров сечения, а вместо W_p — величина $W_к$ той же размерности, что и W_p. Эти геометрические характеристики сечения условно названы моментом инерции при кручении $J_к$ и моментом сопротивления при кручении $W_к$.





Фиг. 141.

Для некоторых форм сечения (круг, кольцо)

$$J_к = J_p, \quad W_к = W_p.$$

Для пользования таблицей 17 имеем следующие формулы:

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к}, \tag{11.34}$$

$$\varphi = \frac{M_к l}{G J_к}. \tag{11.35}$$

Если имеет место кручение стержня сложного сечения, которое может быть разбито на части из *тонкостенных* элементов, то для него:

$$J_к = J_{к1} + J_{к2} + \ldots = \Sigma J_{кn},$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — номера тех простейших частей, на которые разбито сечение.

Так как угол закручивания для всего сечения и всех его частей один и тот же:

$$\varphi = \frac{M_к l}{G J_к} = \frac{M_{к1} l}{G J_{к1}} = \ldots = \frac{M_{кn} l}{G J_{кn}},$$

то крутящий момент распределяется между отдельными частями сечения пропорционально их жёсткостям:

$$M_{к1} = M_к \frac{J_{к1}}{J_к}; \quad M_{к2} = M_к \frac{J_{к2}}{J_к}; \quad \ldots; \quad M_{кn} = M_к \frac{J_{кn}}{J_к}.$$

Соответственно наибольшее касательное напряжение в каждой части (n) сечения будет равно:

$$\tau_{кn} = \frac{M_{кn}}{W_{кn}} = \frac{M_к}{W_{кn}} \left(\frac{J_{кn}}{J_к}\right) = \frac{M_к}{J_к} \left(\frac{J_{кn}}{W_{кn}}\right).$$

Таблица 17. **Данные по кручению некруглых профилей.**

Форма сечения	Момент инерции сечения при кручении $J_к$ — $см^4$	Момент сопротивления при кручении $W_к$ — $см^3$	Точки с наибольшими касат. напряжениями $\max\tau = \frac{M_к}{W_к}$	Примечания
	$J_к = \frac{d^4}{16}\left(2{,}6\frac{h}{d} - 1\right)$	$W_к = \frac{d^3}{8} \cdot \frac{\left(2{,}6\frac{h}{d} - 1\right)}{\left(0{,}3\frac{h}{d} + 0{,}7\right)}$	$\max\tau = \frac{M_к}{W_к}$	$\frac{h}{d} > 0{,}5$
	$J_к = \alpha\frac{D^4}{16}$ α и β — по таблице в зависимости от отношения $\frac{d}{D}$	$W_к = \beta\frac{D^3}{8}$	По дну канавки $\max\tau = \frac{M_к}{W_к}$	Значения коэффициентов α и β (см. ниже)
	$J_к = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{m^3}{m^2+1} b^4 = \frac{16F^4}{\pi^4 bh(b^2+h^2)}$	$W_к = \frac{\pi b^3}{16} \cdot m = \frac{\pi b^2 h}{16}$	В конце малой полуоси $\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к}$. В конце большой полуоси $\tau = \frac{\tau_{кmax}}{m}$	$\frac{h}{b} = m > 1$ F — площадь сечения

Значения коэффициентов α и β

d/D	α	β	d/D	α	β
0,0	1,57	1,57	0,40	0,76	1,22
0,05	0,80	1,56	0,60	0,66	0,92
0,10	0,81	1,56	0,80	0,52	0,63
0,20	0,82	1,46	1,00	0,38	0,38

Продолжение табл. 17

Форма сечения	Момент инерции сечения при кручении $J_к$ — $см^4$	Момент сопротивления при кручении $W_к$ — $см^3$	Точки с наибольшими касат. напряжениями $\max\tau = \frac{M_к}{W_к}$	Примечания
	$J_к = \frac{\pi}{16}\frac{m^3}{(m^2+1)}b_1^4(1-\alpha^4)$	$W_к = \frac{\pi b_1^3}{16}(1-\alpha^4)\,m$	В конце малой полуоси $\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к}$. В конце большой полуоси $\tau = \frac{\tau_{max}}{m}$	$\frac{h_1}{b_1} = \frac{h_2}{b_2} = m > 1$, $\frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \alpha < 1$. При малой толщине δ можно принять равномерное распределение напряжений по сечению: $\tau = \frac{M_к}{2F\delta}$
	$J_к = \alpha b^4$	$W_к = \beta b^3$	Посредине длинных сторон $\max\tau = \frac{M_к}{W_к}$. Посредине коротких сторон $\tau = \gamma\tau_{max}$. В углах напряжения равны нулю	Значения коэффициентов α, β и γ по таблице.

$m = \frac{h}{b}$	α	β	γ
1,0	0,140	0,208	1,0
1,5	0,294	0,346	0,859
2,0	0,457	0,493	0,795
3,0	0,790	0,801	0,753
4,0	1,123	1,150	0,745

Продолжение табл. 17

Форма сечения	Момент инерции сечения при кручении $J_к$ — $см^4$	Момент сопротивления при кручении $W_к$ — $см^3$	Точки с наибольшими касат. напряжениями $\max \tau = \frac{M_к}{W_к}$	Примечания
	$J_к = \frac{(m - 0,63)\, b^4}{3}$	$W_к = \frac{(m - 0,63)\, b^3}{3}$	В точках длинной стороны за исключением углов $\max \tau = \frac{M_к}{W_к}$. Посредине коротких сторон напряжения равны $\tau = 0,74\tau_{max}$	При $m = \frac{h}{b} > 4$ можно пользоваться как таблицей коэффициентов α, β и γ, так и приведёнными здесь формулами
	$J_к = \frac{2h_0^2 b_0^2 \delta_1 \delta_2}{h\delta_2 + b\delta_1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}$	$W_{к_1} = 2h_0 b_0 \delta_1$, $W_{к_2} = 2h_0 b_0 \delta_2$	Посредине длинной стороны $\tau_1 = \frac{M_к}{W_{к_1}}$. Посредине короткой стороны $\tau_2 = \frac{M_к}{M_{к_2}}$	Во внутренних углах имеет место высокая концентрация напряжений, достигающих предела текучести материала. При наличии закруглений радиуса r коэффициент концентрации принимается $\alpha_к = 1,74 \sqrt[3]{\frac{\delta_{max}}{r}}$

Коэффициенты к первой строке (столбец «Примечания»):

$m = h/b$	α	β	γ
6,0	1,789	1,789	0,743
8,0	2,456	2,456	0,742
10,0	3,123	3,123	0,742

Наибольшего значения τ достигает для того элемента, у которого $\frac{J_{кп}}{W_{кп}}$ будет максимальным. Тогда

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{J_к}\left(\frac{J_{кп}}{W_{кп}}\right)_{max} = \frac{M_к}{W_к},$$

где

$$W_к = \frac{J_к}{\left(\frac{J_{кп}}{W_{кп}}\right)_{max}}.$$

В дополнение к таблице 17 приведём формулы $J_к$ и τ для сечений, составленных из узких и длинных прямоугольников, как-то: уголковых, тавровых, двутавровых, корытных и т. п.

В этом случае можно принять

$$J_к = \eta \cdot \frac{1}{3}\sum h\delta^3, \tag{11.36}$$

где δ — короткие, а h — длинные стороны прямоугольников, на которые можно разбить сечение.

Коэффициент η зависит от формы сечения и равен:

для	уголкового сечения		$\eta = 1{,}00$,
»	двутаврового »		$\eta = 1{,}20$,
»	таврового »		$\eta = 1{,}15$,
»	корытного »		$\eta = 1{,}12$.

Угол φ попрежнему выразится формулой

$$\varphi = \frac{M_к l}{GJ_к}.$$

Наибольшего касательного напряжения можно ожидать в наиболее широком из прямоугольников, на которые мы разбиваем наш профиль. Это напряжение можно вычислить по формуле

$$\tau_{max} = \frac{M_к \delta_{max}}{J_к}, \tag{11.37}$$

где δ_{max} — наибольшая толщина из всех толщин фигуры.

Для расчёта на кручение трубчатых стержней некруглого сечения при малой толщине стенок можно воспользоваться формулами, полученными для круглого кольцевого сечения. Момент сопротивления тонкостенного кольцевого сечения по формуле (11.16) равен:

$$W_p = 2\pi r_0^2 t = 2F_0 t,$$

где F_0 — площадь круга, ограниченная средней линией кольца, а t — его толщина. Считая, что касательные напряжения равномерно распределены по сечению кольца, получим:

$$\tau = \frac{M_к}{2F_0 t}. \tag{11.38}$$

Этой формулой можно пользоваться для расчёта *тонкостенных* стержней некруглого замкнутого сечения.

Для угла закручивания имеем:

$$\varphi = \frac{M_к l}{GJ_p}\frac{r_0}{r_0} = \frac{\tau l}{Gr_0}.$$

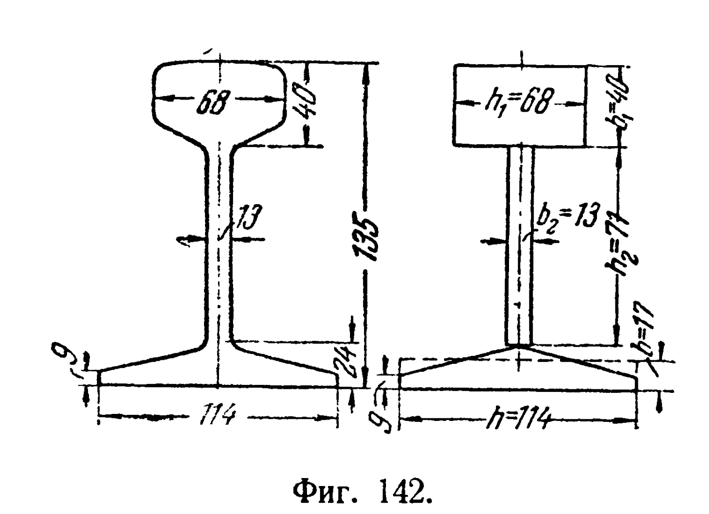
Умножив и поделив на $2\pi r_0 = S$, получим:

$$\varphi = \frac{\tau S}{2GF_0} l, \tag{11.39}$$

где S — длина осевой линии трубчатого сечения, а F_0 — площадь, ограниченная средней линией рассматриваемого замкнутого профиля.

§ 68. Примеры.

Пример 40. Найти наибольшее касательное напряжение и угол закручивания для рельса типа II A длиной 12 *м* под действием моментов $M_к = 0{,}1$ *тм*, приложенных к обоим концам рельса.



Фиг. 142.

Для вычисления напряжений и деформаций в рельсе при кручении профиль рельса надо разбить, как показано на фиг. 142; размеры этих частей даны на чертеже в миллиметрах.

Наибольшее напряжение и угол закручивания выразятся формулами (11.34) и (11.35):

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к}; \quad \varphi = \frac{M_к l}{GJ_к},$$

где $W_к = \frac{J_к}{(J_{кn}/W_{кn})_{max}}$; $J_к$ — момент инерции всего сечения при кручении; $W_к$ — момент сопротивления при кручении; $(J_{кn}/W_{кn})_{max}$ — отношение соответствующих моментов, вычисленных для той из частей сечения, для которой эта величина достигает максимума; $J_к = J'_к + J''_к + J'''_к$, где каждое из слагаемых в правой части — момент инерции при кручении, вычисленный для каждой из трёх частей сечения, изображенных на фиг. 142, с округлением размеров.

Головка рельса: $h_1 = 68$ *мм*; $b_1 = 40$ *мм*; $\frac{h_1}{b_1} = 1{,}7$; $J'_к = \alpha b_1^4$ — как для прямоугольника (таблица 17, случай 5) $\alpha = 0{,}359$; $J'_к = 0{,}359 \cdot 4^4 = 91{,}9$ *см*^{4}; $W'_к = \beta b^3$; $\beta = 0{,}405$; $W'_к = 0{,}405 \cdot 4^3 = 25{,}9$ *м*^{3};

$$\frac{J'_к}{W'_к} = \frac{91{,}9}{25{,}9} = 3{,}55 \text{ см}.$$

Шейка рельса: $h_2 = 71$ *мм*; $b_2 = 13$ *мм*; $m = \frac{h_2}{b_2} = 5{,}46 > 4$ (таблица 17, случай 6)

$$J''_к = \frac{1}{3}(m - 0{,}63)\, b^4 = 4{,}6 \text{ см}^4; \quad \frac{J''_к}{W''_к} = b = 1{,}3 \text{ см}.$$

Подошва рельса (таблица 17, случай 6): $b \approx \frac{24+9}{2} \approx 17$ *мм*; $m = \frac{h}{b} = \frac{114}{17} = 6,72 > 4$; $J_к''' = \frac{b^4}{3}(m - 0,63) = 19,1$ *см*⁴.

$$\frac{J_к'''}{W_к'''} = b = 1,7 \text{ см},$$

$$J_к = 91,9 + 4,6 + 19,1 = 115,6 \text{ см}^4.$$

Наибольшее $J_к/W_к$ — для головки; поэтому наибольшее τ в головке посредине её ширины — наверху:

$$W_к = \frac{J_к}{\left(\frac{J_к'}{W_к'}\right)} = \frac{115,6}{3,55} = 33 \text{ см}^3; \qquad \tau_{max} = \frac{M_к}{W_к} = \frac{10\,000}{33} = 300 \text{ кг/см}^2;$$

$$\varphi = \frac{M_к l}{GJ_к} = \frac{10\,000 \cdot 1200}{8 \cdot 10^5 \cdot 115,6} \approx 0,128 \text{ радиана}; \quad \varphi = \frac{180}{\pi} \cdot 0,128 = 7°33'.$$

Пример 41. При допускаемом напряжении $[\tau] = 50$ *кг/см*² вычислить наибольший крутящий момент для стальных стержней, имеющих следующие поперечные сечения: а) прямоугольник 18×30 *мм*; б) эллипс с диаметрами 18 и 30 *мм*; в) круг с диаметром 30 *мм*; г) квадратная труба со сторонами $a = 30$ *см* и толщиной стенок $\tau = 6$ *мм*.

Определим для прямоугольного сечения величину $m = \frac{30}{18} = 1,67$; соответствующие значения α и β возьмём из таблицы 17 (по интерполяции); $\beta = 0,396$; $\alpha = 0,3493$; тогда

$$J_к = \alpha b^4 = 0,3493 \cdot 1,8^4 = 3,66 \text{ см}^4; \quad W_к = \beta b^3 = 0,396 \cdot 1,8^3 = 2,315 \text{ см}^3.$$

При наибольшем напряжении $\tau_{max} = 500$ *кг/см*² допускаемый крутящий момент для прямоугольного сечения равен $M_а = \tau_{max} W_к = 2,315 \cdot 500 = 1157$ *кгсм* $= 11,57$ *кгм*.

Для эллиптического сечения

$$W_к = \frac{\pi b^2 h}{16} = \frac{\pi \cdot 1,8^2 \cdot 3,0}{16} = 1,91 \text{ см}^3$$

и допускаемый крутящий момент $M_б = 500 \cdot 1,91 = 955$ *кгсм* $= 9,55$ *кгм*. Для круглого сечения диаметром $d = 30$ *мм*

$$W_к = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi \cdot 1,5^3}{2} = 5,31 \text{ см}^3$$

и допускаемый момент $M_в = 500 \cdot 5,31 = 2655$ *кгсм* $= 26,55$ *кгм*.

И, наконец, для трубчатого квадратного сечения по формуле (11.38) имеем:

$$M_к = [\tau]\, 2 \cdot F_0 t,$$

где

$$F_0 = (a - t)^2 = (30 - 0,6)^2 = 860 \text{ см}^2,$$

$$M_к = 500 \cdot 2 \cdot 860 \cdot 0,6 = 516\,000 \text{ кгсм}.$$

Пример 42. Стальной стержень прямоугольного сечения передаёт крутящий момент $M_к = 100$ *кгм* при допускаемом напряжении $[\tau] = 400$ *кг/см²*; толщина стержня $t = 2{,}8$ *см*. Найти ширину b. Определим:

$$W_к = \frac{M_к}{[\tau]} = \frac{10\,000}{400} = 25 \text{ см}^3.$$

Отсюда находим коэффициент

$$\beta = \frac{W_к}{t^3} = \frac{25}{2{,}8^3} = 1{,}135.$$

По таблице 17 определяем m (по интерполяции):

$$m = 3{,}96 \quad \text{и} \quad b = tm = 2{,}8 \cdot 3{,}96 = 11{,}1 \text{ см.}$$

ОТДЕЛ IV.

ИЗГИБ. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ БАЛОК.

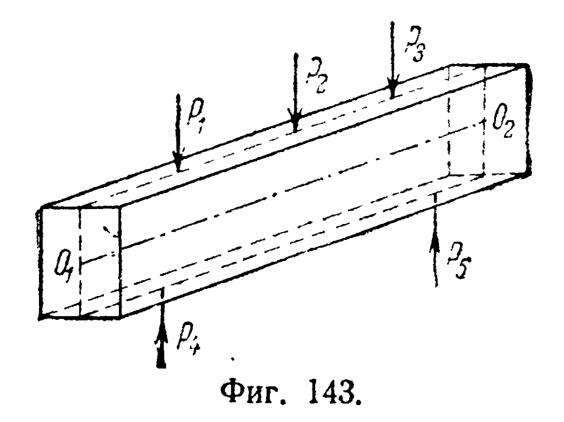
ГЛАВА XII.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПРОВЕРКЕ ПРОЧНОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ И МЕТОД ЕЁ РЕШЕНИЯ.

§ 69. Общие понятия о деформации изгиба. Устройство опор балок.

Деформация изгиба призматического стержня с прямой осью происходит, если к нему будут приложены в плоскостях, *проходящих через ось стержня*, пары сил или силы, перпендикулярные к его оси.

Стержень, работающий на изгиб, обычно называется балкой. Опыт показывает, что при указанном действии сил ось балки *искривляется*, балка изгибается. На фиг. 143 изображена в качестве примера система сил, изгибающих балку прямоугольного сечения; силы расположены в плоскости симметрии балки. Если плоскость действия сил не является плоскостью симметрии, помимо изгиба может наблюдаться скручивание стержня.



Фиг. 143.

Балки являются наиболее часто встречающимися элементами сооружений и машин, принимающими *давления* от других элементов конструкции (например, силы P_1, P_2, P_3 на фиг. 143) и передающими их тем частям, которые поддерживают балку (например, силы P_4, P_5 на фиг. 143).

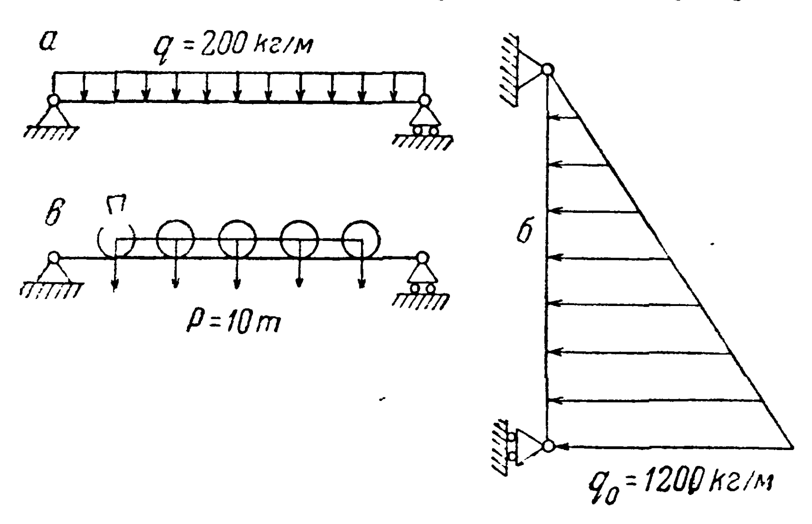
Таким образом, на балку действуют *приложенные* силы и *реакции* опор. Для решения задачи сопротивления материалов необходимо знать и те и другие.

Внешние приложенные силы можно вычислить, если известно, какие части конструкции опираются на балку. Эти нагрузки сводятся к сосредоточенным силам P (*т*, *кг*), парам сил M (*тм*, *кгм*) и равномерно и неравномерно распределённым по длине балки нагрузкам.

Равномерно распределённые нагрузки измеряются их интенсивностью q, т. е. величиной нагрузки, приходящейся на единицу длины балки, и выражаются в *т/м* и *кг/м*.

Интенсивность неравномерно распределённых нагрузок меняется по длине балки и обозначается через $q(x)$. В этом случае $q(x)$ равна величине нагрузки, приходящейся на единицу длины балки в рассматриваемой точке[1]). Иначе: $q(x)$ равно пределу отношения величины нагрузки, лежащей на длине dx в рассматриваемой точке балки, к этой длине.

Некоторые примеры балок изображены на фиг. 144, *а*, *б*, *в*. Первая из них, балка междуэтажного перекрытия, загружена равномерно распределённой нагрузкой $q = 200$ *кг/м*; вторая — стойка плотины, загружённая треугольной нагрузкой (давление воды) с интенсивностью $q(x)$, меняющейся от 0 до $q_0 = 1200$ *кг/м*; третья — главная балка моста, загружённая давлением колёс паровоза. Вагонная ось представляет собой балку, опирающуюся на колёса и загружённую давлением букс; балки, входящие в состав крыла самолёта, изгибаются давлением воздуха.



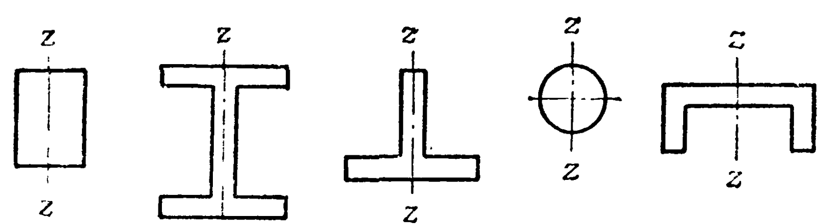
Фиг. 144.

Будем пока рассматривать лишь балки, удовлетворяющие следующим двум ограничениям:

1) сечение балки имеет хотя бы одну ось симметрии (фиг. 145);

2) все внешние силы лежат в этой плоскости симметрии балки.

Опорные реакции, уравновешивая приложенные к балке силы, будут расположены в той же плоскости.



Фиг. 145.

Для вычисления *опорных реакций* необходимо рассмотреть устройство опор балок. Эти опоры относятся обычно к одному из следующих трёх типов:

а) шарнирно-неподвижная опора;

б) шарнирно-подвижная опора;

в) защемлённый конец.

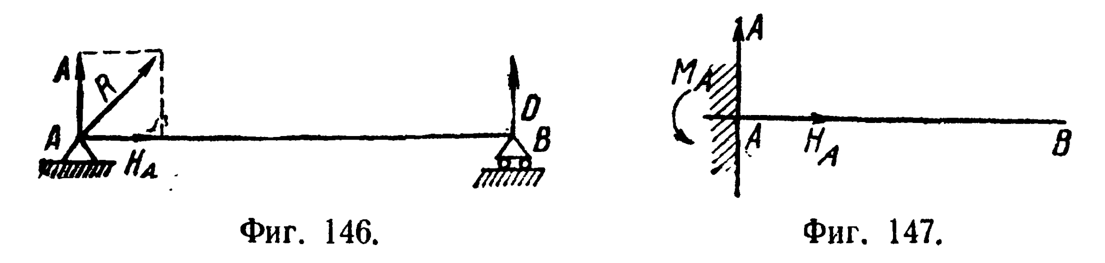
Шарнирно-неподвижная опора схематически изображена в точке A на фиг. 146. Она позволяет опорному сечению балки свободно

---

[1]) Обозначение $q(x)$ означает, что интенсивность нагрузки в этом случае является функцией x.

поворачиваться вокруг шарнира, расположенного в центре тяжести A опорного сечения, но не допускает поступательного перемещения этого конца. Это сопротивление выражается реакцией, которая передаётся от опоры через шарнир на конец балки и лежит в плоскости действия внешних сил.

Нам известна только точка приложения этой реакции — шарнир — как единственная точка, в которой происходит соприкосновение балки и опоры, но неизвестны ни величина реакции, ни её направление. Поэтому будем всегда заменять эту реакцию двумя её составляющими: одной H_A, направленной по оси балки, и другой A, направленной перпендикулярно к оси. Шарнирно-неподвижная опора даёт, с этой точки зрения, две неизвестные по величине реакции (A и H_A).



Фиг. 146. Фиг. 147.

Шарнирно-подвижная опора допускает, помимо поворотов, также свободное перемещение в соответствующем направлении (фиг. 146, точка B). Таким образом, рассматриваемая опора *препятствует* лишь перемещению, перпендикулярному к определённому направлению. В соответствии с этим реакция такой опоры проходит через центр шарнира и направлена перпендикулярно к линии свободного перемещения опоры — обычно оси балки. *Шарнирно-подвижная опора даёт лишь одну неизвестную реакцию* B.

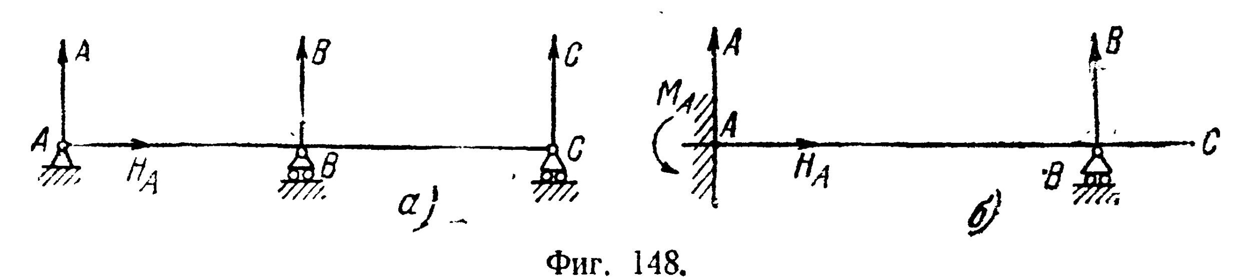
Наконец, при *защемлённом* конце балки опора препятствует всяким перемещениям этого конца в плоскости действия сил. Она может быть получена из шарнирно-неподвижной опоры путём уничтожения шарнира (фиг. 147).

Уничтожая шарнир, мы препятствуем вращению концевого сечения балки — вводим новую реакцию, которая должна помешать этому *вращению*; такой реакцией может быть только *пара сил*. Поэтому *защемлённый конец балки даёт три неизвестные реакции*: составляющую H_A, параллельную оси балки, составляющую A, перпендикулярную к оси, и опорный момент M_A.

Балка может опираться на ряд опор указанных типов. Так, на фиг. 147 изображена балка, защемлённая одним концом; на фиг. 146 — балка, опёртая шарнирно-неподвижно на одном конце и подвижно на другом; на фиг. 148, *а* — та же балка, подпёртая посредине ещё одной шарнирно-подвижной опорой; на фиг. 148, *б* — балка, защемлённая одним концом и подпёртая шарнирно-подвижной опорой в одном из промежуточных сечений.

На всех этих фигурах изображены реакции опор, которые *могут*, в связи с конструкцией опорных частей, возникнуть при действии на балки внешних нагрузок; эти нагрузки на чертежах не показаны.

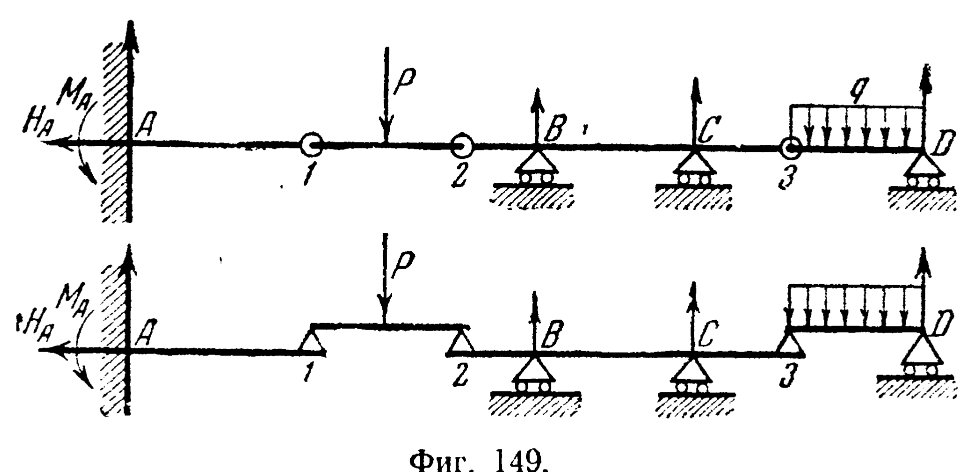
Для определения неизвестных реакций нам придётся в первую очередь использовать уравнения статики, выражающие условие, что



Фиг. 148.

балка в целом при действии всех сил и реакций, приложенных к ней, находится в равновесии. Так как все эти силы лежат в одной плоскости, то уравнений равновесия для них можно написать *три*. Поэтому задача определения реакций из условий статики разрешима при наличии *лишь трёх* неизвестных реакций.

Таким образом, балки с устройством опор, дающим три реакции (фиг. 146—147), являются *статически определимыми*. К статически определимым балкам относятся также многопролётные (многоопорные) балки с промежуточными шарнирами; такие балки могут быть расчленены на основные статически определимые балки (*A* — *1* и *2*—*3*) и подвесные (*1*—*2* и *3* — *D*), опирающиеся на первые через шарниры (фиг. 149).



Фиг. 149.

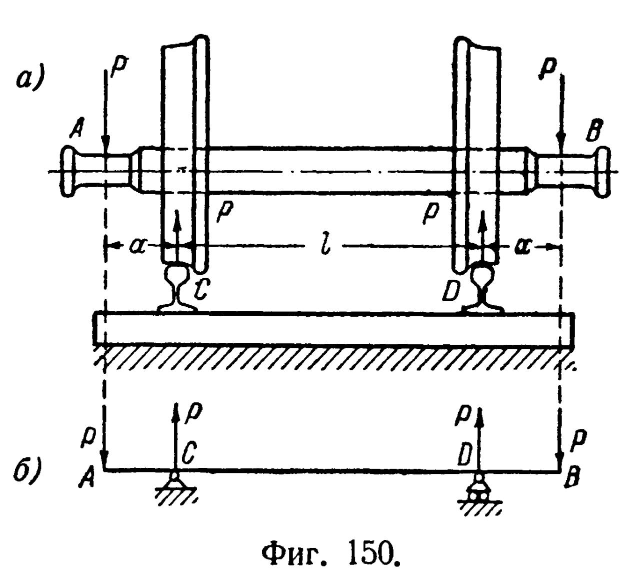
Прочие балки относятся к категории *статически неопределимых*, вопросам расчёта которых посвящены специальные главы.

Устройство опор балок в действительности далеко не всегда соответствует схемам, изображённым на фиг. 146 и 147. Поэтому, приступая к решению задачи по расчёту балки, надо прежде всего рассмотреть, как запроектировано устройство опор этой балки, и отнести эти опоры к тому или иному виду из изображённых на фиг. 146 и 147.

Так как деформации балок обычно весьма малы и напряжения лежат в пределах упругости, надо установить, допускает ли устройство опор балки хотя бы небольшой поворот или перемещение; этого уже достаточно, чтобы считать опору шарнирной или подвижной. Если конец металлической или деревянной балки заложен в кирпичную стену на небольшую глубину, то можно считать вполне возможным незначительные повороты этого конца и, стало быть, принять его при расчёте за шарнирный.

Таким образом, приступая к определению опорных реакций балки, необходимо схематизировать опорные части, заменяя действительную конструкцию наиболее приближающейся к ней схемой (фиг. 146 и 147).

В качестве примера рассмотрим работу вагонной оси (фиг. 150, *а*). В точках A и B на ось передаются давления P от кузова вагона; в точках же C и D эти давления передаются рельсам. Мы можем рассматривать ось как балку (фиг. 150, *б*), нагружённую силами P в точках A и B и имеющую опоры в точках C и D. Спрашивается, к какой типовой схеме следует отнести эти опоры?



Фиг. 150.

Необходимо выяснить, чему мешает и что разрешает конструктивное устройство этих опор. Пренебрегая трением между колесом и рельсом в поперечном направлении и учитывая наличие реборд, можем сказать, что эти опоры:

1) препятствуют перемещениям точек C и D оси в вертикальном направлении;

2) препятствуют перемещениям всей оси в горизонтальном направлении;

3) допускают относительное сближение или удаление этих точек;

4) допускают повороты опорных сечений оси.

Этим условиям можно удовлетворить, поставив в одной из точек C и D шарнирно-неподвижную, а в другой — шарнирно-подвижную опору, как схематически показано на фиг. 150, *б*.

Для определения опорных реакций в статически определимых балках мы будем пользоваться тремя уравнениями равновесия. При этом за ось x будем принимать ось балки, за начало координат — центр одного из опорных шарниров, а ось y будем направлять вертикально вверх.

Сначала составляем условие равенства нулю суммы проекций всех сил на ось x — для определения горизонтальной составляющей опорной реакции.

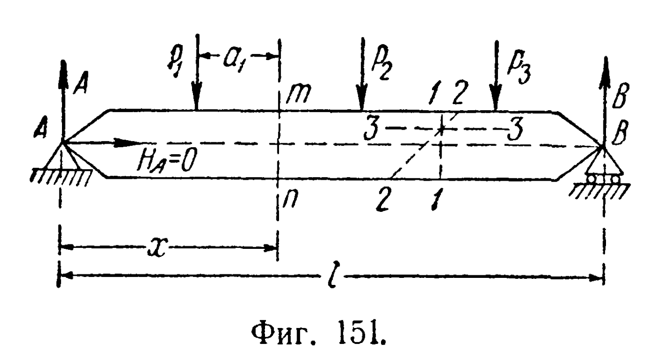
Вертикальные составляющие и опорный момент определяем, составляя два условия равенства нулю суммы моментов всех сил относительно двух каких-либо точек балки, обычно относительно центров тяжести опорных сечений балки. Условие равенства нулю суммы проекций сил на ось y лучше оставить для проверки правильности вычислений: оно должно обращаться в тождество при подстановке в него определённых уже величин опорных реакций.

Для балок с промежуточными шарнирами рассматриваем сначала равновесие подвесных балок, как двухопорных балок, и находим их реакции. Эти реакции уравновешивают давления, передающиеся через шарниры от подвесных балок на основные. Зная давления, находим реакции основных балок (см. § 73).

§ 70. Характер напряжений в балке. Изгибающий момент и поперечная сила.

Выбор расчётной схемы и вычисление опорных реакций завершают первую часть задачи о расчёте балки — определение внешних сил, действующих на балку.

Теперь можно перейти к отысканию напряжений в сечениях балки; это будет следующим шагом в решении задачи об изгибе. В качестве объекта для рассуждений возьмём балку (фиг. 151), шарнирно-опёртую по концам и нагружённую силами P_1, P_2, P_3. Реакция H_A при заданной системе нагрузок равна нулю, реакции же A и B определяются из уравнений моментов; таким образом, внешние силы известны.



Фиг. 151.

При вычислении напряжений необходимо отыскать *опасное* сечение балки, через которое передаются *наибольшие* напряжения. Для этого мы должны получить формулы, позволяющие вычислить напряжения по любому сечению (например, наклонному сечению *2—2*); после этого можно будет найти и опасное сечение и наибольшие напряжения.

Сначала научимся вычислять напряжения по сечениям, перпендикулярным к оси; затем — по сечениям, параллельным оси, и уже потом — по любым сечениям. Возьмём перпендикулярное к оси сечение mn с центром тяжести O на расстоянии x от левого опорного конца. Для вычисления напряжений по этому сечению отбросим одну часть балки и заменим действие её на оставшуюся часть искомыми напряжениями. Оставить следует, для упрощения вычислений, ту часть балки, к которой приложено меньше сил, в нашем случае — левую.

На оставленную левую часть балки (фиг. 152) в каждой точке сечения *mn* будут действовать напряжения, которые можно представить составляющими: нормальными σ и касательными τ. Эти напряжения будут уравновешивать внешние силы A и P_1, приложенные к оставленной части. Внешние силы и напряжения вместе образуют систему сил в пространстве, для которой можно составить шесть уравнений равновесия.

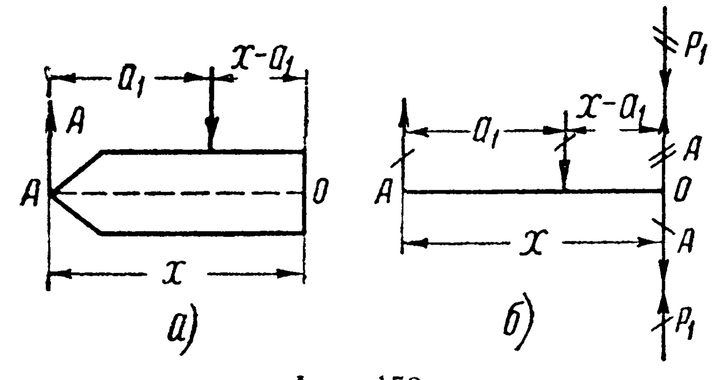
Фиг. 152.

Пытаясь из этих уравнений найти напряжения σ и τ, мы должны были бы для каждого сечения (при изменении x) заново составлять уравнения равновесия, так как система внешних сил, приложенных к рассматриваемой части, не была бы одинаковой. Например, для сечения между силами P_2 и P_3 к левой части были бы приложены не две, а уже три силы.

Чтобы получить для σ и τ общие формулы, годные при любом значении x, удобно, чтобы система внешних сил, действующих на оставленную часть, была всегда единообразного, *стандартного* вида.

Так как эта система состоит из сил, лежащих в одной плоскости, то её всегда можно заменить *силой*, приложенной в какой-либо точке, центре приведения, и парой сил; в частном случае сила может обратиться в нуль. Это и будет достаточно простой и в то же время единообразный вид, к которому *всегда* можно привести систему внешних сил, действующих на оставленную часть балки.

За центр приведения обычно берут центр тяжести рассматриваемого сечения, что, как мы увидим дальше, значительно упрощает формулы для вычисления σ и τ.



Фиг. 153.

В рассматриваемой левой части балки заменим силы A и P_1 эквивалентной системой стандартного типа, приведя их к точке O (фиг. 153). Приложим в этой точке две силы A — вверх и вниз. Тогда система из реакции A и этих двух сил сведётся к сосредоточенной силе A (на фиг. 153, *б* дважды перечёркнута), приложенной в точке O, и к паре из сил A (один раз перечёркнута) с плечом x. Момент этой пары равен Ax. Таким же образом поступаем и с силой P_1.

Складываем все дважды перечёркнутые силы, приложенные в точке O, и моменты всех пар, составленных из однажды перечёркнутых сил. При сложении положительными будем считать направления для сил — вверх, а для моментов — по часовой стрелке.

В результате сложения вместо сил A и P_1 мы получим силу Q, приложенную в центре тяжести сечения, и пару с моментом M; величины M и Q определяются формулами:

$$M = Ax - P_1(x - a_1),$$
$$Q = A - P_1.$$

Момент пары, приложенной к оставленной части балки, называется *изгибающим моментом* в выбранном сечении; можно также считать, что изгибающий момент — это момент системы сил, заменяющих в данном сечении действие отброшенной части балки на её оставшуюся часть.

Изгибающий момент M *равен* сумме моментов всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой части балки, относительно центра тяжести проведённого сечения. *Сила* Q, стремящаяся сдвинуть оставленную часть балки относительно отброшенной, называется *поперечной* (или перерезывающей) *силой* в данном сечении.

Поперечную силу Q можно также рассматривать как проекцию на плоскость сечения равнодействующей системы сил, заменяющих в данном сечении действие отброшенной части балки на оставшуюся её часть.

Поперечная сила Q *равна* сумме проекций всех внешних сил, приложенных к оставленной части балки, на нормаль к её оси. Таким образом, M и Q совместно заменяют систему внешних сил, приложенных к рассматриваемой части балки, и уравновешивают систему усилий, передающихся через проведённое сечение со стороны отброшенной части балки.

Заметим, что при действии на балку только сил, *перпендикулярных* к её оси, можно говорить о поперечной силе, как об алгебраической *сумме сил,* приложенных к оставленной части балки. Важно отметить, что M и Q надо рассматривать при этом определении *вместе,* ибо они представляют собой систему *стандартного* вида, заменяющую систему A и P_1, приложенную к рассматриваемой части балки. Эти определения дают ответ на вопрос, как *вычислить* M и Q по данным внешним силам.

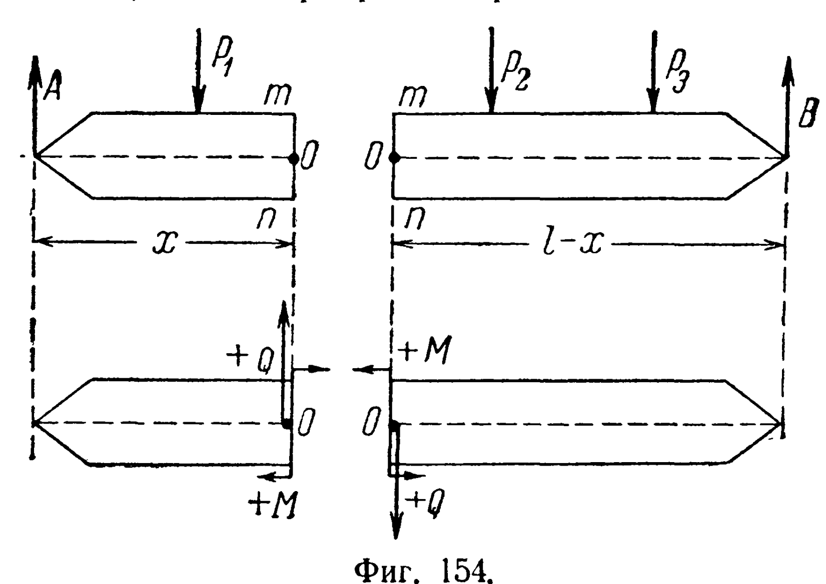
При вычислении M и Q в приведённом примере мы рассматривали левую часть балки, но во многих случаях будет удобнее для вычислений рассматривать правую часть и отбросить левую. Установим связь между значениями M и Q для левой и правой частей балки.

По фиг. 154 на часть балки слева от сечения mn действует система внешних сил A, P_1; на правую часть — система P_2, P_3 и B.

Так как вся балка в целом (фиг. 154) находится в равновесии, то система сил A и P_1 должна уравновешивать систему сил P_2, P_3 и B. Первая система заменена силой Q, приложенной к точке O и направленной вверх, и парой M, вращающей по ходу часовой стрелки; поэтому система P_2, P_3 и B после приведения к центру тяжести

рассматриваемого сечения должна замениться такой же силой Q, приложенной в точке O, но направленной вниз (фиг. 154), и парой M, вращающей против хода часовой стрелки.

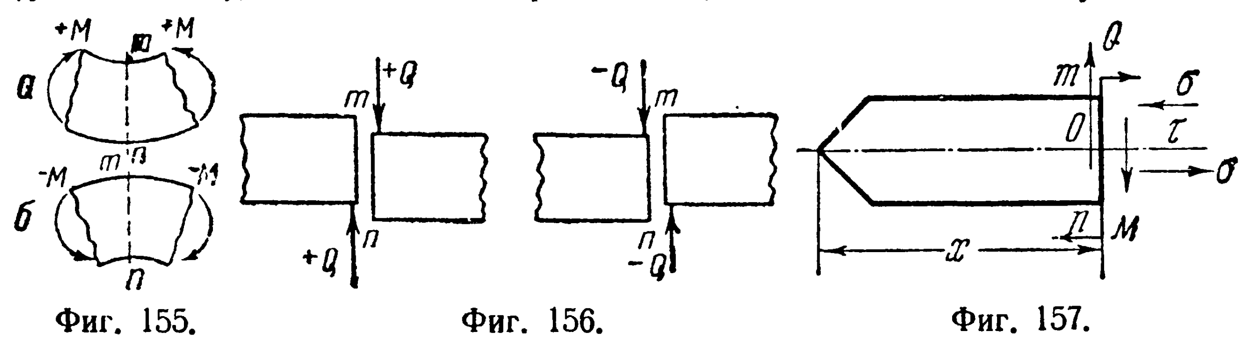
Значит, если мы рассматриваем правую часть балки, то получим для M и Q те же величины, что и при рассмотрении левой части, но направления их будут противоположны.



Фиг. 154.

Чтобы получать для изгибающего момента и поперечной силы одни и те же значения не только по величине, но и по знаку, независимо от выбора правой или левой части балки, мы условимся считать *положительными*: M — по часовой стрелке и Q — вверх, если при вычислениях рассматривается *левая* часть балки, и обратно, M — против часовой стрелки и Q — вниз, если рассматривается *правая* часть. Это условие показано на фиг. 154. При таком выборе знаков мы будем для каждого сечения балки получать одинаковые значения M и Q, *независимо* от выбора при вычислениях *левой* или *правой* половины балки.

Знаки для M и Q можно связать с характером деформации балки при действии внешних сил. Если изгибающий момент в сечении mn положителен, то балка в этом сечении гнётся выпуклостью вниз (фиг. 155, *а*); если же он отрицателен, то балка гнётся выпуклостью



Фиг. 155. Фиг. 156. Фиг. 157.

вверх (фиг. 155, *б*). В сечении, где M переходит через нуль, кривизна балки меняет своё направление, т. е. ось балки в этом сечении имеет точку перегиба.

На фиг. 156 изображён характер деформаций в сечении mn при действии положительной и отрицательной поперечных сил.

Теперь мы можем перейти к вопросу о выражении напряжений σ и τ через M и Q. На фиг. 157 вновь изображена часть балки, раньше показанная на фиг. 152 и 154. Разница в том, что вместо

внешних сил A и P к рассматриваемой части приложены пара M и сила Q. Напряжения σ и τ, заменяющие действие правой отброшенной части, должны уравновесить эту систему внешних сил.

Нормальные напряжения σ не могут уравновесить силы Q, так как направлены перпендикулярно к ней. Но они *могут* сложиться в пару, уравновешивающую изгибающий момент M, так как направлены параллельно плоскости симметрии балки, в которой лежит M. Таким образом, нормальные напряжения σ зависят только от M.

С другой стороны, касательные напряжения τ не могут уравновесить пару M, так как они лежат в плоскости mn, перпендикулярной к плоскости действия изгибающего момента; силу же Q они могут уравновесить, так как лежат в той же плоскости mn, что и она.

Таким образом, приходим к выводу: поперечная сила Q уравновешивается только касательными усилиями, *сумма* которых должна быть равна и противоположна силе Q. Следовательно:

$$\sigma = f_1(M), \tag{12.1}$$

$$\tau = f_2(Q). \tag{12.2}$$

Вывод формул (12.1) и (12.2) достаточно произвести только один раз для какого-нибудь сечения балки. В дальнейшем этими выражениями можно пользоваться для любого сечения, стоит только найти для него значения M и Q.

Напряжения σ и τ будут тем бо́льшими, чем больше M и Q; так как для проверки прочности материала необходимо найти наибольшие значения этих напряжений, то мы должны отыскать те сечения балки, для которых значения изгибающего момента и поперечной силы достигают максимума. Отысканию этих *опасных* сечений очень помогает построение так называемых *эпюр* изгибающих моментов и поперечных сил, т. е. графиков, которые показывают, как меняются для различных сечений балки величины M и Q в зависимости от изменения переменной x.

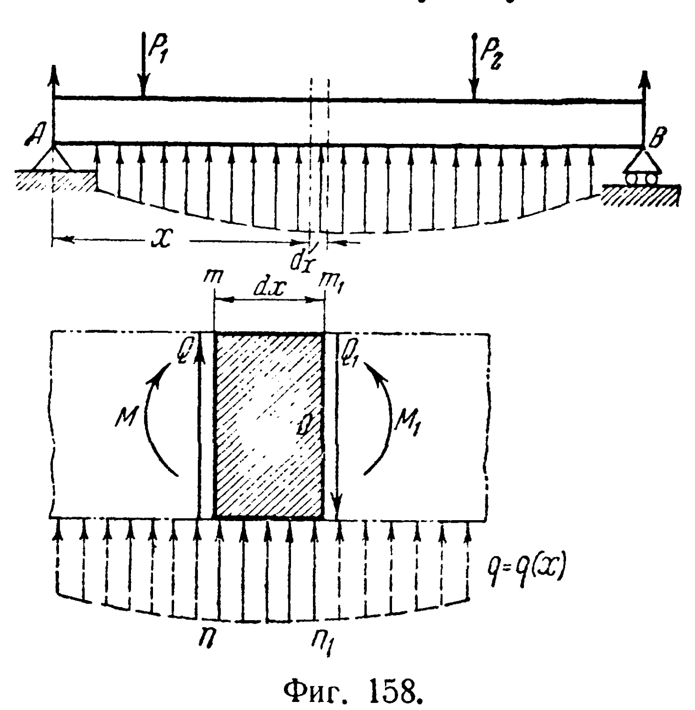
Таким образом, поперечная сила $Q(x)$ и изгибающий момент $M(x)$ являются функциями от x. Для краткости в дальнейшем будем их обозначать Q и M, сохраняя значок (x) лишь в тех случаях, когда необходимо *подчеркнуть*, что Q и M — величины переменные, зависящие от x. При построении эпюр откладывают под каждым сечением от оси абсцисс, проведённой параллельно оси балки, ординаты, которые в выбранном масштабе изображают величину изгибающего момента или поперечной силы в этом сечении. Ниже (§ 72) мы покажем построение этих эпюр на примерах.

Построение эпюр Q и M может быть облегчено, если будут установлены некоторые зависимости между значениями поперечной силы и изгибающего момента в любом сечении балки, а также связь этих величин Q и M с приложенной к балке нагрузкой.

Отыскание этих зависимостей между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом дано в следующем параграфе.

§ 71. Дифференциальные зависимости между интенсивностью сплошной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом.

Мы выяснили (§ 70), что внешние силы в любом сечении балки приводятся к силе Q и паре с моментом M. Следовательно, для равновесия отсечённой части необходимо, как мы уже установили, чтобы и внутренние силы привелись к такой же силе Q и моменту M.



Фиг. 158.

Поэтому, если из балки (фиг. 158) вырезать элемент бесконечно малой длины dx, то он должен находиться в равновесии под действием части сплошной нагрузки с интенсивностью q (которую на длине dx можно считать постоянной), а также сил Q и Q_1 и моментов M и M_1, заменяющих действие на него соответственно левой и правой отброшенных частей[1]). Заметим, что $Q_1 = Q + dQ$ и $M_1 = M + dM$, так как приращения этих величин при переходе от сечения mn к бесконечно близкому сечению m_1n_1 — также бесконечно малые величины.

Условия равновесия выделенного элемента напишутся так:

$$\sum Y = 0; \qquad Q + q\,dx - (Q + dQ) = 0,$$

$$\sum M_0 = 0; \; M + Q\,dx + q\,dx \cdot \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

Из первого уравнения имеем:

$$q\,dx - dQ = 0,$$

откуда

$$\frac{dQ}{dx} = q, \tag{12.3}$$

т. е. *производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности сплошной нагрузки в том же сечении.*

Из второго уравнения, пренебрегая бесконечно малыми второго порядка малости, получим:

$$Q\,dx - dM = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dM}{dx} = Q, \tag{12.4}$$

---

[1]) В пределах участка dx не приложено сосредоточенной силы или пары сил.

т. е. *производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе в том же сечении.*

Взяв производную от обеих частей равенства (12.4), получим:

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dQ}{dx} \text{ или } \frac{d^2M}{dx^2}=q, \qquad (12.5)$$

т. е. *вторая производная от изгибающего момента по абсциссе равна интенсивности сплошной нагрузки.* Если q направлено вниз, то уравнение (12.5) будет: $\frac{d^2M}{dx^2}=-q$.

Полученные зависимости могут быть использованы при построении эпюр Q и M, особенно если учесть, что производная функции геометрически представляет собой тангенс угла наклона, образуемого с осью абсцисс, касательной в данной точке кривой. Иначе говоря, поперечная сила в данном сечении может рассматриваться как тангенс угла наклона касательной к эпюре M в точке, соответствующей этому сечению. Поэтому надо иметь в виду, что если ось x направлена справа налево, то $\frac{dM}{dx}=-Q$, так как угол наклона касательной меняет знак при изменении направления оси абсцисс.

Из уравнения (12.3) следует, что в том сечении, где интенсивность нагрузки $q=0$, поперечная сила $Q=Q_{\max}$ или $Q=Q_{\min}$, так как если $q=\frac{dQ}{dx}=0$, то касательная к эпюре Q параллельна оси абсцисс. По той же причине из формулы (12.4) следует другое, более важное заключение, что изгибающий момент достигнет максимума (или минимума) в том сечении, где $Q=\frac{dM}{dx}=0$, т. е. в сечении, где поперечная сила переходит через нуль.

Хотя уравнение (12.4) даёт возможность получить выражение для Q, как производной от M, однако при построении эпюр следует определять Q независимо, используя уравнение (12.4) только для проверки. Так же для проверки правильности построения эпюры M может быть использовано уравнение (12.5), поскольку знаком второй производной определяется направление выпуклости кривой, по которой очерчена эпюра M. Указания о проверке правильности построения эпюр Q и M даны ниже (§ 74).

§ 72. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Пример 43. Построить эпюры моментов и поперечных сил для балки, лежащей на двух опорах и нагружённой силой P (фиг. 159).

Для вычисления M и Q в любом сечении этой балки прежде всего необходимо отыскать реакции. На фиг. 159 намечено предполагаемое направление этих реакций A, H_A и B.

Из условия равенства нулю суммы проекций всех сил на ось балки получаем, что

$$H_A=0.$$

Этот результат можно было предвидеть заранее, так как нагрузки перпендикулярны к оси балки.

Составляя сумму моментов сил относительно точки B, получаем:

$$\sum M_B = 0; \quad +Al - Pb = 0$$

и

$$A = +\frac{Pb}{l}.$$

Точно так же

$$\sum M_A = 0; \quad -Bl + Pa = 0$$

и

$$B = +\frac{Pa}{l}.$$

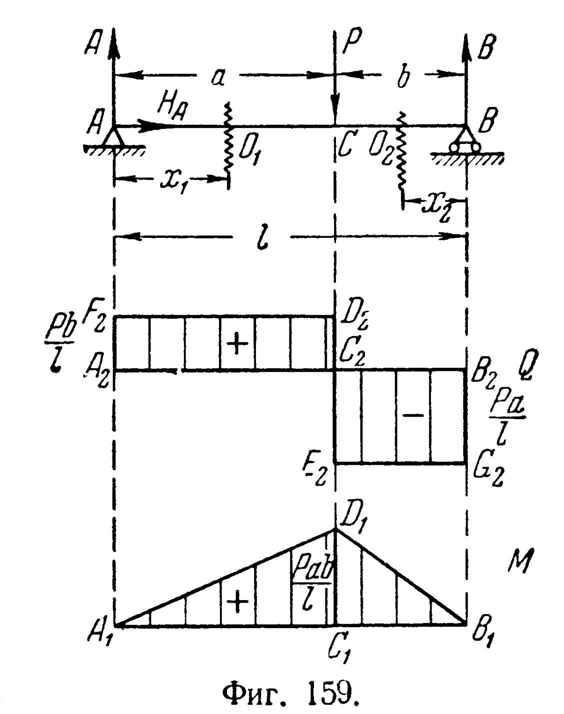
Для проверки правильности полученных результатов составим сумму проекций всех сил на вертикальную ось y:

$$A - P + B = 0, \quad \text{или} \quad A + B = P.$$

Подставляя значение найденных реакций, получим:

$$\frac{Pb}{l} + \frac{Pa}{l} = \frac{P(a+b)}{l} = P,$$

что удовлетворяет условию равновесия. Такую проверку *всегда* необходимо производить, так как ошибка в определении реакций неизбежно поведёт к ошибкам и в построении эпюр Q и M.



Фиг. 159.

Для получения выражений, дающих нам величины поперечной силы и изгибающего момента в любом сечении балки, возьмём какое-либо сечение $1-1$ между точками A и C на расстоянии x_1 от конца A. Заметим, что выражение «взять сечение» требует не только обозначить это сечение на чертеже, но и *обязательно отметить* его расстояние от выбранного начала координат. Центр тяжести проведённого сечения обозначен через O_1.

Для вычисления поперечной силы Q в этом сечении удобнее рассмотреть левую отсечённую часть, так как к ней приложено меньше сил (только сила A). Рассматривая часть балки слева от сечения O_1 и проектируя приложенные к ней внешние силы на перпендикуляр к оси балки, получаем выражение для поперечной силы Q_1 в сечении на расстоянии x_1 от опоры A:

$$Q_1 = +A = \frac{Pb}{l}. \qquad (12.6)$$

Поперечная сила в сечении с абсциссой x_1 не зависит от этого расстояния. Таким образом, пока x_1 меняется в пределах от 0 до a, поперечная сила остаётся постоянной, и её эпюра на этом участке изобразится прямой F_2D_2, параллельной оси абсцисс A_2B_2 (фиг. 159).

Выражение (12.6) для Q_1 будет справедливым, пока взятое нами сечение не перешло за точку C, т. е. пока $0 \leqslant x_1 \leqslant a$. Если $x_1 > a$, в левую часть балки попадут уже две силы A и P; следовательно, сумма проекций сил, приложенных к левой отсечённой части балки, изменится.

Чтобы найти величину поперечной силы на втором участке, придётся взять ещё одно сечение между точками B и C с центром тяжести O_2. Расстояние его x_2 будем отсчитывать от правой опоры B. В этом случае нам будет выгоднее рассматривать правую часть балки, так как на неё действует лишь сила B.

Рассматривая правую отсечённую часть балки, получим выражение для поперечной силы в сечении 2—2:

$$Q_2 = -B = -\frac{Pa}{l}. \qquad (12.7)$$

Знак минус взят потому, что сила B, приложенная к *правой* отсечённой части, направлена вверх.

Нетрудно видеть, что если бы мы рассматривали левую отсечённую часть, то получили бы то же значение для Q_2:

$$Q_2 = A - P = -B \text{ (так как } A + B = P).$$

Выражение (12.7) пригодно при любом значении x_2, не выходящем за пределы участка BC, т. е. при $0 \leqslant x_2 \leqslant b$, и показывает, что Q_2 от x_2 не зависит.

График для поперечной силы на протяжении второго участка представляет собой прямую E_2G_2, параллельную оси абсцисс. Эпюра поперечных сил имеет разрыв — скачок в месте приложения силы P_1; в этом месте поперечная сила переходит через нуль и не равна отрезку $D_2E_2 = P$. В сечении непосредственно слева от C

$$Q = +\frac{Pb}{l};$$

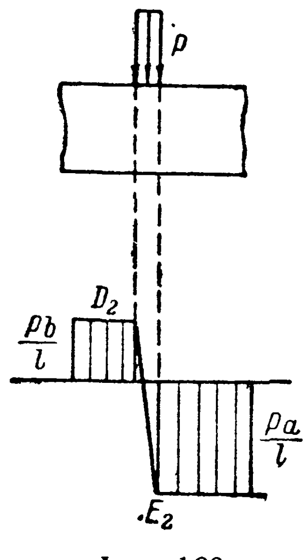
в сечении же непосредственно справа

$$Q = -\frac{Pa}{l}.$$

Отметим, что абсолютная величина скачка равна величине приложенной в этом сечении сосредоточенной силы P.

Такое очертание эпюры поперечных сил (фиг. 159) есть следствие того, что мы при расчёте считаем сосредоточенную силу P приложенной в *одной* точке C. В действительности передача давления P на балку

происходит через очень малую площадку, имеющую некоторую длину вдоль балки (фиг. 160). Поэтому на самом деле поперечная сила на протяжении этой длины постепенно изменяется от величины $+\frac{Pb}{l}$ до $-\frac{Pa}{l}$, переходя через нуль.



Фиг. 160.

Наибольшим значением поперечной силы по абсолютной величине в данном примере (при $a > b$) будет

$$|Q_{max}| = \frac{Pa}{l}.$$

Опасными в отношении касательных напряжений будут все сечения участка балки CB.

Для построения эпюры изгибающих моментов воспользуемся теми же сечениями $1-1$ (с началом координат в точке A) для левой части балки и $2-2$ (с началом координат в точке B) для правой части балки.

Рассматривая левую отсечённую часть, найдём значение момента в сечении $1-1$, как сумму моментов приложенных к ней сил относительно центра тяжести сечения O_1:

$$M_1 = A \cdot x_1 = \frac{Pb}{l} \cdot x_1, \tag{12.8}$$

причём M_1 — функция первой степени от x_1. Следовательно, если мы будем передвигать наше сечение, менять x_1, то M_1 будет меняться по закону прямой линии. Полученное выражение (12.8) для M_1 будет пригодным, пока наше сечение не перешло за точку C, т. е. пока $0 \leqslant x_1 \leqslant a$.

Как только x_1 станет больше a, на левую часть балки попадут уже две силы: A и P, и формула (12.8) окажется непригодной. Так как этот график — прямая линия, то x_1 достаточно дать лишь два значения для получения двух точек эпюры моментов. При $x_1 = 0$ получаем $M_1 = 0$ — это ордината под точкой A. Точно так же при $x_1 = a$ получим $M_1 = +\frac{Pab}{l}$ — ордината под сечением C.

При построении эпюр условимся откладывать положительные ординаты вверх (в сторону положительной оси y), а отрицательные — вниз; другими словами, все ординаты *эпюры моментов* откладываются на *вогнутой стороне* балки. *Иногда принимают и обратное расположение ординат,* что часто практикуется при расчёте рам.

Отложив от оси абсцисс *вверх* (положительный момент!) отрезок C_1D_1, выражающий в масштабе ординату $\frac{Pba}{l}$, и соединив точку D_1 и A_1 прямой, получаем первый участок эпюры моментов. Для построения эпюры на втором участке составим выражение момента

сил, приложенных к правой отсечённой части балки, относительно точки O_2:

$$M_2 = Bx_2 = \frac{Pa}{l} \cdot x_2. \qquad (12.9)$$

Момент и на этом участке получился положительным, так как мы рассматривали *правую* часть, и сила B вращала её относительно точки O_2 *против* часовой стрелки. Полученное выражение (12.9) представляет собой уравнение прямой линии и пригодно при $0 \leqslant x_2 \leqslant b$. При $x_2 = b$, $M_2 = +\frac{Pab}{l}$ и при $x_2 = 0$, $M_2 = 0$.

Таким образом, второй участок эпюры моментов изображается прямой D_1B_1. На всём протяжении балки изгибающий момент положителен и достигает максимума в сечении C — в месте приложения силы P, где он равен

$$M_{max} = \frac{Pab}{l}. \qquad (12.10)$$

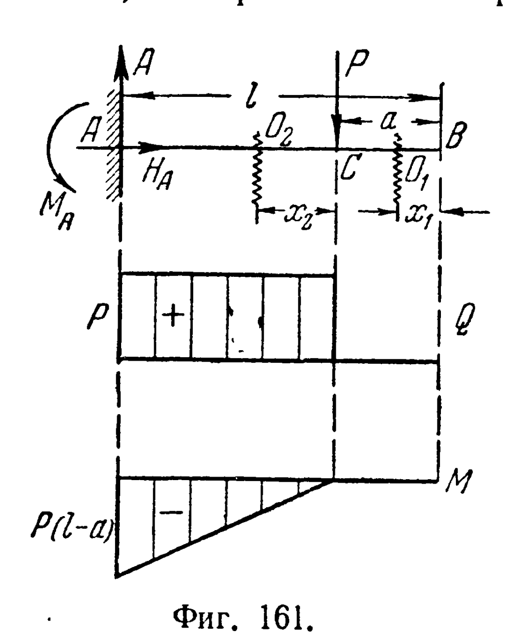
В этом сечении будут наибольшие нормальные напряжения.

При $a = b = \frac{l}{2}$ (сила приложена посредине пролёта) получаем:

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}. \qquad (12.10')$$

Рассмотрим ещё несколько примеров построения эпюр M и Q при различных видах загружения балки.

Пример 44. Построим эпюры моментов и поперечных сил для балки, изображённой на фиг. 161. Так как у этой балки правый конец свободен, то при построении эпюр можно обойтись без предварительного определения опорных реакций, если мы всё время будем рассматривать правую часть балки.



Фиг. 161.

Взяв сечение на первом участке между точками C и B, мы видим, что на оставшуюся правую часть O_1B не действует никаких сил. Поэтому в сечении O_1 изгибающий момент и поперечная сила равны нулю. Это относится ко всем сечениям между B и C. Эпюры M и Q для этого участка совпадают с осью абсцисс. Для участка AC получаем:

$$Q = +P, \quad M = -Px_2.$$

Эпюры изображены на фиг. 161; из них видно, что

$$M_{min} = -P(l-a) \text{ и } Q_{max} = P.$$

Отметим, что для этой балки мы построили эпюры Q и M без определения опорных реакций.

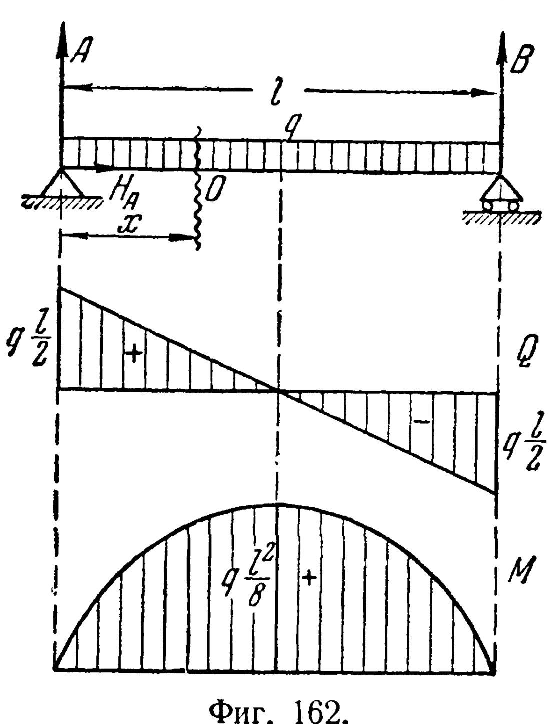
Пример 45. Построим эпюры моментов и поперечных сил для балки, изображённой на фиг. 162, нагружённой сплошной равномерно распределённой нагрузкой интенсивности q (выражаемой в *кг/м*, *т/м* и т. п.).

Здесь необходимо начать с определения опорных реакций.

Реакция H равна нулю, реакции же A и B по симметрии равны; каждая из них равна половине всей лежащей на балке нагрузки:

$$A = B = \frac{ql}{2}.$$

Возьмём сечение O на расстоянии x от левого конца балки. Оставим для вычисления Q и M левую часть. На неё действуют реакция A и равномерно распределённая по длине x нагрузка q.



Фиг. 162.

Для определения поперечной силы в сечении O нужно взять сумму сил, приложенных к левой отсечённой части балки. Слева от сечения лежит сила $A = \frac{ql}{2}$, направленная вверх, и равнодействующая равномерно распределённой нагрузки, расположенной на длине x, равная qx и направленная вниз. Следовательно,

$$Q = A - qx = \frac{ql}{2} - qx.$$

Поперечная сила меняется с изменением x по закону прямой линии, для построения которой дадим переменной x два значения:

$$\text{при } x = 0 \quad Q = \frac{ql}{2} \quad \text{и при } x = l \quad Q = -\frac{ql}{2}.$$

Эпюра поперечных сил дана на фиг. 162; $\max Q = \frac{ql}{2}$.

Для построения эпюры M составим сумму моментов тех же сил, приложенных к рассматриваемой части балки, относительно точки O. Имея в виду, что равнодействующая qx приложена посредине отрезка длиной x и плечо относительно точки O равно $\frac{x}{2}$, получим:

$$M = +Ax - qx\frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}(l - x).$$

Это уравнение моментов пригодно для вычисления изгибающего момента в любом сечении балки.

В данном случае величина изгибающего момента зависит от квадрата абсциссы x, следовательно, очертание эпюры представляет собой кривую — квадратную параболу. Для построения этой кривой наметим по крайней мере три-четыре точки её. Имеем:

при $x=0 \quad M=0$;

» $x=\frac{l}{4} \quad M=\frac{ql}{2\cdot 4}\left(l-\frac{l}{4}\right)=\frac{3ql^2}{32}$;

» $x=\frac{l}{2} \quad M=+\frac{ql}{4}\left(l-\frac{l}{2}\right)=+\frac{ql^2}{8}$;

» $x=l \quad M=0$.

Эпюра моментов получает вид, показанный на фиг. 162.

Для нахождения $M_{\max}$ найдём абсциссу x_0 соответствующего сечения, приравнивая нулю производную от M по x:

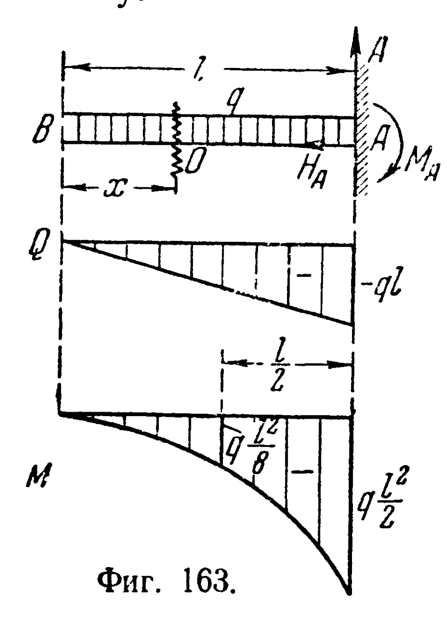
$$\frac{dM}{dx}=\frac{ql}{2}-\frac{2qx_0}{2}=0,$$

откуда

$$x_0=\frac{l}{2} \text{ и } M_{\max}=+\frac{qx_0}{2}(l-x_0)=+\frac{ql^2}{8}. \qquad (12.11)$$

Наибольший изгибающий момент имеет место посредине пролёта, т. е. в том сечении, где $Q=0$, что является следствием установленной выше (§ 71) зависимости между $M(x)$ и $Q(x)$.

Пример 46. Построить эпюры для балки, нагружённой равномерно распределённой нагрузкой q и защемлённой одним концом в стену.



Фиг. 163.

Таблица 18. **Данные к примеру 46.**

x	$Q(x)$	$M(x)$
$x=0$;	$Q=0$;	$M=0$;
$x=\frac{l}{2}$	$Q=-\frac{ql}{2}$	$M=-\frac{ql^2}{8}$
$x=l$	$Q=-ql$	$M=-\frac{ql^2}{2}$

Здесь можно построить эпюры Q и M без определения опорных реакций. Рассматривая левую отсечённую часть (фиг. 163), получим:

$$Q=-qx, \quad M=-\frac{qx^2}{2}.$$

Результаты вычислений сведены в таблицу 18.

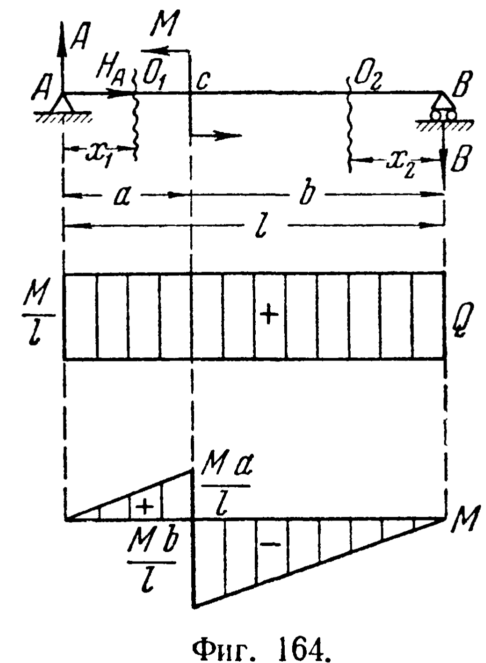
Эпюры даны на фиг. 163; из неё видно, что

$$M_{\min} = -\frac{ql^2}{2}; \quad Q_{\min} = -ql.$$

В этом случае наибольшее по абсолютной величине значение изгибающего момента соответствует не аналитическому максимуму $\left(\frac{dM}{dx} = 0\right)$, а имеет место в заделке, как это видно из эпюры моментов.

Это, однако, не противоречит дифференциальной зависимости (12.4), так как поперечная сила $Q = \frac{dM}{dx}$ равна нулю именно в том сечении, где кривая моментов имеет аналитический максимум (вершина параболы с уравнением $M(x) = -\frac{qx^2}{2}\Big)$.

Пример 47. Рассмотреть балку, нагружённую парой сил с моментом M (фиг. 164).



Фиг. 164.

Реакция H равна нулю. Реакции A и B образуют пару с плечом l, уравновешивающую момент M; они равны по величине и направлены в разные стороны:

$$A = B = \frac{M}{l}.$$

В этом нетрудно убедиться из уравнений статики, взяв, например, сумму моментов относительно точки B:

$$\sum M_B = 0; \quad A \cdot l - M = 0.$$

Выражения для $Q(x)$ и $M(x)$ составим отдельно для каждого участка. Для первого участка между сечениями A и C

$$Q_1 = A = \frac{M}{l}; \quad M_1 = +Ax_1 = +\frac{M}{l}x_1;$$

$$\text{при } x_1 = 0 \ M_1 = 0; \text{ при } x_1 = a \ M_1 = \frac{M}{l}a.$$

Для второго участка между сечениями C и B

$$Q_2 = B = \frac{M}{l}; \quad M_2 = -Bx_2 = -\frac{M}{l}x_2;$$

$$\text{при } x_2 = 0 \ M_2 = 0; \quad \text{при } x_2 = b \ M_2 = -\frac{M}{l}b.$$

Эпюры Q и M показаны на фиг. 164; из них получаем:

$$M_{\min} = -\frac{Mb}{l} \ (\text{при } b > a); \ Q_{\max} = +\frac{M}{l}.$$

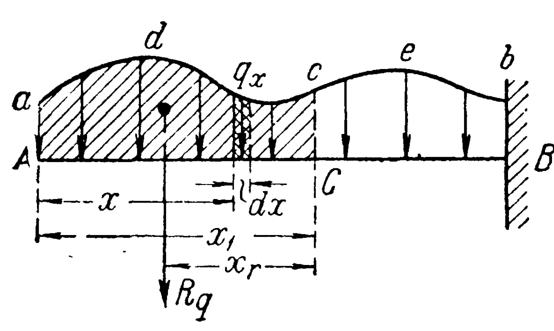
Обратим внимание на то, что в сечении, где приложена пара сил, на эпюре изгибающих моментов получается скачок на величину момента этой пары:

$$M = \frac{Ma}{l} + \frac{Mb}{l}.$$

§ 73. Построение эпюр Q и M для более сложных случаев нагрузки.

Изучив общий метод построения эпюр и их свойства, перейдём к решению более сложных задач.

Рассмотрим, как вычислить Q и M, когда на балку действует сплошная *неравномерно* распределённая нагрузка, интенсивность которой меняется по длине балки в зависимости от x (фиг. 165). Иначе говоря, q есть функция от x или $q = q(x)$. Поперечная сила и изгибающий момент также будут некоторыми функциями от x:



Фиг. 165.

$$M = M(x) \text{ и } Q = Q(x).$$

Кривая *adceb*, показывающая закон изменения $q(x)$, называется грузовой линией, а площадь, ограниченная этой кривой, — грузовой площадью.

Вычислим Q и M в любом сечении балки, взятом на расстоянии x_1 от свободного конца. Рассматривая поперечную силу как сумму элементарных сил $q(x) \cdot dx$, приложенных к левой отсечённой части балки, и заменяя суммирование интегрированием, найдём:

$$Q(x_1) = -\int_0^{x_1} q(x)\,dx = -\int_0^{x_1} d\omega = -\omega(x_1). \qquad (12.12)$$

Здесь через $\omega(x_1)$ обозначена часть грузовой площади, расположенная левее взятого сечения $c - C$. Следовательно, поперечная сила $Q(x_1)$, равная равнодействующей R_q сплошной нагрузки, лежащей на участке $AC = x_1$, может быть вычислена как грузовая площадь $\omega(x_1)$, лежащая по одну сторону от сечения.

Изгибающий момент в том же сечении, равный сумме моментов элементарных сил $q(x)\,dx$, действующих на отсечённую часть балки, относительно точки C, может быть вычислен и как момент равнодействующей R_q, т. е.

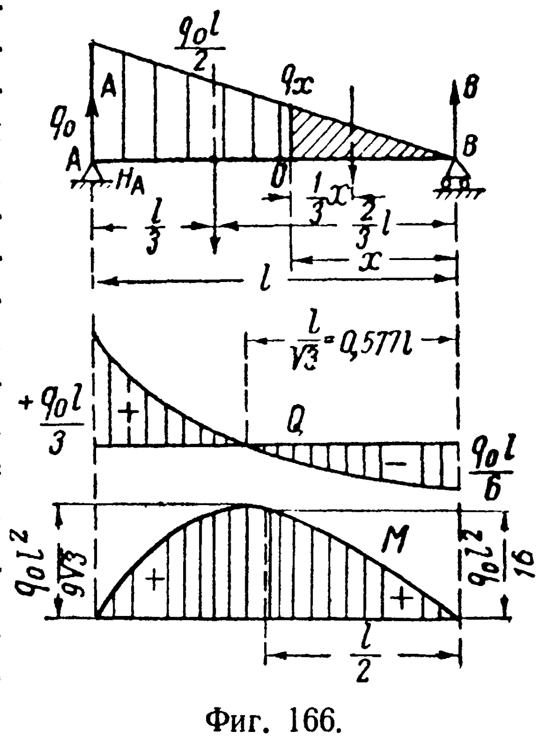
$$M(x_1) = -R_q \cdot x_r = -\omega(x_1) \cdot x_r. \qquad (12.13)$$

Иначе говоря, *изгибающий момент от неравномерно распределённой нагрузки равен произведению грузовой площади, лежащей*

по одну сторону от сечения, на расстояние от центра тяжести этой площади до рассматриваемого сечения (плечо равнодействующей).

Пример 48. Рассмотреть построение эпюр при действии сплошной нагрузки, изменяющейся по длине балки по закону треугольника (фиг. 166).

Под такой нагрузкой работают балки, поддерживающие давление воды или земли, например, стойки плотин, стойки, подкрепляющие стенки резервуаров, предназначенных для хранения жидкостей. Подобным же образом нагружаются силами инерции шатуны паровых машин и двигателей внутреннего сгорания.



Фиг. 166.

Величина этой нагрузки определяется ординатой q_0 — наибольшей интенсивностью нагрузки (в *кг/м*). Реакция $H_A = 0$; определим реакции A и B.

Для нахождения A составим уравнение моментов относительно точки B. Момент нагрузки равен моменту её равнодействующей, т. е. площади всей нагрузки $\frac{q_0 l}{2}$, умноженной на расстояние до её центра тяжести от конца B. Равнодействующая изображена на фиг. 166 пунктиром; этим подчёркивается, что сосредоточенная сила, равная грузовой площади $\omega = \frac{1}{2} q_0 l$, в действительности к балке не приложена и что мы ею пользуемся для вычисления суммы моментов всей нагрузки только при определении реакций.

Уравнения моментов будут иметь вид:

$$\sum M_B = 0; \quad Al - \omega \frac{2}{3} l = 0; \quad A = \frac{2}{3}\omega = \frac{q_0 l}{3};$$

$$\sum M_A = 0; \quad -Bl + \omega \cdot \frac{l}{3} = 0; \quad B = \frac{1}{3}\omega = \frac{q_0 l}{6}.$$

Таким образом, на опору A передаётся *две трети* всей нагрузки $\omega = \frac{q_0 l}{2}$, а на опору B — *одна треть*.

Для построения эпюр возьмём сечение на расстоянии x от правого конца балки. Ордината нагрузки в этом сечении $q(x)$ определяется из подобия треугольников:

$$\frac{q(x)}{q_0} = \frac{x}{l}; \quad q(x) = q_0 \frac{x}{l}.$$

Для вычисления Q и M будем рассматривать правую часть балки, так как на неё действуют сосредоточенная сила и треугольная нагрузка, в то время как на левую часть действуют сила и трапецоидальная нагрузка, что даст более сложные вычисления.

Поперечная сила Q будет равна сумме проекций на вертикаль реакции B и заштрихованной нагрузки $\omega(x)=\frac{1}{2}q(x)x=$ $=\frac{1}{2}q_0\frac{x^2}{l}$, т. е.

$$Q=-B+\omega(x)=-\frac{q_0 l}{6}+\frac{q_0 x^2}{2l}=-\frac{q_0 l}{6}\left(1-\frac{3x^2}{l^2}\right).$$

В данном случае эпюра поперечных сил изображается кривой второго порядка, причём

$$\text{при } x=0 \quad Q=-\frac{q_0 l}{6}=-B;$$

$$\text{»} \quad x=l \quad Q=+\frac{q_0 l}{3}=+A;$$

$$\text{»} \quad x=\frac{l}{2} \quad Q=-\frac{q_0 l}{6}\left(1-\frac{3}{4}\right)=-\frac{q_0 l}{24}.$$

Очертание эпюры Q дано на фиг. 166. Из этой фигуры видно, что наибольшее значение (по абсолютной величине) поперечная сила получает в сечении A (у опоры):

$$Q_{\max}=+A=+\frac{q_0 l}{3}.$$

Через нуль поперечная сила переходит при x_0, определяющемся из уравнения

$$Q=0=-\frac{q_0 l}{6}\left(1-\frac{3x_0^2}{l^2}\right); \quad x_0=\frac{l}{\sqrt{3}}=0{,}577\,l.$$

Это значение x_0 будет использовано нами для определения максимума M. Наконец, аналитического минимума поперечная сила достигает в точке B, где интенсивность сплошной нагрузки равна нулю. Как это следует из уравнения (12.3), касательная к эпюре поперечных сил в этом сечении параллельна оси абсцисс.

Перейдём к построению эпюры M, для чего опять рассмотрим правую отсечённую часть балки. Момент относительно точки O равнодействующей заштрихованной (фиг. 166) треугольной нагрузки равен её грузовой площади, умноженной на плечо $\frac{x}{3}$:

$$-\omega(x)\frac{1}{3}x=-\frac{x}{2}q(x)\cdot\frac{1}{3}x=-\frac{q_0 x^3}{6l}.$$

Изгибающий момент в проведённом сечении равен:

$$M=+Bx-\frac{q_0 x^3}{6l}=\frac{q_0 l}{6}x-\frac{q_0 x^3}{6l}=\frac{q_0 x l}{6}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right).$$

Это выражение для M пригодно на всём протяжении балки. Эпюра M представляет кривую третьего порядка. Для построения кубической параболы по точкам найдём несколько ординат:

при $x = 0 \quad M = 0;$

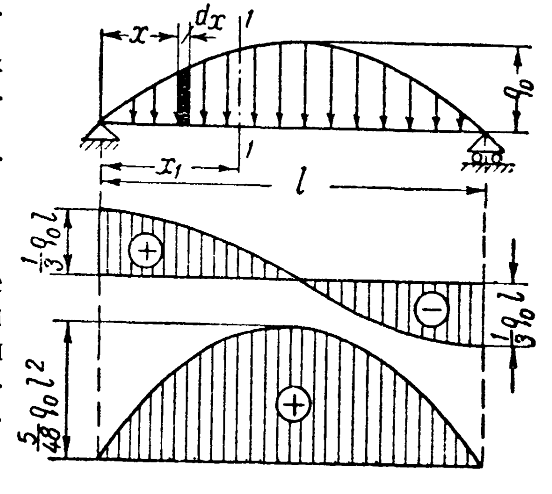
» $x = \frac{l}{2} \quad M = \frac{q_0 l^2}{12}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3q_0 l^2}{48} = \frac{q_0 l^2}{16};$

» $x = l \quad M = 0.$

Наибольшее значение изгибающий момент получит в сечении, где $Q = 0$, т. е. при $x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$; он равен

$$M_{max} = \frac{q_0 l}{6l\sqrt{3}}\left(l^2 - \frac{l^2}{3}\right) = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}} = \frac{q_0 l^2}{15{,}58}. \qquad (12.14)$$

Эпюра показана на фиг. 166. Как видно из формулы (12.14), наибольший изгибающий момент весьма мало отличается от момента посредине пролёта, равного $\frac{q_0 l^2}{16}$. При практических подсчётах для балки, загружённой треугольной нагрузкой, всегда можно вместо M_{max} вводить в вычисления момент посредине пролёта $\frac{q_0 l^2}{16}$; ошибка не превышает 2,6%.



Фиг. 167.

Пример 49. Рассмотреть построение эпюр Q и M для шарнирно-опёртой балки на двух опорах (фиг. 167), загружённой сплошной нагрузкой, интенсивность которой изменяется по параболическому закону, выражаемому уравнением:

$$q(x) = 4q_0\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Вследствие симметрии опорные реакции равны между собой:

$$A = B = \frac{\omega}{2}.$$

Здесь ω — грузовая площадь, определяемая из условия (12.12):

$$\omega = \int_0^l q(x)\,dx = \frac{4q_0}{l}\left[\int_0^l x\,dx - \frac{1}{l}\int_0^l x^2\,dx\right] =$$

$$= \frac{4q_0}{l}\left[\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{3}\right] = \frac{2}{3}q_0 l. \qquad (12.15)$$

Следовательно, реакции опор равны

$$A = B = \frac{q_0 l}{3}.$$

Теперь перейдём к составлению выражений $Q(x)$ и $M(x)$ для сечения $1-1$, взятого на расстоянии x_1 от левой опоры A. Обозначив грузовую площадь, расположенную на длине x_1, через $\omega(x)$, получим:

а) Для поперечной силы $Q(x) = A - \omega(x)$.

Грузовая площадь, лежащая слева от сечения, равна:

$$\omega(x) = \int_0^{x_1} q(x)\,dx = \frac{4q_0}{l}\left[\int_0^{x_1} x\,dx - \frac{1}{l}\int_0^{x_1} x^2\,dx\right],$$

или

$$\omega(x) = \frac{4q_0}{l}\left[\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{3l}\right] = \frac{2}{3}\,\frac{q_0 x_1^2}{l^2}(3l - 2x_1).$$

Подставляя найденные значения A и $\omega(x)$ в уравнения для $Q(x)$, найдём:

$$Q(x) = \frac{q_0 l}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{q_0 x_1^2}{l^2}(3l - 2x_1). \tag{12.16}$$

б) Для изгибающего момента, имея в виду, что элементарная сила $q(x)\,dx$ даёт относительно центра тяжести сечения $1-1$ момент, равный:

$$dM = q(x)\,dx\,(x_1 - x),$$

найдем:

$$M(x) = Ax_1 - \int_0^{x_1} q(x)(x_1 - x)\,dx =$$

$$= Ax_1 - \left[x_1\int_0^{x_1} q(x)\,dx - \int_0^{x_1} q(x)\,x\,dx\right].$$

Первый интеграл равен

$$\omega(x) = \frac{2}{3}\,\frac{q_0 x_1^2}{l^2}(3l - 2x_1).$$

Второй интеграл даёт:

$$\int_0^{x_1} q(x)\,dx = \frac{4q_0}{l}\int_0^{x_1}\left(x^2 - \frac{x^3}{l}\right)dx = \frac{4q_0}{l}\left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{x_1^4}{4l}\right) = \frac{q_0 x_1^3}{3l^2}(4l - 3x_1).$$

После подстановки получим:

$$M(x) = \frac{q_0 l}{3}x_1 - \left[\frac{2}{3}\,\frac{q_0 x_1^3}{l^2}(3l - 2x_1) - \frac{q_0 x_1^3}{3l^2}(4l - 3x_1)\right] =$$

$$= \frac{q_0 l}{3}x_1 - \left[\frac{q_0 x_1^3}{3l^2}(6l - 4x_1 - 4l + 3x_1)\right],$$

или после выполнения действий:

$$M(x) = \frac{q_0 l}{3}x_1 - \frac{q_0 x_1^3}{3l^2}(2l - x_1). \tag{12.17}$$

Из уравнений (12.16) и (12.17) видно, что поперечная сила изменяется по закону кубической параболы, а изгибающий момент — по параболе четвёртой степени.

Для построения этих кривых по точкам дадим переменной x значения:

$$x=0;\quad Q(x)=\frac{q_0 l}{3};\quad M(x)=0;$$

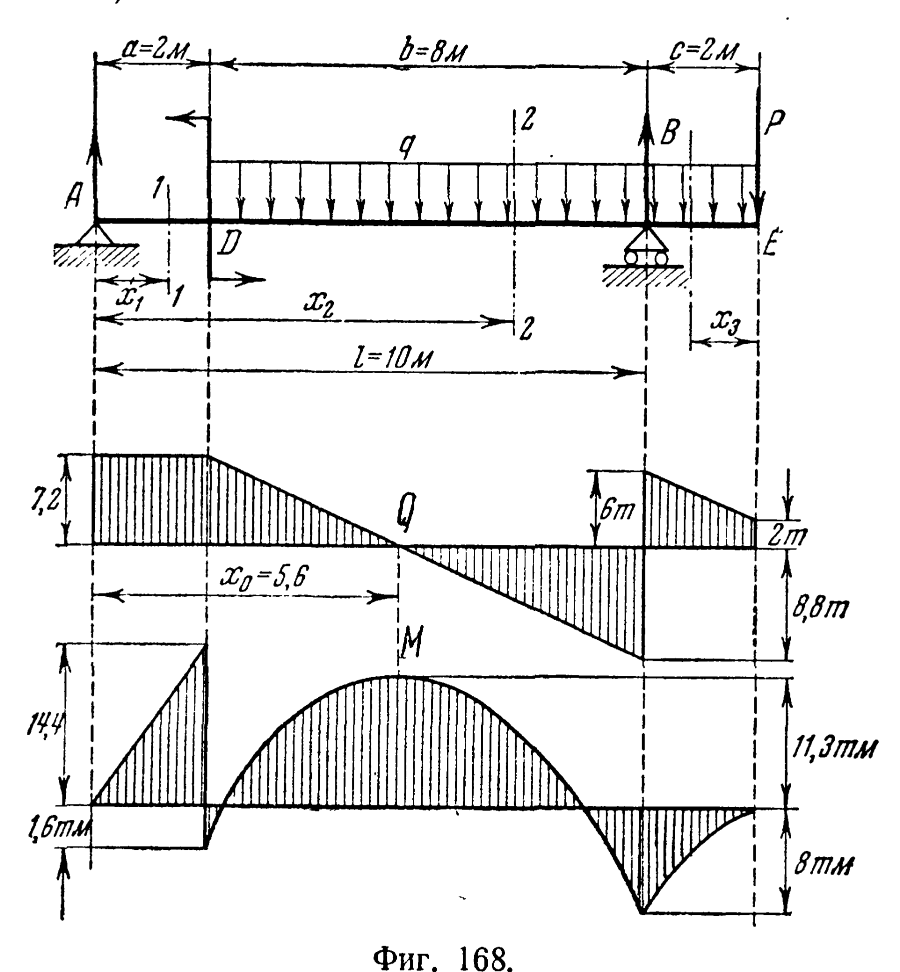
$$x=\frac{l}{2};\quad Q(x)=\frac{q_0 l}{3}-\frac{2}{3}q_0\frac{2l}{4}=0;\quad M(x)=\frac{q_0 l}{6}-\frac{q_0 l^3}{24 l^2}\cdot\frac{3}{2}l=\frac{5}{48}q_0 l^2;$$

$$x=l;\quad Q(x)=\frac{q_0 l}{3}-\frac{2}{3}q_0 l=-\frac{q_0 l}{3};\quad M(x)=\frac{q_0 l^2}{3}-\frac{q_0 l^2}{3}=0.$$

Соответствующие эпюры Q и M построены на фиг. 167. Наибольшие значения Q и M соответственно равны:

$$\max Q=\frac{q_0 l}{3}\quad \text{и}\quad \max M=\frac{5}{48}q_0 l^2.$$

Пример 50. Рассмотреть построение эпюр Q и M для балки, нагружённой сосредоточенной силой $P=2$ *т*, равномерно распределённой нагрузкой $q=2$ *т/м* и парой сил с моментом $M_0=16$ *тм*. Размеры показаны на чертеже (фиг. 168).



Фиг. 168.

Для вычисления опорных реакций составим уравнения моментов относительно точек A и B:

$$\Sigma M_A=0;\quad q(b+c)\cdot\left[\frac{b+c}{2}+a\right]-M_0+P(l+c)-Bl=0.$$

Отсюда

$$B=\frac{q}{l}\left[\frac{(b+c)^2}{2}+a(b+c)\right]-\frac{M_0}{l}+\frac{P}{l}(l+c)=$$
$$=\frac{2}{10}\left[\frac{(8+2)^2}{2}+2(8+2)\right]-\frac{16}{10}+\frac{2}{10}(10+2)=14{,}8\ т.$$

Аналогично

$$\sum M_B=0;\quad A\cdot l-qb\cdot\frac{b}{2}+qc\cdot\frac{c}{2}-M_0+Pc=0;$$
$$A=\frac{q}{2l}(b^2-c^2)+\frac{M_0}{l}-\frac{Pc}{l}=\frac{2}{2\cdot 10}(8^2-2^2)+\frac{16}{10}-\frac{2\cdot 2}{10}=7{,}2\ т.$$

Для проверки правильности полученных результатов составим уравнение проекций на ось y:

$$\sum Y=0;\quad A+B-q(b+c)-P=7{,}2+14{,}8-2(8+2)-2=0.$$

Реакции найдены верно. Теперь, когда все внешние силы известны, перейдём к построению эпюр Q и M.

Нам придётся рассмотреть три участка между силами AD, DB, BE. Расстояние до сечений $1-1$ и $2-2$ будем отсчитывать от левой опоры A, а для 3-го сечения от точки E (фиг. 168). Рассматривая левую отсечённую часть, получим выражение для поперечной силы в сечении $1-1$: $Q_1=A$ (уравнение прямой, параллельной оси x). Это уравнение справедливо, пока $0\leqslant x_1\leqslant a$.

Для сечения $2-2$, определяемого значениями $a\leqslant x_2\leqslant l$, получим:

$$Q_2=A-q(x_2-a).$$

Это — уравнение прямой, построение которой производим по двум точкам:

при $x_2=a$ $\quad Q_2=A=7{,}2\ т$,

» $x_2=l$ $\quad Q_2=A-q(l-a)=7{,}2-2\cdot(10-2)=-8{,}8\ т$.

Наконец, для 3-го участка, рассматривая правую отсечённую часть, получим:

$$Q_3=P+qx_3.$$

Эпюра изобразится прямой, пригодной для $0\leqslant x_3\leqslant c$:

при $x_3=0$ $\quad Q_3=P=2\ т$,

» $x_3=c$ $\quad Q_3=P+qc=2+2\cdot 2=6\ т$.

Полная эпюра поперечных сил, построенная по полученным трём уравнениям, изображена на фиг. 168. Из эпюры видно, что $\max Q=8{,}8\ т$ (по абсолютной величине) в сечении у опоры B, слева.

Перейдём теперь к построению эпюры изгибающих моментов, для чего воспользуемся теми же тремя сечениями. Момент сил, приложенных к левой отсечённой части, относительно центра тяжести сечения $1-1$:

$$M_1=Ax_1\ \text{(уравнение прямой)}.$$

При $x_1=0$ $M_1=0$; при $x_1=a$ $M_1=Aa=7{,}2\cdot 2=14{,}4\ тм$.

Для второго участка ($a\leqslant x_2\leqslant l$):

$$M_2=Ax_2-M_0-q(x_2-a)\frac{x_2-a}{2}=Ax_2-\frac{q(x_2-a)^2}{2}-M_0.\qquad(12.18)$$

Это уравнение параболы, для построения которой необходимо дать переменной x_2 не менее трёх значений:

при $x_2 = a$ $M_2 = Aa - M_0 = 7{,}2 \cdot 2 - 16 = -1{,}6$ *тм*;

при $x_2 = l$ $M_2 = Al - M_0 - q\frac{(l-a)^2}{2} = 7{,}2 \cdot 10 - 16 - \frac{2 \cdot (10-2)^2}{2} = -8$ *тм*.

Теперь вычислим M_2 для того значения x_2, при котором M_2 достигает наибольшей величины, т. е. для точки, где эпюра Q переходит через нуль. Исследуя уравнение моментов на максимум, найдём:

$$\frac{dM_2}{dx_2} = Q_2 = A - q(x_0 - a) = 0, \quad \text{или} \quad x_0 = \frac{A}{q} + a = \frac{7{,}2}{2} + 2 = 5{,}6 \text{ м}.$$

Подставляя это в уравнение для M_2, получим:

$$\max M_2 = Ax_0 - M_0 - q\frac{(x_0-a)^2}{2} = 7{,}2 \cdot 5{,}6 - 16{,}0 - \frac{2 \cdot (5{,}6-2)^2}{2} = 11{,}3 \text{ тм}.$$

По полученным трём значениям момента строим параболическую кривую, выражающую закон изменения моментов в пределах второго участка (для большей точности построения можно найти и нулевые точки эпюры, положив $M_2 = 0$).

Чтобы получить выражение изгибающего момента для третьего участка, рассмотрим правую отсечённую часть балки. Момент правых сил относительно центра тяжести сечения 3—3 будет:

$$M_3 = -Px_3 - \frac{qx_3^2}{2}. \tag{12.19}$$

Это уравнение (парабола) справедливо для значений $0 \leqslant x_3 \leqslant c$:

при $x_3 = 0$ $M_3 = 0$;

» $x_3 = \frac{c}{2}$ $M_3 = -\frac{Pc}{2} - \frac{qc^2}{8} = -\frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{2 \cdot 2^2}{8} = -3$ *тм*;

» $x_3 = c$ $M_3 = -Pc - \frac{qc^2}{2} = -2 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2^2}{2} = -8$ *тм*.

Значение M_3 для сечения над опорой B совпадает с ранее найденным значением M_2 для того же сечения.

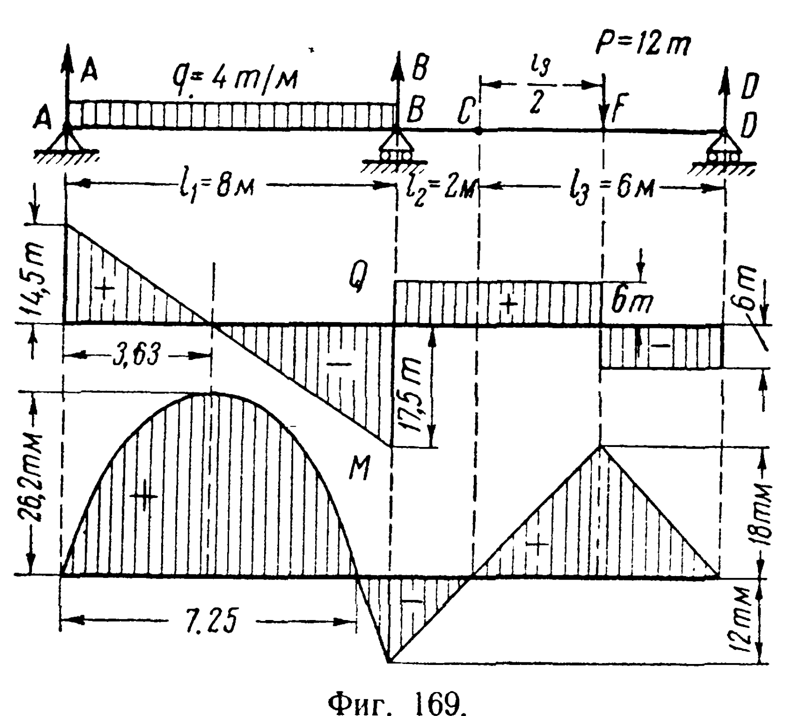
Эпюра изгибающих моментов построена на фиг. 168. Как это видно из эпюры, $\max M = 14{,}4$ *т* (больше, чем аналитический максимум, найденный для M_2). Заметим, что, как и на фиг. 164, в сечении, где приложена пара сил M_0, в эпюре M имеется скачок на величину M_0.

Пример 51. Рассмотреть построение эпюр M и Q для системы балок (фиг. 169), состоящей из основной консольной балки ABC и подвесной балки CD, соединённых шарниром C. Нагрузки и длины участков балки показаны на чертеже.

Для построения эпюр найдём реакции балок. Как видно из фиг. 169, система балок может иметь *четыре* опорные реакции A, H_A, B и D. Уравнений же равновесия для *всей* балки AD мы можем написать только три. Четвёртое уравнение определяется условием, что шарнир C (по свойству конструкции) не может передать момента, так как позволяет взаимно поворачиваться одной части балки (AC) относительно другой (CD).

Последнее условие требует, чтобы сумма моментов относительно точки C сил, приложенных слева или справа от этого шарнира, равнялась нулю.

Другими словами, для соблюдения равновесия балки *изгибающий момент в шарнире должен равняться нулю*. Это добавочное требование делает балку AD статически определимой.



Фиг. 169.

Определение реакций начинаем с вычисления H_A. Приравнивая нулю сумму проекций всех сил на ось балки, убеждаемся, что $H_A = 0$.

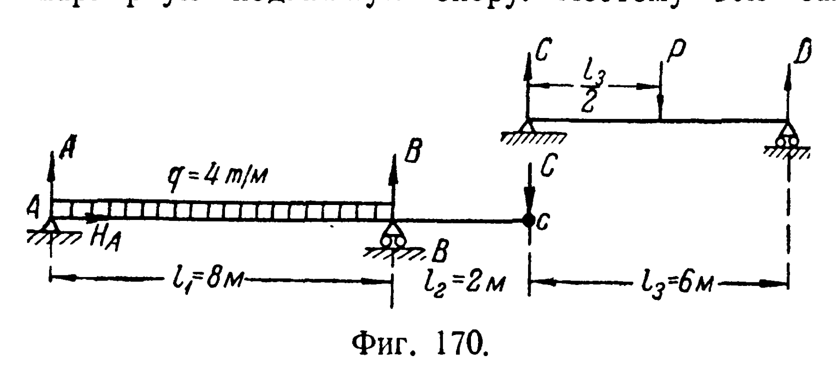
Далее мы могли бы написать три уравнения моментов, а именно:

1) приравнять нулю сумму моментов всех сил относительно точки A;

2) приравнять нулю сумму моментов всех сил относительно точки B или D;

3) приравнять нулю момент относительно точки C сил, расположенных *слева* или *справа* от этого шарнира.

Решая систему этих трёх уравнений, можно получить все три неизвестные реакции: A, B и D. Однако проще определить эти реакции путём разложения балки AD на простейшие. Подвесная балка CD опирается в точке C шарнирно на конец консоли BC, а в точке D — на шарнирную подвижную опору. Поэтому всю балку AD мы можем рассматривать (фиг. 170) как комбинацию из двух балок. Подвесная балка воспринимает в шарнире C реакцию C от конца консоли и в свою очередь давит на этот конец с такой же силой C.



Фиг. 170.

Рассматривая сначала равновесие подвесной балки, находим её реакции D и C, а прикладывая уже известную силу C к концу консоли, находим реакции A и B. В нашем примере:

$$C = D = \frac{P}{2} = 6\ т, \quad A = \frac{ql_1}{2} - C\,\frac{l_2}{l_1} = \frac{4 \cdot 8}{2} - 6\,\frac{2}{8} = 14{,}5\ т,$$

$$B = \frac{ql_1}{2} + C\,\frac{l_1 + l_2}{l_1} = \frac{4 \cdot 8}{2} + 6\,\frac{10}{8} = 23{,}5\ т.$$

После определения реакций изображаем вновь балку как одно целое со всеми силами и реакциями и определяем моменты и поперечные силы, как для обычного случая. Проверкой будет служить равенство нулю момента в шарнире C. Следует обратить внимание на то, что шарнир C не является точкой раздела участков, если в нём не приложена внешняя сила. Эпюры элементов и поперечных сил показаны на фиг. 169.

Болеее удобно после определения опорных реакций строить эпюры Q и M *отдельно* для каждой подвесной и основной балки, откладывая значения полученных величин Q и M от общей оси x.

Пример 52. Построить эпюры Q и M для балки с ломаной осью, обычно называемой рамой (фиг. 171).

Горизонтальный стержень BC называют ригелем, а вертикальный — стойкой рамы. Ригель и стойка соединены жёстким узлом C, образуя сплошную систему. Рамы с жёсткими узлами имеют широкое распространение в инженерном деле.

Порядок построения эпюр Q и M для таких систем остаётся прежним. Для определения опорных реакций составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad qh - H_A = 0,$$

или

$$H_A = qh = 2 \cdot 4 = 8 \ т,$$

$$\sum Y = 0; \quad -A + B = 0,$$

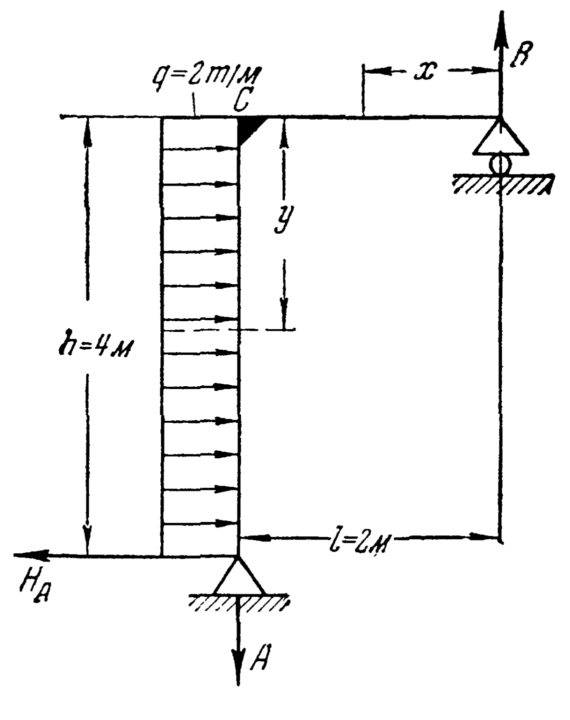
или

$$A = B,$$

$$\sum M_A = 0; \quad \frac{qh^2}{2} - Bl = 0,$$

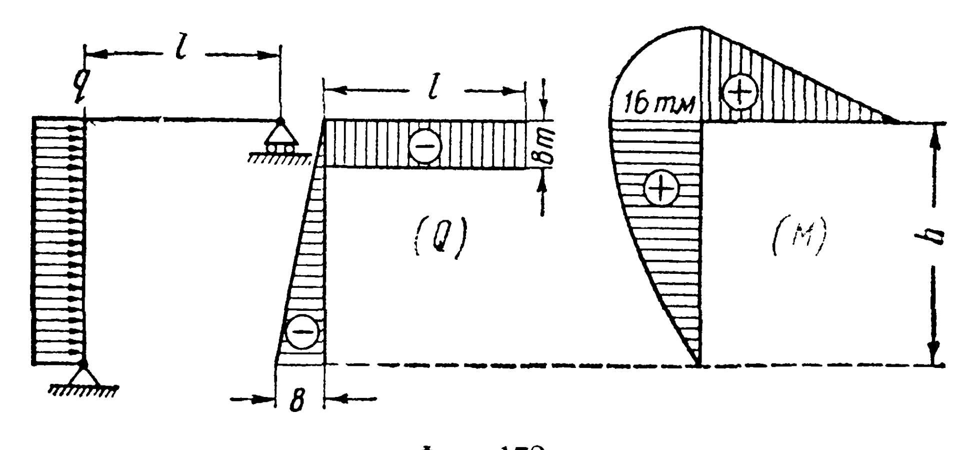
или

$$B = \frac{qh^2}{2l} = \frac{2 \cdot 4^2}{2 \cdot 2} = 8 \ т.$$



Фиг. 171.

Для ригеля, $0 \leqslant x \leqslant l$, поперечная сила $Q(x) = -B = -8$ т; изгибающий момент $M(x) = Bx = \frac{qh^2}{2l} \cdot x$.



Фиг. 172.

Для стойки — поперечная сила $Q(y) = q \cdot y$; изгибающий момент $M(y) = Bl - \frac{qy^2}{2}$.

Значения ординат эпюр Q и M приведены в таблице 19.

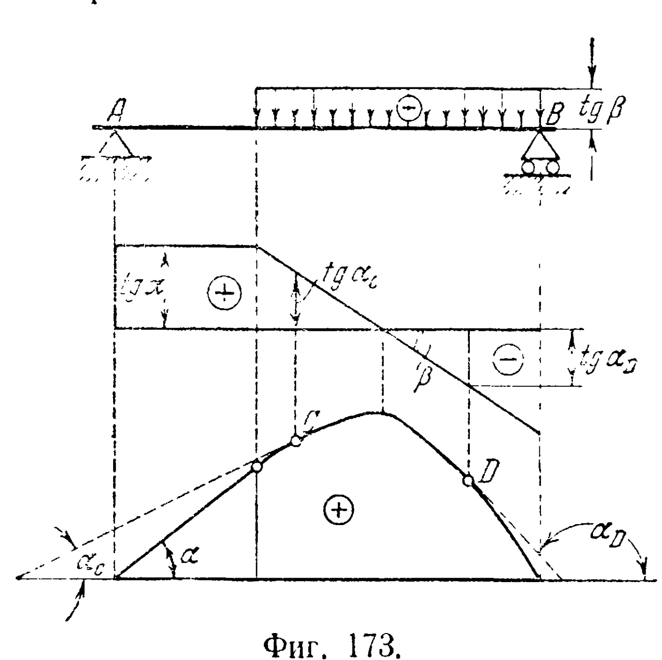
Соответствующие эпюры Q и M построены на фиг. 172.

Таблица 19. **Данные к фиг. 172.**

x в $м$	y в $м$	Q в $т$	M в $тм$
$x=0$	—	$Q(x)=-B=-8$	$M(x)=0$
$x=l=2$	—	$Q(x)=-B=-8$	$M(x)=Bl=16$
—	$y=0$	$Q(y)=0$	$M(y)=Bl=16$
—	$y=\frac{h}{2}=2$	$Q(y)=\frac{qh}{2}=4$	$M(y)=Bl-\frac{qh^2}{8}=12$
—	$y=h=4$	$Q(y)=qh=8$	$M(y)=Bl-\frac{qh^2}{2}=0$

§ 74. Контроль правильности построения эпюр Q и M.

Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью сплошной нагрузки определяют связь между эпюрами M и Q, построенными при любой нагрузке. Эта взаимная связь имеет важное практическое значение для контроля правильности выполненного построения. Приведём некоторые заключительные замечания, могущие быть полезными и при построении эпюр Q и M.



Фиг. 173.

1. Уже было указано (§ 71), что каждая ордината эпюры поперечных сил $Q=\frac{dM}{dx}$ геометрически представляет собой тангенс образуемого с осью x угла наклона касательной к эпюре M в соответствующей точке (фиг. 173). Подобные же геометрические соотношения имеются и между эпюрами q и Q (фиг. 173).

2. Если на некотором участке:

а) $Q>0$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha>0$, то момент возрастает;

б) $Q<0$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha<0$, то момент убывает;

в) Q переходит через нуль, меняя знак с $+$ на $-$, то $M=M_{max}$; при изменении знака с $-$ на $+$ $M=M_{min}$;

г) $Q=0$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha=0$, то $M=\text{const}$.

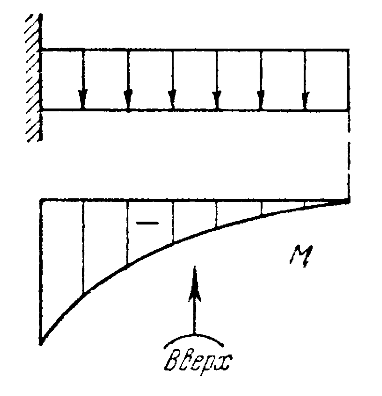
3. Если $q=0$, т. е. $\frac{dQ}{dx}=0$, то $Q=\text{const}$. Следовательно, на участках, свободных от сплошной нагрузки, эпюра Q ограничена прямыми, параллельными оси x; эпюра же моментов изобразится

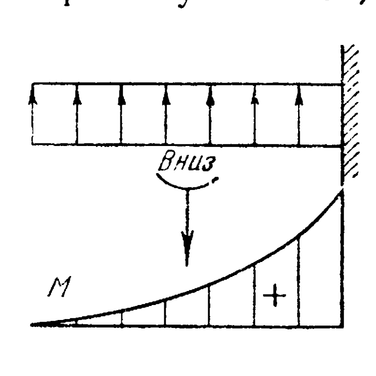
наклонными прямыми, если только $Q \neq 0$ (см. п. 2, г). Если $q < 0$, т. е. $\operatorname{tg}\beta < 0$, то поперечная сила убывает.

4. На участках балки, загружённых сплошной равномерно распределённой нагрузкой, эпюра M ограничена параболической кривой, а эпюра Q — наклонной прямой. При неравномерно распределённой нагрузке обе эпюры Q и M будут ограничены кривыми, характер которых зависит от типа нагрузки.

5. В сечениях под сосредоточенными силами в эпюре Q имеется скачок (на величину силы), а в эпюре M резкое изменение угла наклона (излом) смежных участков эпюры (см., например, сечение B на фиг. 168).

6. Если сплошная нагрузка направлена вниз, т. е. $\frac{d^2M}{dx^2} = q < 0$, иначе, если вторая производная, характеризующая кривизну линии M, отрицательна, то эпюра M очерчена кривой, имеющей выпуклость кверху. Наоборот, если $q > 0$ (нагрузка направлена вверх), то эпюра M на соответствующем участке имеет выпуклость книзу (фиг. 174).





Фиг. 174.

7. На концевой шарнирной опоре поперечная сила равна реакции этой опоры, а изгибающий момент равен нулю, если в опорном сечении не приложена пара сил.

8. На свободном конце балки (консоль) изгибающий момент равен нулю, если там нет сосредоточенной пары сил. При отсутствии в концевом сечении консоли сосредоточенной силы поперечная сила Q также равна нулю.

9. В защемлённом конце (заделка) Q и M соответственно равны опорной реакции и опорному моменту.

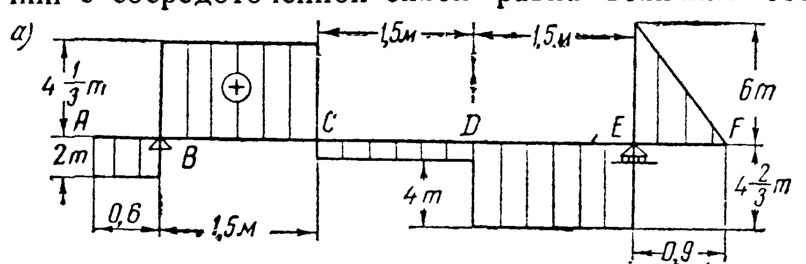
10. В сечениях, где приложена пара сил, эпюра M имеет скачок на величину момента этой пары. На эпюре Q это не отражается.

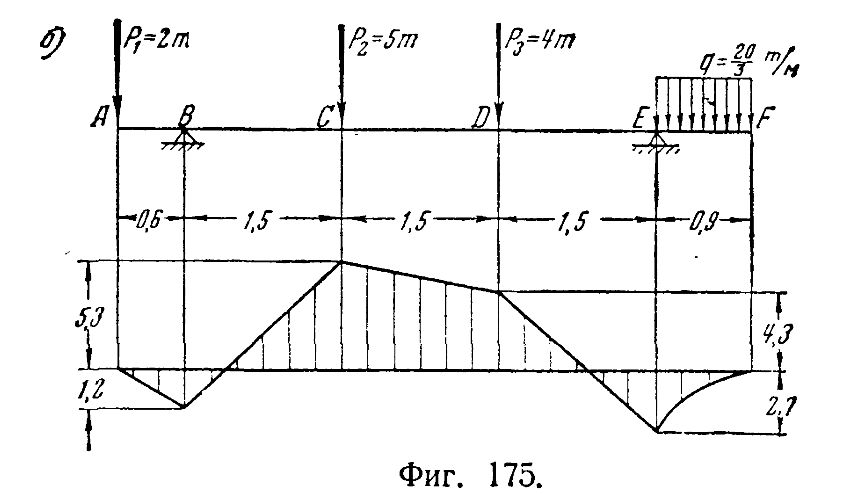
Указанные в § 71 дифференциальные зависимости и приведённые здесь замечания служат не только для проверки правильности эпюр, но будут использованы нами в дальнейшем (§§ 116, 117 и др.).

П р и м е р 53. Фигура 175, *а* представляет собой эпюру поперечных сил для балки AF, шарнирно опёртой в сечениях B и E. Определить нагрузку, лежащую на балке, и построить эпюру моментов.

Вид эпюры показывает, что в точках A, C и D приложены сосредоточенные силы, в точках B и E — реакции, а на участке EF — равномерно распределённая нагрузка.

Разность алгебраических величин ординат эпюры поперечных сил в сечении с сосредоточенной силой равна величине этой силы. В точке A приложена сосредоточенная сила 2 $т$, направленная, как показывает знак поперечной силы, вниз; в точке B приложена реакция $6^1/_3$ $т$, направленная вверх; в точках C и D приложены направленные вниз сосредоточенные силы 5 T и 4 $т$; в точке E направлена вверх реакция $10^2/_3$ $т$, наконец, равномерно распределённая на участке EF нагрузка q равна $\frac{6}{0,9} = 6,67$ $т/м$.





Фиг. 175.

Построение эпюры изгибающих моментов затруднений не встречает. На протяжении AE она будет изображаться многоугольником со следующими ординатами:

Сечения по длине балки	A	B	C	D	E
Ординаты эпюры M	0,0	— 1,2	5,3	4,3	— 2,7

На участке EF эпюра M должна изобразиться параболической кривой с аналитическим максимумом в точке F, где $Q=0$, при абсолютном значении момента в этой точке $M_F=0$ (свободный конец балки).

Соответствующая эпюра изгибающих моментов приведена на фиг. 175, *б*.

§ 75. Способ сложения действия сил при построении эпюр.

Рассматривая выражения для M и Q, полученные нами в последних задачах, мы видим, что внешние нагрузки входят в эти выражения в первой степени; M и Q линейно зависят от нагрузок.

Рассматривая, например, уравнение (12.19) (стр. 247) для M_3:

$$M_3 = -Px - q\frac{x^2}{2},$$

мы видим, что ординаты изгибающего момента в сечениях этого участка складываются из двух: $-Px$ и $-q\frac{x^2}{2}$; первая из них представляет собой изгибающий момент, вызванный в выбранном сечении силой P, а вторая — нагрузкой q.

Мы могли бы построить отдельно эпюры моментов от силы P и от нагрузки q, а потом ординаты этих эпюр алгебраически сложить. Это было бы применением так называемого *способа сложения действия сил.*

Пример 54. Эпюра M_q для консоли от распределённой нагрузки имеет вид параболы с наибольшим (по абсолютной величине) значением момента в защемлении $\min M_q = -\frac{ql^2}{2}$ (см. § 72).

От сосредоточенной силы, приложенной на свободном конце балки, изгибающий момент $M_p = -Px$ изменяется по закону прямой:

$$\text{при } x = 0 \quad M_p = 0,$$
$$\text{»} \quad x = l \quad M_p = -Pl.$$

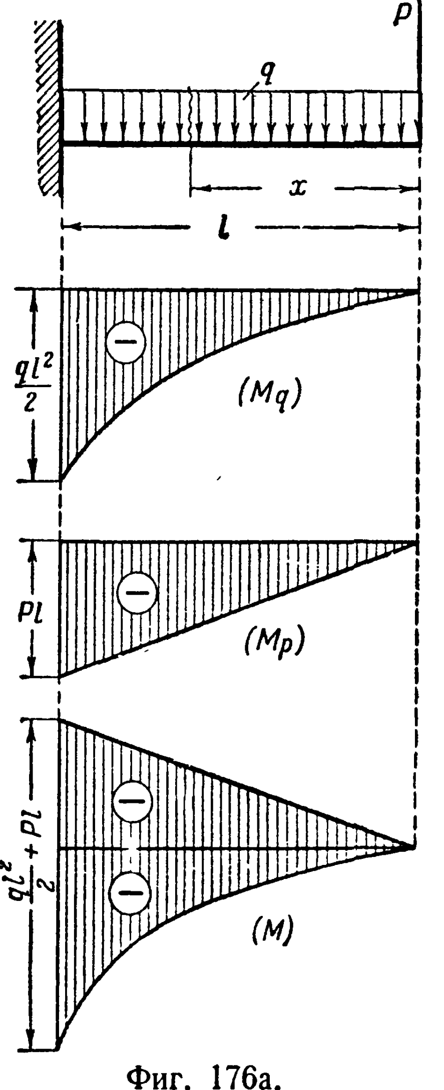
Чтобы сложить ординаты двух графиков одинакового знака, следует *приложить* их один к другому, как это показано на фиг. 176а, для чего один из графиков (M_p) отложен вверх. Изгибающий момент в любом сечении складывается из моментов

$$M_q = -\frac{qx^2}{2}$$

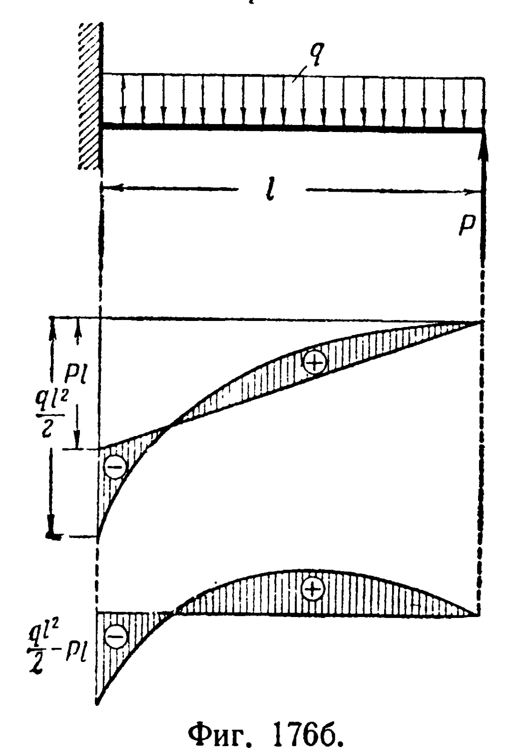
и

$$M_p = -Px.$$

Если сила P направлена вверх, то изменяется знак M_p. Для сложения двух графиков, имеющих *разные* знаки, достаточно *наложить* один график на другой (фиг. 176б).



Фиг. 176а.



Фиг. 176б.

Пусть по абсолютному значению $\min M_q > \max M_p$, т. е.

$$\left|\frac{ql^2}{2}\right| > Pl.$$

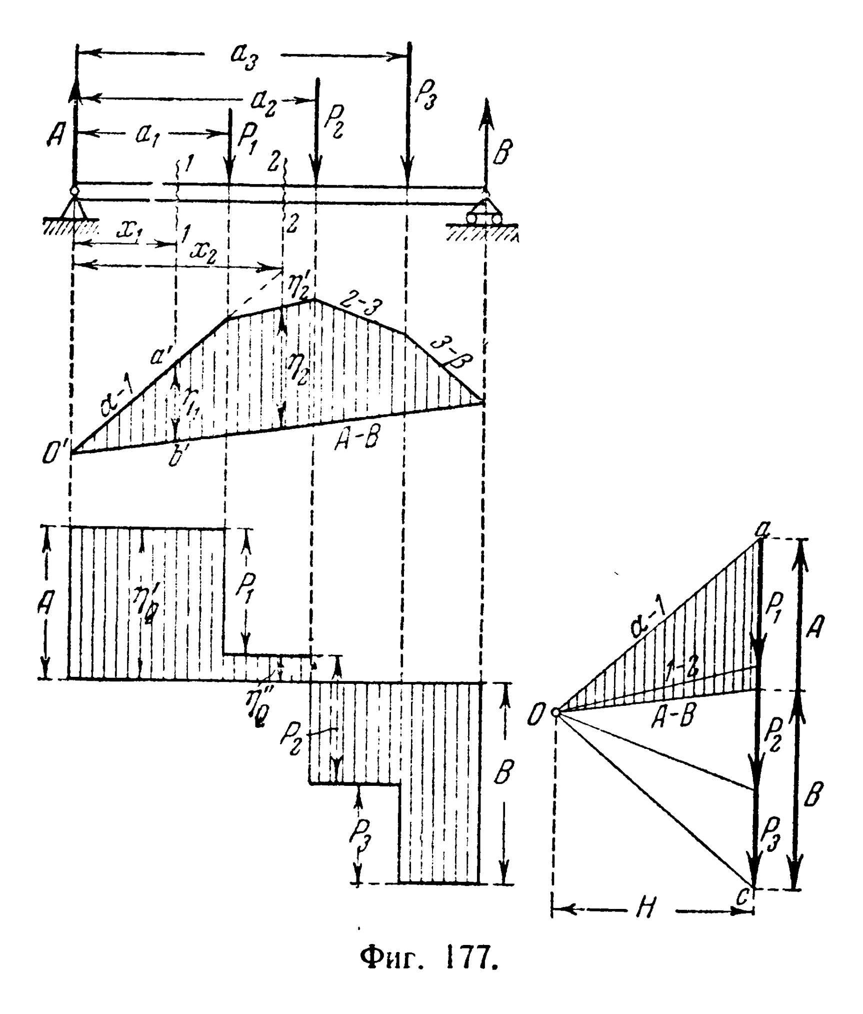
При наложении графиков ординаты автоматически вычтутся, и в данном случае мы получим в защемлении отрицательную ординату, в пролёте же на некотором протяжении ординаты будут положительными.

Разумеется, для графического суммирования необходимо оба графика строить в одном и том же масштабе. Аналогично можно построить эпюру Q. Этот приём сложения эпюр удобен при расчёте статически неопределимых неразрезных балок.

Для приведения эпюры к обычному виду можно полученные суммарные ординаты отложить от горизонтальной оси x (фиг. 176б).

§ 76. Графический метод построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Если на балку действует много нагрузок, как сосредоточенных, так и распределённых, то часто с успехом можно применить графический способ построения эпюр. При известной аккуратности в построении чертежа решение оказывается достаточно точным для целей практики.



Фиг. 177.

Рассмотрим балку AB, нагружённую вертикальными силами P_1, P_2, P_3 (фиг. 177). Аналитические выражения для изгибающего момента и поперечной силы будут для сечения $1 - 1$ такими:

$$Q = A, \quad M_1 = Ax_1.$$

Для сечения $2 - 2$ получаем:

$$Q_2 = A - P_1,$$
$$M_2 = Ax_2 - P_1(x_2 - a).$$

Для графического определения M и Q в этих же сечениях построим силовой и верёвочный многоугольники при произвольно выбранном полюсном расстоянии H. Полюсное расстояние в плане сил откладывается в том же масштабе, что и силы P_1, P_2, P_3 (например, в 1 *см f кг*). Верёвочный же многоугольник, непосредственно связанный с чертежом балки, имеет тот же масштаб ординат, в каком изображена балка (например, в 1 *см n пог. м*).

Так как силы, действующие на балку (включая и реакции), находятся в равновесии, то оба многоугольника (силовой и верёвоч-

ный) должны быть замкнуты. Поэтому, вычертив в поле сил линии, параллельные лучам силового многоугольника, проводим, как этого требуют известные правила механики, между крайними линиями $\alpha - 1$ и $3 - \beta$ замыкающую верёвочного многоугольника $A - B$.

Проводя затем в многоугольнике сил луч AB, параллельный замыкающей, получим отрезки ab и bc, представляющие в масштабе сил опорные реакции A и B.

Если провести вертикаль через сечение балки *1—1* до пересечения со сторонами верёвочного многоугольника, то получим ординату η_1, образующую со сторонами $\alpha - 1$ и AB треугольник, подобный треугольнику Oab в силовом многоугольнике. Из подобия треугольников можно написать:

$$\frac{\eta_1}{A} = \frac{x_1}{H} \quad \text{или} \quad Ax_1 = H \cdot \eta_1;$$

но произведение $Ax_1 = M_1$. Следовательно,

$$M_1 = H\eta_1.$$

Нетрудно также доказать (из рассмотрения треугольников, образуемых продолжением вертикали *2—2* со сторонами верёвочного многоугольника и подобных им в многоугольнике сил), что

$$Ax_2 - P_1(x_2 - a_1) = H \cdot \eta_2 \quad \text{или} \quad M_2 = H \cdot \eta_2$$

и вообще

$$M(x) = H \cdot \eta. \tag{12.20}$$

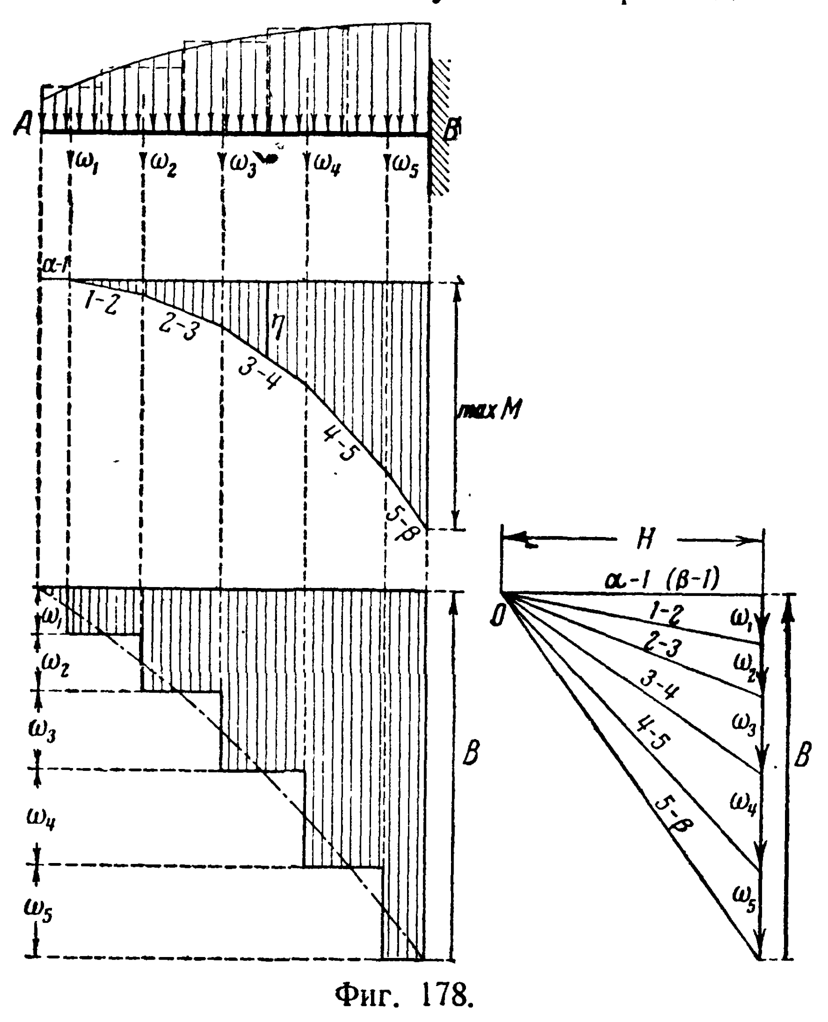
Иначе говоря, *изгибающий момент в любом сечении балки равен произведению полюсного расстояния H, взятого в масштабе сил, на ординату η верёвочного многоугольника в том же сечении, измеренную в масштабе длин.* Значит, верёвочный многоугольник представляет собой эпюру M, ординаты которой η отсчитываются по вертикали от наклонной замыкающей и равны $\eta = \frac{M}{H}$.

Чтобы придать эпюре M обычный вид, можно её перестроить, откладывая те же ординаты η от горизонтальной нулевой оси. Если опорные реакции A и B подсчитаны аналитически, то, поместив полюс на горизонтали, отделяющей A от B в многоугольнике сил, сразу получим замыкающую горизонтальной (параллельной горизонтальному лучу $A - B$).

Построение эпюры Q ясно из чертежа. Проведя прямую, параллельную нулевой оси, на расстоянии (в масштабе сил), равном крайней левой силе (реакции A), сносим затем (сохраняя масштаб) все остальные силы по линии и по направлению их действия, как это показано на фиг. 177. Получим ступенчатую эпюру поперечных сил,

каждая ордината которой $\eta_Q = Q(x)$ имеет тот же масштаб, что и многоугольник сил.

В случае, если балка загружена сплошной нагрузкой (фиг. 178), графическое построение эпюр M и Q может быть выполнено лишь приближённо. Разделяя сплошную нагрузку вертикалями на несколько частей и заменяя каждую часть равнодействующей (равной соответствующей грузовой площади ω), строим эпюры M и Q с помощью силового и верёвочного многоугольников для системы сосредоточенных сил ω_1, ω_2, ω_3 и т. д., как это было сделано выше. Эпюра Q получится ступенчатой, а эпюра M — в виде ломаного многоугольника.



Фиг. 178.

Чтобы привести полученные графики к виду, отвечающему истинному очертанию эпюр M и Q, следует:

а) для эпюры M вписать в верёвочный многоугольник кривую, так как в пределе, при бесконечном увеличении числа равнодействующих сил ω, верёвочный многоугольник обращается в верёвочную кривую и касается многоугольных участков в точках деления;

б) для эпюры Q заменить ступенчатую эпюру одной линией, проходящей через точки, в которых горизонтальные участки эпюры Q пересекаются с вертикалями, разбивающими нагрузку на части.

Особенностью графического построения эпюры изгибающего момента для консоли является то, что замыкающая AB заменяется продолжением первого луча $\alpha - 1$, от которого и ведутся отсчёты ординат η (фиг. 178). Выбрав в этом случае положение полюса O так, чтобы первый луч был горизонтален, сразу получаем эпюру M, приведённую к горизонтальной оси.

Пример 55. Построить графическим способом эпюры M и Q для балки, изображённой на фиг. 179. Найденные графическим путём значения $\max M$ и $\max Q$ проверить аналитическим подсчётом.

Для графического построения эпюр M и Q вычертим балку в масштабе. По удобству размещения чертежа примем масштабы:

длин — в 1 *см* → 1 *м*;

сил — в 1 *см* → 2 *т*.

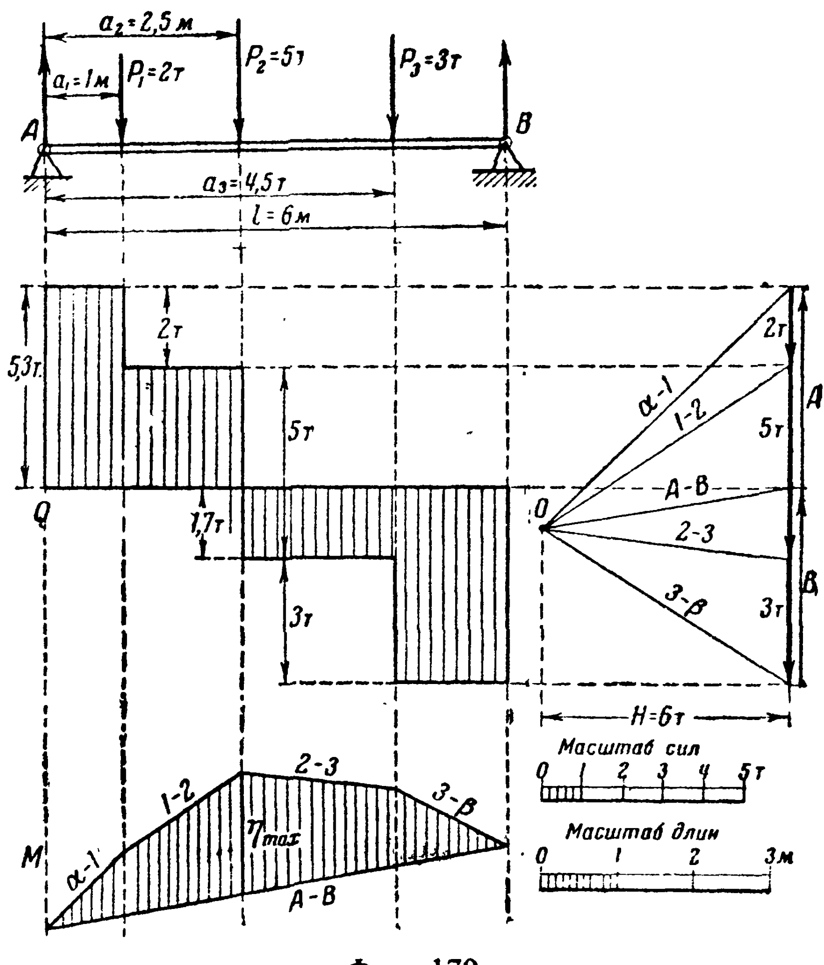
Полюсное расстояние принято равным 3 *см*. Следовательно, в масштабе сил $H = 6$ *т*. В принятых масштабах вычерчена балка, силовой и верёвочный многоугольники и эпюра поперечных сил (фиг. 179).

Наибольшая ордината верёвочного многоугольника η_{max} расположена в сечении под силой P_2. Измерив её в масштабе длин, находим: $\eta_{max} = 1{,}75$ *м*. Отсюда наибольший изгибающий момент:

$$\max M = H \cdot \eta_{max} = 6 \cdot 1{,}75 = 10{,}5 \ \textit{тм}.$$

Наибольшая поперечная сила равна реакции левой опоры A, которая, будучи измерена в масштабе сил, оказалась равной $A = 5{,}3$ *т*.

Чтобы оценить точность графического построения эпюр M и Q, проверим аналитически величины $\max M$ и $\max Q$. Составив уравнение моментов относительно точки B, найдём:



Фиг. 179.

$$\Sigma M_B = 0; \quad Al - P_1(l - a_1) - P_2(l - a_2) - P_3(l - a_3) = 0.$$

Отсюда:

$$A = \frac{1}{l}[P_1(l - a_1) + P_2(l - a_2) + P_3(l - a_3)] =$$

$$= \frac{1}{6}[2 \cdot 5 + 5 \cdot 3{,}5 + 3 \cdot 1{,}5] = 5{,}34 \ \textit{т}.$$

Расхождение с графическим решением составляет $\frac{5{,}34 - 5{,}3}{5{,}34} 100 = 0{,}8\%$.

Изгибающий момент в сечении под силой P_2 равен:

$$\max M = A \cdot a_2 - P_1(a_2 - a_1) = 5{,}34 \cdot 2{,}5 - 2(2{,}5 - 1{,}0) = 10{,}75 \ \textit{тм}.$$

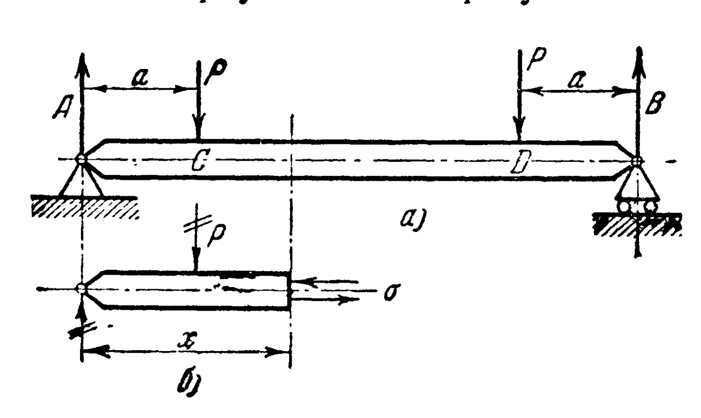
Расхождение против графического решения 2,3%. Такая точность для практических целей достаточна.

ГЛАВА XIII.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ И ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ БАЛОК.

§ 77. Экспериментальное изучение работы материала при чистом изгибе.

После изучения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил можно вернуться к вопросу о вычислении нормальных и касательных напряжений по выбранному сечению. Выше мы выяснили, что нормальные напряжения зависят лишь от изгибающего момента, касательные — лишь от поперечной силы:



Фиг. 180.

$$\sigma = f_1(M), \qquad (12.1)$$
$$\tau = f_2(Q). \qquad (12.2)$$

Это позволяет нам упростить вычисление σ, а именно, провести его для частного случая изгиба балки, когда $Q = 0$. Полученная формула будет справедлива и в остальных случаях.

Изгиб балки, при котором поперечная сила равна нулю, вполне возможен, если пренебречь собственным весом балки. Для этого необходимо, чтобы система внешних сил, приложенных к отсечённой части балки, приводилась к одной лишь паре сил.

Как пример можно привести изгиб оси железнодорожного вагона (см. § 69). Схема действия сил дана на фиг. 180. Если мы будем брать сечения между точками C и D, то для любого из этих сечений изгибающий момент и поперечная сила соответственно равны

$$M(x) = Px - P(x - a) = Pa = \text{const.}, \quad Q(x) = P - P = 0.$$

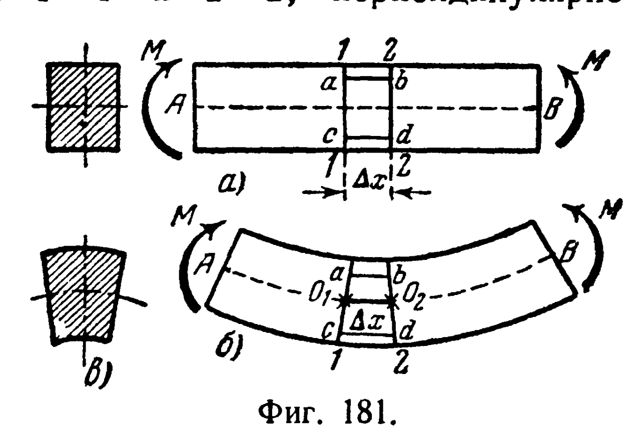
Таким образом, во всех сечениях средней части оси CD изгибающий момент постоянен, а поперечная сила равна нулю (вспомним, что $Q = \frac{dM}{dx}$). Такой случай изгиба называется *чистым изгибом.*

Разрежем эту балку (фиг. 180, *a*) сечением на расстоянии x от левого конца. На отсечённую часть (фиг. 180, *б*) будут действовать изгибающий момент $M = Pa$ и одни только нормальные напряжения σ. Условие равновесия отсечённой части требует, чтобы эти напряжения σ приводились к паре, лежащей в плоскости действия внешних сил — плоскости симметрии балки. Но чтобы найти наиболее напряжённую часть материала, необходимо уметь вычислять напряжения в *каждой точке сечения*, знать *распределение* напряжений по сечению.

Условия равновесия нам этого не дают, задача оказывается статически неопределимой, и мы вынуждены обратиться к экспериментальному исследованию деформации балки.

Рассмотрим *результаты опыта* с чистым изгибом балки парами сил, лежащими в плоскости симметрии балки (фиг. 181).

Проведём до деформации балки на её боковой поверхности близко друг к другу две линии *1—1* и *2—2*, перпендикулярно к оси балки. Это будут следы двух смежных поперечных сечений, отстоящих друг от друга на Δx. Проведём между этими сечениями линии *ab* и *cd*, параллельные оси балки: одну — близко к верхнему, другую — к нижнему краю балки. До деформации $ab = cd = \Delta x$.



Фиг. 181.

Опыт показывает, что после деформации (фиг. 181, *б*):

1) линии *1—1* и *2—2* остались прямыми, но наклонились друг к другу и образуют угол $\Delta\alpha$;

2) отрезок *ab* укоротился, а отрезок *cd* удлинился;

3) ширина балки в сжатой зоне увеличилась, а в растянутой — уменьшилась (фиг. 181, *в*).

Эти экспериментальные результаты позволяют сделать следующие выводы о характере деформаций балки при чистом изгибе. Так как линии *1—1* и *2—2* после деформации остались прямыми, то можно думать, что соответствующие *поперечные сечения* балки остались *плоскими* и лишь повернулись одно относительно другого на угол $\Delta\alpha$.

Судя по изменению длин отрезков *ab* и *cd*, можно заключить, что (при *M* положительном) верхние волокна *сжаты*, а нижние *растянуты*. Так как деформация волокон меняется *непрерывно*, то на каком-то уровне по высоте балки мы встретим слой волокон, не изменивших своей длины, так называемый *нейтральный слой*, т. е. поверхность, разделяющую сжатую зону от растянутой.

На фиг. 181, *б* нейтральный слой изображён пунктиром; отрезок O_1O_2 сохранил прежнюю длину Δx.

Наша балка *симметрична* относительно плоскости внешних сил. Поэтому обе её половины деформируются *симметрично* относительно этой плоскости. Это позволяет сделать предположение, что *деформация волокон любого слоя*, параллельного нейтральному, *не зависит от их положения по ширине балки.*

Нейтральный слой перпендикулярен к плоскости симметрии балки и пересекает плоскость каждого поперечного сечения балки по прямой, называемой *нейтральной осью* сечения. Эта ось также *перпендикулярна* к плоскости симметрии балки.

Повороты сечений происходят вокруг их нейтральных осей, изображённых на фиг. 181 точками O_1 и O_2. Если бы поворот сечений происходил не около осей, лежащих в нейтральном слое, то отрезок O_1O_2 не мог бы сохранить своей первоначальной длины.

Так как сечения поворачиваются вокруг нейтральных осей, перпендикулярных к плоскости действия сил, точки этой плоскости останутся в ней и после деформации; следовательно, ось балки останется в плоскости действия сил, обратившись в плоскую кривую. Изгиб, при котором ось балки после деформации остаётся в плоскости действия внешних сил, называется *плоским изгибом.*

Наконец, деформации материала балки в направлении её ширины показывают, что волокна её испытывают обычное растяжение или сжатие, при котором имеет место явление, учитываемое коэффициентом Пуассона: в сжатой зоне ширина сечения балки увеличивается, в растянутой — уменьшается (фиг. 181, *в*).

Экспериментальные исследования изгиба балок дают основание для *ряда допущений,* положенных в основу дальнейших выводов:

1. При чистом изгибе поперечные сечения, бывшие плоскими до деформации, остаются плоскими и во время деформации (так называемая гипотеза плоских сечений).

2. Продольные волокна друг на друга не давят и, следовательно, под действием нормальных напряжений испытывают простое линейное растяжение или сжатие.

3. Деформации волокон не зависят от их положения по ширине сечения. Следовательно, и нормальные напряжения, изменяясь по высоте сечения, остаются по ширине одинаковыми.

Помимо этих допущений, введём ещё три *ограничения*:

1. Балка имеет хотя бы одну плоскость симметрии, и все внешние силы лежат в этой плоскости.

2. Материал балки подчиняется закону Гука, причём модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков.

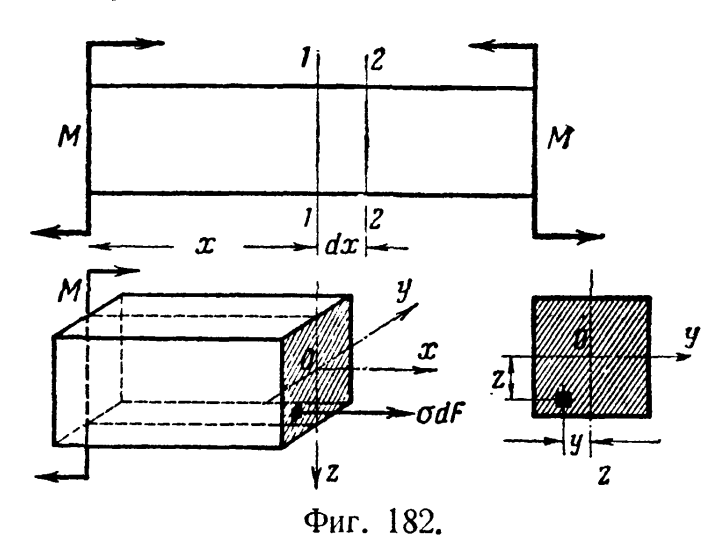
3. Соотношения между размерами балки таковы, что она работает в условиях плоского изгиба без коробления или скручивания.

Из опыта известно, что балки с малой шириной сечения легко теряют устойчивость плоской формы при изгибе (скручиваются). При отношении высоты прямоугольного сечения балки к её пролёту $\frac{h}{l} > \frac{1}{5}$ она работает не как балка, а как пластинка, и условия её расчёта изменяются.

Сделанные выше предположения в обычных случаях изгиба верны только приблизительно. Однако вытекающие из них погрешности теории так невелики (за исключением особых случаев), что ими можно пренебречь.

§ 78. Вычисление нормальных напряжений при изгибе. Закон Гука и потенциальная энергия при изгибе.

А. Возьмём балку, подвергающуюся чистому изгибу парами M (фиг. 182). Пользуясь методом сечения, разрежем балку сечением $I—I$ на 2 части и рассмотрим условия равновесия одной из отсечённых частей, например левой, показанной на фиг. 182 внизу. Для простоты чертежа балка взята прямоугольного сечения. Так как практически искривления балки ничтожны по сравнению с её размерами, то отсечённая часть изображена недеформированной.



Фиг. 182.

Линия пересечения плоскости симметрии балки с плоскостью сечения принята за ось z (положительное направление взято вниз); нейтральная ось сечения принята за ось y, причём положение её по высоте балки пока неизвестно. Ось x взята вдоль нейтрального слоя перпендикулярно к осям y и z.

В каждой точке поперечного сечения действуют нормальные напряжения σ. Выделив вокруг любой точки с координатами y и z элементарную площадку dF, обозначим действующую на неё силу $dN = \sigma\, dF$.

Отсечённая часть балки находится в равновесии под действием внешних сил, образующих пару M, и нормальных усилий dN, заменяющих отброшенную часть балки. Для равновесия эта система сил должна удовлетворять шести уравнениям статики. Напишем сначала уравнения проекций на 3 координатные оси x, y, z.

Так как проекция пары M на любую ось равна нулю, то эти уравнения дадут равенство нулю суммы проекций нормальных усилий dN на оси. Заменяя суммирование этих усилий по всей площади сечения интегрированием, получим:

$$\sum X = 0; \qquad \int_F \sigma\, dF = 0. \tag{13.1}$$

$\sum Y = 0$ и $\sum Z = 0$ обращаются в тождества вида $0 = 0$, так как усилия $dN = \sigma dF$ проектируются на эти оси в точку.

Составим теперь уравнения моментов относительно осей x, y и z. Заметим при этом, что пара M лежит в плоскости xOz и потому моментов относительно осей Ox и Oz не даёт.

$\sum M_x = 0$ обращается в тождество, так как усилия $dN = \sigma\, dF$ параллельны оси x:

$$\sum M_y = 0; \quad M - \sum dN \cdot z = 0 \quad \text{или} \quad M - \int_F \sigma dF \cdot z = 0,$$

откуда

$$\int_F \sigma \cdot z\, dF = M; \tag{13.2}$$

$$\sum M_z = 0; \quad \sum dN \cdot y = 0 \quad \text{или} \quad \int_F \sigma\, dF \cdot y = 0. \tag{13.3}$$

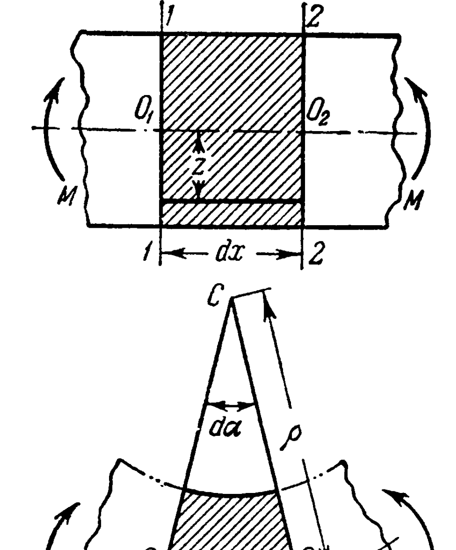
Таким образом, из шести уравнений равновесия можно использовать только три:

$$\sum X = 0 \quad \text{или} \quad \int_F \sigma dF = 0, \tag{13.1'}$$

$$\sum M_y = 0 \quad \text{или} \quad \int_F \sigma z\, dF = M, \tag{13.2'}$$

$$\sum M_z = 0 \quad \text{или} \quad \int_F \sigma y\, dF = 0. \tag{13.3'}$$

Однако полученных трёх уравнений статики недостаточно для определения величины нормальных напряжений, так как σ изменяется в зависимости от расстояния z площадки dF до нейтральной оси по неизвестному пока закону. Это расстояние (z) тоже неизвестно, так как неизвестно положение нейтральной оси y.



Фиг. 183.

Б. Обратимся к рассмотрению деформаций балки, для чего двумя бесконечно близкими сечениями 1—1 и 2—2 выделим из неё элемент длиной dx. Вид этого элемента до и после деформации показан на фиг. 183.

Для ясности чертежа деформация элемента показана с сильным преувеличением. Оба поперечных сечения, оставаясь плоскими, повернутся вокруг нейтральных осей (на фасаде точки O_1 и O_2) и образуют угол $d\alpha$. Нейтральный слой показан пунктиром. Линия O_1O_2, принадлежащая нейтральному слою, после деформации сохранит свою первоначальную длину dx. Все волокна, лежащие выше нейтрального слоя, укорачиваются, а ниже — удлиняются.

Найдём удлинение какого-либо волокна AB, расположенного в расстоянии z от нейтрального слоя и растянутого напряжениями σ. Первоначальная длина этого волокна равна $dx = \smile O_1O_2 = \rho\, d\alpha$. После деформации его длина по дуге AB стала $\smile AB = (\rho + z)\, d\alpha$. Абсолютное удлинение рассматриваемого волокна $\Delta l = (\rho + z)\, d\alpha - \rho\, d\alpha = z\, d\alpha$. Относительное удлинение равно

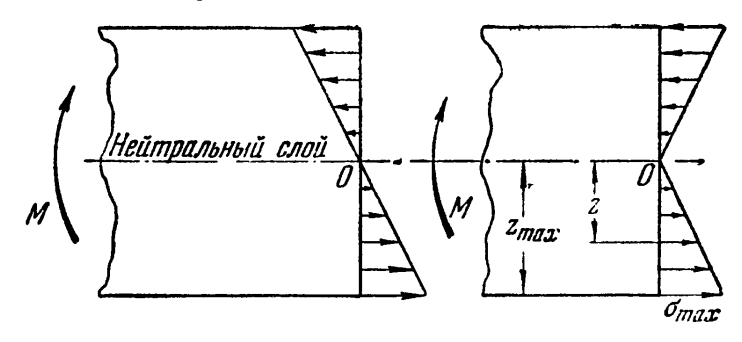
$$\varepsilon = \frac{z\, d\alpha}{\rho\, d\alpha} = \frac{z}{\rho},$$

т. е. удлинения волокон пропорциональны их расстояниям до нейтрального слоя.

Здесь ρ — радиус кривизны нейтрального слоя, величину которого для выделенного (бесконечно малого по длине) элемента можно считать постоянной. Допустив, что при изгибе волокна друг на друга не давят и что каждое волокно испытывает простое (линейное) растяжение или сжатие, — для вычисления напряжений можем воспользоваться законом Гука при растяжении:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{E \cdot z}{\rho}. \tag{13.4}$$

Уравнение (13.4) показывает, что величина нормальных напряжений при изгибе меняется прямо пропорционально расстоянию z рассматриваемой точки сечения от нейтрального слоя. Значит, напряжения распределены по высоте сечения по линейному закону.



Фиг. 184.

На нейтральной оси при $z = 0$ и $\sigma = 0$; при переходе в сжатую зону (выше нейтральной оси) σ вместе с z меняет знак на минус (сжатие) и вновь растёт по абсолютному значению по мере удаления от нейтральной оси. Следовательно, наибольшего значения напряжения достигнут у верхнего и нижнего краёв сечения при $z = z_{\max}$. Характер распределения напряжений показан на фиг. 184.

Уравнение (13.4) даёт только характер распределения нормальных напряжений по сечению, но им нельзя воспользоваться для вычисления величины их, так как ни ρ, ни z неизвестны, поскольку неизвестно расположение нейтрального слоя по высоте сечения.

В. Для определения σ в зависимости от изгибающего момента обратимся к совместному решению полученного из рассмотрения деформаций уравнения (13.4) и уравнений статики (13.1), (13.2) **и (13.3).**

Подставляя значение σ из выражения (13.4) в уравнение (13.1), получим:

$$\sum X = 0 \quad \text{или} \quad \int\limits_F \frac{E}{\rho} \cdot z\,dF = 0.$$

Так как $\frac{E}{\rho} = \text{const.} \neq 0$, то

$$\int\limits_F z\,dF = 0. \tag{13.5}$$

Этот интеграл представляет собой *статический момент* площади сечения относительно нейтральной оси. Так как он равен нулю, то, следовательно, *нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения.* Так как центр тяжести лежит и на оси симметрии Oz, то точка пересечения этих двух осей O является центром тяжести сечения, а ось Ox — осью стержня.

Таким образом, положения нейтральной оси и нейтрального слоя вполне определены. Нейтральный слой заключает в себе центры тяжести всех сечений стержня.

Теперь подставим то же выражение (13.4) в уравнение (13.3):

$$\sum M_z = 0, \quad \int\limits_F \frac{E}{\rho} zy\,dF = 0 \quad \text{или} \quad \frac{E}{\rho}\int\limits_F zy\,dF = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_F zy\,dF = 0. \tag{13.6}$$

Полученный интеграл — *сумма произведений из элементарных площадок на расстояния их до координатных осей — называется центробежным моментом инерции относительно осей y* и z. Центробежный момент инерции может быть положителен, может быть и величиной отрицательной, а следовательно, может и обратиться в нуль, так как координаты элементарных площадок могут иметь разные знаки.

По условию (13.6), в нашем случае центробежный момент инерции, который обычно обозначается символом

$$J_{zy} = \int\limits_F zy\,dF,$$

должен обратиться в нуль.

Так как сечение симметрично относительно оси Oz, то для каждой площадки dF с координатами z, y слева от оси z мы можем подыскать такую же, симметрично расположенную, площадку справа от оси z. Координаты z для этих площадок будут одинаковыми и по величине и по знаку, координаты же y окажутся одина-

ковыми по абсолютной величине, но обратными по знаку. Поэтому сумма

$$\int_F zy\,dF$$

разобьётся на две суммы, равные по величине и противоположные по знаку. Таким образом, этот интеграл для симметричных сечений всегда равен нулю, и уравнение (13.6) обращается в тождество.

Наконец, используем последнее уравнение (13.2); подставив в него выражение (13.4), получим:

$$\sum M_y = 0, \quad \int_F \frac{E}{\rho} \cdot z^2\,dF = M \quad \text{или} \quad \frac{E}{\rho}\int_F z^2\,dF = M.$$

Обозначим

$$J_y = \int_F z^2\,dF. \tag{13.7}$$

Этот интеграл, т. е. *сумма произведений из элементарных площадок на квадраты расстояний их до оси, называется осевым или экваториальным моментом инерции площади* относительно оси y и обозначается символом J_y. Так как ось y — нейтральная ось, то J_y есть момент инерции площади сечения балки относительно нейтральной оси [1]). Тогда из преобразованного только что уравнения (13.2) получаем:

$$\frac{EJ}{\rho} = M \quad \text{или} \quad \frac{E}{\rho} = \frac{M}{J}. \tag{13.8}$$

Подставляя найденное значение $\frac{E}{\rho}$ в уравнение (13.4), находим:

$$\sigma = \frac{Mz}{J}. \tag{13.9}$$

Таким образом, *нормальные напряжения в любой точке сечения прямо пропорциональны величине изгибающего момента и расстоянию точки от нейтральной оси и обратно пропорциональны моменту инерции сечения относительно нейтральной оси.*

Нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения и перпендикулярна к плоскости действия сил.

Момент инерции сечения, как видно из формулы (13.7), измеряется в единицах длины в четвёртой степени и зависит от формы

---

[1]) В дальнейшем, при обозначении момента инерции относительно нейтральной оси y, мы часто будем опускать индекс y, обозначая его для краткости просто J, вместо J_y.

и размеров сечения. Практические приёмы его вычисления для различных сечений будут показаны далее.

Для установления физического смысла этой величины видоизменим формулу (13.8):

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EJ}. \qquad (13.10)$$

Отсюда видно, что чем больше при данном изгибающем моменте момент инерции сечения J, тем бо́льшим окажется радиус кривизны нейтрального слоя, а стало быть, и оси балки, т. е. тем меньше балка искривится.

Величина момента инерции характеризует способность балки *сопротивляться искривлению в зависимости от размеров и формы поперечного сечения балки.* Модуль упругости E характеризует ту же способность балки сопротивляться искривлению, но уже в зависимости от материала балки. Произведение EJ называется *жёсткостью* балки при изгибе, и чем оно больше, тем меньше искривится балка при действии данного изгибающего момента.

Г. С искривлением оси балки связан взаимный поворот сечений; длина отрезка $OO'=dx$, как это видно из чертежа (фиг. 183), равна $\rho\, d\alpha$. Отсюда угол поворота двух смежных сечений

$$d\alpha=\frac{dx}{\rho}.$$

Подставляя вместо $\frac{1}{\rho}$ его значение $\frac{M}{EJ}$, получим:

$$d\alpha=\frac{M\,dx}{EJ}, \qquad (13.11)$$

т. е. деформации при изгибе — поворот сечений $d\alpha$, как и кривизна оси балки $\frac{1}{\rho}$, прямо пропорциональны величине изгибающего момента и обратно пропорциональны жёсткости балки.

Повторяя рассуждения, приведённые в § 62, легко подсчитать *потенциальную энергию,* накопленную балкой при изгибе. При изгибе бесконечно малого отрезка балки, длиной dx, работа изгибающего момента на угловом перемещении $d\alpha$ будет:

$$dA=\frac{1}{2}M\,d\alpha.$$

Подставляя $d\alpha$ из уравнения (13.11), получим

$$dU=dA=\frac{1}{2}\frac{M^2\,dx}{EJ}.$$

Просуммировав по всей длине балки, найдём:

$$U=\int_0^l \frac{M^2\,dx}{2EJ}. \qquad (13.12)$$

При чистом изгибе балки ($M=\text{const.}$) и постоянном сечении её по всей длине ($EJ=\text{const.}$) потенциальная энергия выразится так

$$U=\frac{M^2 l}{2EJ}.$$

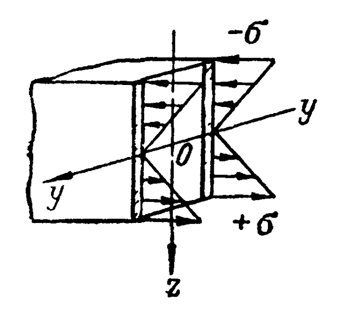
§ 79. Применение полученных результатов к проверке прочности балок.

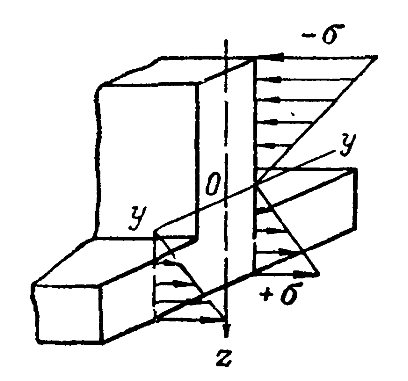
Формула (13.9) решает вопрос о величине и распределении нормальных напряжений по сечению. Она выведена в предположении наличия *чистого изгиба,* когда сечения остаются плоскими.

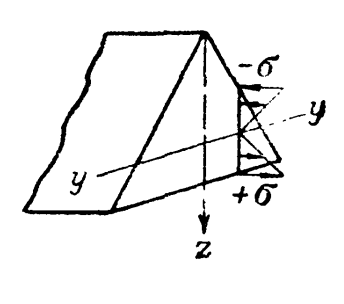
Исследования показали, что когда Q не равно нулю, сечения не только поворачиваются, но и несколько искривляются под влиянием касательных напряжений. Однако это искривление для двух смежных сечений таково, что оно не меняет установленного выше закона распределения деформаций волокон, заключающихся между этими сечениями. Поэтому формула (13.9) может быть применена и в том случае, когда Q не равно нулю.

Далее следует отметить, что *пока* мы имеем право применять эту формулу лишь в том случае, когда сечения балки имеют ось симметрии и внешние силы расположены в этой плоскости симметрии.

Нейтральная ось в каждом сечении, от которой отсчитывается z, проходит через центр тяжести перпендикулярно к оси симметрии.







Фиг. 185.

На фиг. 185 приведены примеры распределения напряжений при различных формах сечений балки: прямоугольник, тавр, треугольник. Во всех точках, одинаково удалённых от нейтральной оси, нормальные напряжения одинаковы. По одну сторону нейтральной оси мы получаем сжимающие, а по другую сторону — растягивающие напряжения. Наибольшие напряжения получаются в точках, наиболее удалённых от нейтральной оси. При выбранных условиях

относительно знаков M и z формула (13.9) автоматически даёт правильный знак для σ, плюс — для растягивающих и минус — для сжимающих напряжений.

При положительном изгибающем моменте балка гнётся выпуклостью вниз, верхние волокна сжимаются ($z < 0$), нижние растягиваются. При отрицательном изгибающем моменте получается обратная картина. Поэтому при решении практических задач для выбора знака нормальных напряжений можно руководствоваться правилом: если точка рассматриваемого сечения находится в растянутой зоне, то σ следует брать со знаком плюс, а если в сжатой — со знаком минус. Разумеется, в этом случае в формулу (13.9) следует подставлять абсолютные значения M и z.

Для проверки прочности материала балки по отношению к нормальным напряжениям необходимо найти наиболее напряжённые на растяжение и сжатие площадки. Для этого необходимо применить формулу (13.9) к *опасному сечению*, т. е. подставить в неё вместо M его наибольшее значение M_{max}, а вместо z подставить z_{max} — расстояние от нейтральной оси до наиболее удалённых от неё точек. Тогда для наибольшего нормального напряжения получаем формулу

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} z_{max}}{J}.$$

Обычно эту формулу преобразовывают, деля числитель и знаменатель на z_{max}:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{\left(\frac{J}{z_{max}}\right)}.$$

Величина $\frac{J}{z_{max}}$ называется *осевым моментом сопротивления* сечения и обозначается буквой W. Так как J выражается в единицах длины в четвёртой степени, то W измеряется единицами длины в третьей степени, например *см*^{3}. Таким образом,

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}, \qquad (13.13)$$

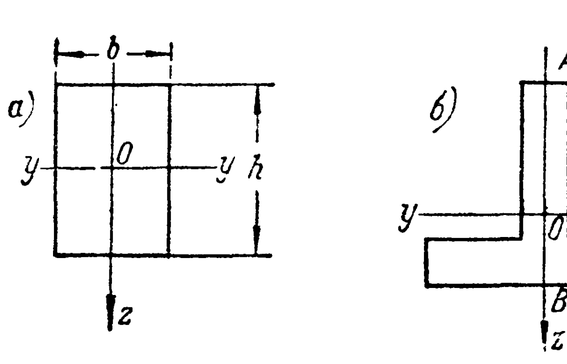
где

$$W = \frac{J}{z_{max}}. \qquad (13.14)$$

При симметричном относительно нейтральной оси сечении, например прямоугольном, расстояния до крайних растянутых и сжатых волокон одинаковы и такое сечение имеет *одно вполне определённое* значение момента сопротивления относительно оси y. Так, при высоте прямоугольника (фиг. 186, *a*), равной h,

$$z_{max} = \frac{h}{2} \quad \text{и} \quad W = \frac{J}{\left(\frac{h}{2}\right)}.$$

Если сечение несимметрично относительно нейтральной оси — тавр, мы получим *два* момента сопротивления: один для волокон A (фиг. 186, *б*): $W_1 = \frac{J}{h_1}$ и другой для волокон B: $W_2 = \frac{J}{h_2}$. Теперь в формулу (13.13) следует вводить: W_1 — при вычислении напряжений в точке A и W_2 — при вычислении напряжений в точке B.



Фиг. 186.

Переходим к составлению условия прочности по напряжениям растяжения или сжатия. Это условие выражает ту мысль, что наибольшее действительное напряжение должно быть не больше допускаемого:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leqslant [\sigma]. \tag{13.15}$$

Отсюда находим, что

$$W \geqslant \frac{M_{max}}{[\sigma]}, \tag{13.16}$$

т. е. необходимый по условию прочности момент сопротивления сечения балки должен быть больше или равен наибольшему изгибающему моменту, делённому на допускаемое напряжение.

Так как W зависит от формы и размеров сечения балки, то, выбрав форму (прямоугольник, тавр, двутавр), мы сможем подобрать размеры балки так, чтобы её сечение имело момент сопротивления, равный полученному из формулы (13.16). Как это делается практически, будет показано ниже. Для прокатных профилей значения J и W даются в таблицах сортамента (см. приложение IX).

При применении формул (13.15) и (13.16) следует различать два случая.

Первый случай, наиболее часто встречающийся при изгибе, — когда материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию; в этом случае допускаемые напряжения для того и другого вида деформации равны между собой:

$$[\sigma_р] = [\sigma_{сж}] = [\sigma].$$

Тогда при *симметричном* сечении безразлично, проверять ли прочность растянутых или сжатых волокон, ибо для тех и других момент сопротивления W и наибольшие действительные напряжения будут иметь одну и ту же величину. При *несимметричном* сечении в формулы (13.15) и (13.16) вместо W надо подставить то значение W_1 или W_2, которое *меньше*; оно будет относиться к более удалённому волокну.

Второй случай имеет место, когда материал балки различно сопротивляется растяжению и сжатию; тогда (подробнее см. в § 90) вместо одного условия прочности мы получаем два: одно — для растянутых, другое — для сжатых волокон:

$$\sigma_p = +\frac{M_{max}}{W_1} \leqslant [\sigma]; \quad \sigma_{сж} = -\frac{M_{max}}{W_2} \leqslant [\sigma_{сж}]. \tag{13.17}$$

В зависимости от того, чему лучше сопротивляется материал, что больше, $[\sigma]$ или $[\sigma_{сж}]$, приходится соответствующим образом конструировать сечение, выбирая его форму и размеры так, чтобы W_1 и W_2 удовлетворяли условию прочности.

Таким образом, формулы (13.15) и (13.17) дают нам возможность при вычисленной величине M_{max} и выбранном материале (допускаемом напряжении) *подобрать необходимую* величину момента сопротивления балки. Для того чтобы от этой величины перейти к *размерам* сечения, необходимо научиться вычислять J и W для любых форм поперечных сечений. Методы вычисления J и W даны в следующем параграфе.

Что касается физического смысла момента сопротивления, то он ясен из формулы (13.13); чем больше W, тем больший изгибающий момент может принять на себя балка, не подвергаясь опасности разрушения. Таким образом, величина момента сопротивления характеризует влияние *формы и размеров принятого сечения на прочность балки при напряжениях, не превосходящих предела пропорциональности.*

При напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала, формулы (13.13) и (13.17) перестают быть справедливыми.

ГЛАВА XIV.

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР.

§ 80. Вычисление моментов инерции и моментов сопротивления для простейших сечений.

В § 78 мы назвали моментом инерции сечения относительно нейтральной оси интеграл такого вида:

$$J = \int_F z^2\, dF. \tag{13.7}$$

Здесь z — расстояние элементарной *площадки* dF от нейтральной оси; суммирование охватывает всю площадь сечения. Покажем в качестве примера вычисление этого интеграла для прямоугольника (фиг. 187) высотой h и шириной b. Проведём через его центр тяжести O оси симметрии Oz и Oy. Если внешние силы, действующие

на балку, лежат в плоскости Oz, то нейтральной осью будет ось Oy. Найдём относительно этой оси сначала момент инерции, а потом и момент сопротивления площади прямоугольника.

Площадки dF, на которые следует разбить всю площадь сечения, выберем в виде узких прямоугольников шириной b и высотой dz (фиг. 187). Тогда

$$dF = b\,dz,$$

и интеграл J принимает вид:

$$J_y = \int\limits_F bz^2\,dz.$$

Чтобы взять интеграл по всей площади прямоугольника, следует z менять от $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$. Тогда

$$J_y = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} bz^2\,dz = b\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}. \qquad (14.1)$$

Момент же сопротивления относительно нейтральной оси Oy мы получим, разделив J_y на $z_{\max} = \frac{h}{2}$:

$$W = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}. \qquad (14.2)$$

Если бы нам нужно было вычислить момент инерции и момент сопротивления прямоугольника относительно оси Oz, то в полученных формулах следовало бы b и h поменять местами:

$$J_z = \frac{hb^3}{12}$$

и

$$W_z = \frac{hb^2}{6}. \qquad (14.3)$$

Фиг. 187.

Фиг. 188.

Заметим, что сумма произведений $z^2\,dF$ не изменится, если мы сдвинем все полоски $dF = b\,dz$ (фиг. 187) параллельно самим себе так, что они расположатся в пределах параллелограмма $ABCD$ (фиг. 188).

Таким образом, момент инерции *параллелограмма* $ABCD$ относительно оси y равен моменту инерции равновеликого ему прямоугольника $ABGE$:

$$J_y = \frac{bh^3}{12}. \tag{14.1}$$

При вычислении момента инерции *круга* радиуса r (фиг. 189) также разбиваем площадь на узкие полоски размером dz вдоль оси Oz; ширина этих полосок $b = b(z)$ тоже будет переменной по высоте сечения. Элементарная площадка

$$dF = b(z)\,dz.$$

Момент инерции равен:

$$J = \int\limits_F z^2\, b(z)\, dz.$$

Так как верхняя и нижняя половины сечения одинаковы, то вычисление момента инерции достаточно провести для одной нижней и результат удвоить. Пределами для изменения z будут 0 и r:

$$J = 2\int\limits_0^r z^2 b(z)\, dz.$$

Фиг. 189.

Введём новую переменную интегрирования — угол α (фиг. 189); тогда

$$z = r\cos\frac{\alpha}{2}; \quad dz = -\frac{1}{2} r \sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha,$$

$$b(z) = 2r\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Пределы: при $z = 0$ $\alpha = \pi$; при $z = r$ $\alpha = 0$, следовательно,

$$J = -2\int\limits_\pi^0 2r^4 \cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\, d\alpha = \frac{r^4}{2}\int\limits_0^\pi \sin^2\alpha\, d\alpha = \frac{\pi r^4}{4} \tag{14.4}$$

и

$$W = \frac{J}{z_{\max}} = \frac{J}{r} = \frac{\pi r^3}{4}. \tag{14.5}$$

Для круга всякая ось, проходящая через центр тяжести, есть ось симметрии. Поэтому формулы (14.4) и (14.5) годны для любой такой оси.

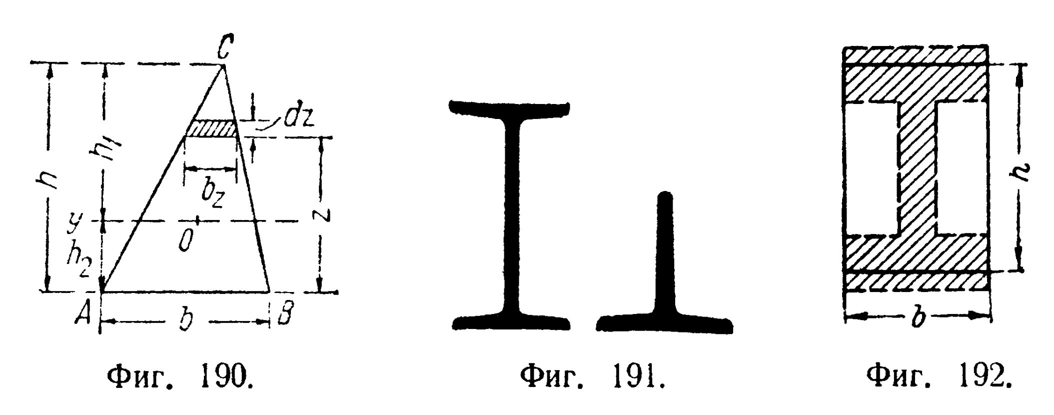
Для *треугольника* (фиг. 190) момент инерции относительно оси AB равен

$$J_{AB}=\int_F b_z dz z^2; \quad b_z = b\frac{h-z}{h}=b\left(1-\frac{z}{h}\right),$$

$$J_{AB}=\int_0^h bz^2\left(1-\frac{z}{h}\right)dz=\frac{bh^3}{3}-\frac{bh^3}{4}=\frac{bh^3}{12}.$$

В следующей главе будет показано, как вычислять момент инерции для сечения любой сложной формы относительно любой оси.

На практике из симметричных сечений встречаются чаще всего: для дерева — прямоугольник и круг, для металлов — двутавровое и тавровое сечения (фиг. 191). Для прокатных профилей можно пользоваться таблицами ОСТ (сортамент), в которых помещены размеры и



Фиг. 190. Фиг. 191. Фиг. 192.

величины J и W для профилей, выпускаемых заводами. Эти таблицы помещены в приложении IX и пользование ими показано на примере в следующем параграфе.

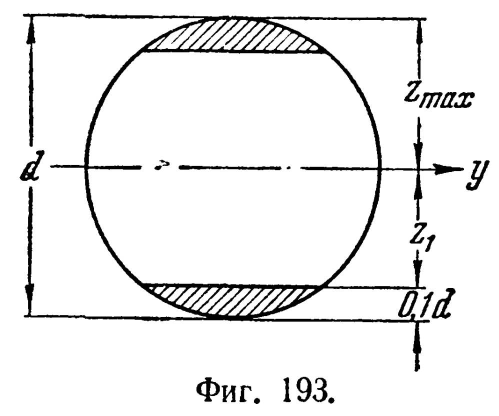
В балках из металла обычно применяются сложные поперечные сечения, потому что в них материал может быть использован экономичнее, чем в таких сечениях, как прямоугольник и круг.

Мы видели (§ 58), что валы делают полыми, чтобы удалить ту часть материала, которая слабо работает. При изгибе балок материал около нейтральной оси принимает на себя малые нормальные напряжения [формула (13.9)] и также не может быть использован полностью. Поэтому целесообразнее переделать прямоугольное сечение так, чтобы удалить материал у нейтральной оси и часть его сэкономить, а часть перенести в верхнюю и нижнюю зоны балки, где он будет работать более интенсивно. Так получается (фиг. 192) из прямоугольного сечения профиль *двутавра*, обладающего той же прочностью и меньшим весом. Применение двутавра целесообразно при материалах, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию (большинство металлов).

Сечения в виде *тавра* применяются или в случаях, вызываемых специальными конструктивными обстоятельствами, или для таких материалов, как чугун, бетон, у которых сопротивления растяжению

и сжатию резко разнятся между собой; последнее обстоятельство требует, чтобы напряжения в крайних волокнах были различными.

Как видно из изложенного, при решении вопроса о наиболее экономичном проектировании сечения следует стремиться к тому, чтобы при одной и той же площади F получить наибольший момент сопротивления и момент инерции. Это ведёт к размещению большей части материала подальше от нейтральной оси.



Фиг. 193.

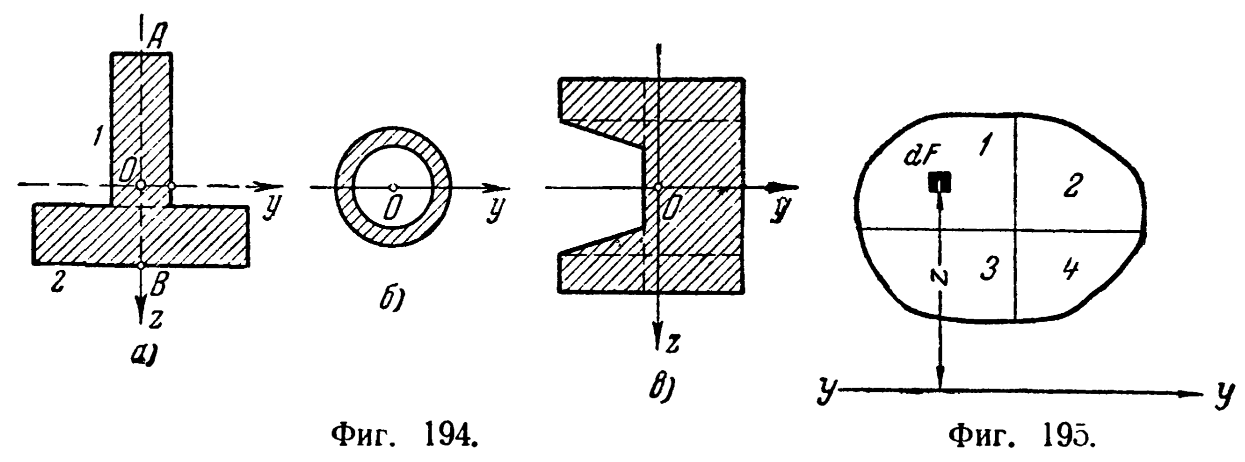
Однако для некоторых сечений можно увеличить момент сопротивления не добавлением, а, наоборот, путём срезки некоторой части сечения, наиболее удалённой от нейтральной оси.

Так, например, для круглого сечения срезка заштрихованных сегментов (фиг. 193) несколько увеличивает момент сопротивления, так как при этом мы уменьшаем момент инерции сечения в меньшей степени, чем расстояние до крайнего волокна $z_{\max}$.

§ 81. Общий способ вычисления моментов инерции сложных сечений.

При проверке прочности частей конструкций нам приходится встречаться с сечениями довольно сложной формы, для которых нельзя вычислить момент инерции таким простым путём, каким мы пользовались для прямоугольника и круга в § 80.

Таким сечением может быть, например, тавр (фиг. 194, *а*), кольцевое сечение трубы, работающей на изгиб (авиационные кон-



Фиг. 194. Фиг. 195.

струкции) (фиг. 194, *б*), кольцевое сечение шейки вала или ещё более сложное сечение (фиг. 194, *в*). Все эти сечения можно разбить на простейшие, как-то: прямоугольники, треугольники, круги и т. д. Можно показать, что момент инерции такой сложной фигуры является суммой моментов инерции частей, на которые мы её разбиваем.

Возьмём (фиг. 195) какую угодно фигуру, изображающую поперечное сечение балки; в её плоскости проведена ось $y-y$. Момент инерции этой фигуры относительно оси $y-y$ равен (13.7):

$$J_y = \int_F z^2\, dF,$$

где z — расстояние элементарных площадок dF до оси $y-y$.

Разобьём взятую площадь на четыре части: F_1, F_2, F_3 и F_4. Теперь при вычислении момента инерции по формуле (13.7) можно сгруппировать слагаемые в подинтегральной функции так, чтобы отдельно произвести суммирование для каждой из выделенных четырёх площадей, а затем эти суммы сложить. Величина интеграла от этого не изменится.

Наш интеграл разобьётся на четыре интеграла, каждый из которых будет охватывать одну из площадей F_1, F_2, F_3 или F_4:

$$J_y = \int_F z^2\, dF = \int_{F_1} z^2\, dF + \int_{F_2} z^2\, dF + \int_{F_3} z^2\, dF + \int_{F_4} z^2\, dF.$$

Каждый из этих интегралов представляет собой момент инерции соответствующей части площади относительно оси $y-y$; поэтому

$$J_y = J_y^{\mathrm{I}} + J_y^{\mathrm{II}} + J_y^{\mathrm{III}} + J_y^{\mathrm{IV}}, \tag{14.6}$$

где J_y^{I} — момент инерции относительно оси $y-y$ площади F_1, J_y^{II} — то же для площади F_2 и т. д.

Полученный результат можно формулировать так: *момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции составных её частей.* Поэтому, чтобы вычислить, например, момент инерции сечения, изображённого на фиг. 194, *в*, относительно оси Oy, необходимо найти моменты инерции прямоугольников и треугольников относительно оси Oy и затем сложить их. Таким образом, нам необходимо уметь *вычислять момент инерции любой фигуры относительно любой оси, лежащей в её плоскости.*

Решение этой задачи и составляет содержание настоящей главы.

§ 82. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей, из которых одна — центральная.

Задачу — получить наиболее простые формулы для вычисления момента инерции любой фигуры относительно любой оси — мы решим в несколько приёмов. Если взять серию осей, параллельных друг другу, то оказывается, что можно легко вычислить моменты инерции фигуры относительно любой из этих осей, зная её момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести фигуры параллельно выбранным осям.

Оси, проходящие через центр тяжести, мы будем называть *центральными осями.* Возьмём (фиг. 196) какую-нибудь фигуру.

Проведём центральную ось Oy, момент инерции относительно этой оси назовём J_y. Проведём в плоскости фигуры ось y_1 *параллельно* оси y на расстоянии a от неё. Найдём зависимость между J_y и J'_y — моментом инерции относительно оси y_1. Для этого напишем выражения для J_y и J'_y. Разобьём площадь фигуры на площадки dF; расстояния каждой такой площадки до осей y и y_1 назовём z и z_1. Тогда

$$J_y = \int_F z^2\,dF \quad \text{и} \quad J'_y = \int_F z_1^2\,dF.$$

Но из чертежа имеем:

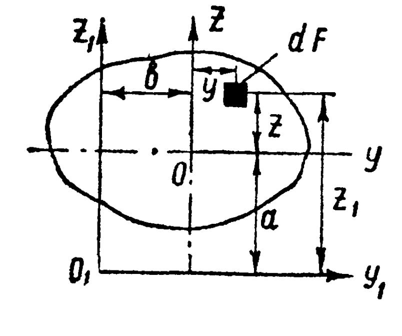
$$z_1 = z + a,$$

следовательно:

$$J'_y = \int_F (z+a)^2\,dF = \int_F (z^2 + 2az + a^2)\,dF =$$

$$= \int_F z^2\,dF + 2a\int_F z\,dF + a^2\int_F dF.$$

Первый из этих трёх интегралов — момент инерции относительно центральной оси Oy. Второй — статический момент относительно той же оси; он равен нулю, так как ось y проходит через центр тяжести фигуры. Наконец, третий интеграл равен площади фигуры F. Таким образом,



Фиг. 196.

$$J'_y = J_y + a^2F, \tag{14.7}$$

т. е. *момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, проведённой параллельно данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.*

Значит, наша задача теперь свелась к вычислению только центральных моментов инерции; если мы их будем знать, то по формуле (14.7) сможем вычислить момент инерции относительно любой другой оси. Из формулы (14.7) следует, что *центральный* момент инерции является *наименьшим* среди моментов инерции относительно параллельных осей и для него мы получаем:

$$J_y = J'_y - a^2F.$$

Найдём также центробежный момент инерции J'_{yz} относительно осей y_1z_1, параллельных центральным, если известен $J_{yz} = \int_F yz\,dF$ (фиг. 196). Так как по определению

$$J'_{yz} = \int_F y_1z_1\,dF,$$

где $y_1 = y + b$, $z_1 = z + a$, то

$$J'_{yz} = \int_F (y + b)(z + a)\, dF =$$
$$= \int_F yz\, dF + ab \int_F dF + a \int_F y\, dF + b \int_F z\, dF.$$

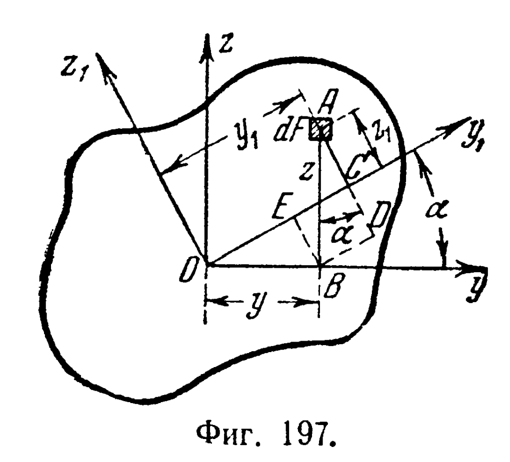
Так как два последних интеграла представляют собой статические моменты площади относительно центральных осей Oy и Oz, то они обращаются в нуль и, следовательно:

$$J'_{yz} = J_{yz} + ab \cdot F. \tag{14.8}$$

Центробежный момент инерции относительно системы взаимно перпендикулярных осей, параллельных центральным, равен центробежному моменту инерции относительно этих центральных осей плюс произведение из площади фигуры на координаты её центра тяжести относительно новых осей.

§ 83. Зависимость между моментами инерции при повороте осей.

Центральных осей можно провести сколько угодно. Является вопрос, нельзя ли выразить момент инерции относительно любой центральной оси в зависимости от момента инерции относительно одной или двух *определённых* осей. Для этого посмотрим, как будут меняться моменты инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей при повороте их на угол α.



Фиг. 197.

Возьмём какую-либо фигуру и проведём через её центр тяжести O две взаимно перпендикулярные оси Oy и Oz (фиг. 197). Пусть нам известны осевые моменты инерции относительно этих осей J_y, J_z, а также центробежный момент инерции J_{yz}. Начертим вторую систему координатных осей y_1 и z_1, наклонённых к первым под углом α; положительное направление этого угла будем считать при повороте осей вокруг точки O против часовой стрелки. Начало координат O сохраняем. Выразим моменты относительно второй системы координатных осей J'_y и J'_z через известные моменты инерции J_y и J_z.

Напишем выражения для моментов инерции относительно этих осей:

$$\left.\begin{aligned} J_y &= \int_F z^2\, dF; & J_z &= \int_F y^2\, dF; \\ J'_y &= \int_F z_1^2\, dF; & J'_z &= \int_F y_1^2\, dF. \end{aligned}\right\} \tag{14.9}$$

Из чертежа видно, что координаты площадки dF в системе повёрнутых осей y_1Oz_1 будут:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= OE + EC = OE + BD = y\cos\alpha + z\sin\alpha, \\ z_1 &= AD - DC = AD - BE = z\cos\alpha - y\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (14.10)$$

Подставляя эти значения y_1 и z_1 в формулы (14.9), получим:

$$J'_y = \int_F (z\cos\alpha - y\sin\alpha)^2\,dF = \int_F (z^2\cos^2\alpha + y^2\sin^2\alpha - 2yz\sin\alpha\cos\alpha)\,dF,$$

или

$$J'_y = \cos^2\alpha\int_F z^2\,dF + \sin^2\alpha\int_F y^2\,dF - \sin 2\alpha\int_F yz\,dF. \quad (14.11)$$

Аналогично:

$$J'_z = \int_F (y\cos\alpha + z\sin\alpha)^2\,dF$$

или

$$J'_z = \sin^2\alpha\int_F z^2\,dF + \cos^2\alpha\int_F y^2\,dF + \sin 2\alpha\int_F yz\,dF. \quad (14.12)$$

Первые два интеграла выражений (14.11) и (14.12) представляют собой осевые моменты инерции J_y и J_z, а последний — центробежный момент инерции площади относительно этих осей J_{yz}. Тогда:

$$\left.\begin{aligned} J'_y &= J_y\cos^2\alpha + J_z\sin^2\alpha - J_{yz}\sin 2\alpha, \\ J'_z &= J_y\sin^2\alpha + J_z\cos^2\alpha + J_{yz}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (14.13)$$

Для решения задач могут понадобиться формулы перехода от одних осей к другим для центробежного момента инерции. При повороте осей (фиг. 197) имеем:

$$J'_{yz} = \int_F y_1 z_1\,dF,$$

где y_1 и z_1 вычисляются по формулам (14.10); тогда

$$J'_{yz} = \int_F (z\sin\alpha + y\cos\alpha)(z\cos\alpha - y\sin\alpha)\,dF =$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha\int_F z^2\,dF - \sin\alpha\cos\alpha\int_F y^2\,dF + \cos^2\alpha\int_F yz\,dF - \sin^2\alpha\int_F yz\,dF.$$

После преобразований получим:

$$J'_{yz} = \frac{1}{2}(J_y - J_z)\sin 2\alpha + J_{yz}\cos 2\alpha. \quad (14.14)$$

Таким образом, для того чтобы вычислить момент инерции относительно любой центральной оси y_1, надо знать моменты инерции J_y и J_z относительно системы каких-нибудь двух взаимно перпендикулярных центральных осей Oy и Oz, центробежный момент инерции J_{yz} относительно тех же осей и угол наклона оси y_1 к оси y.

Для вычисления же величин J_y, J_z, J_{yz} приходится так выбирать оси y и z и разбивать площадь фигуры на такие составные части, чтобы иметь возможность произвести это вычисление, пользуясь только формулами перехода от центральных осей каждой из составных частей к осям, им параллельным. Как это сделать на практике, будет показано ниже на примере. Заметим, что при этом вычислении сложные фигуры надо разбивать на такие элементарные части, для которых по возможности известны величины центральных моментов инерции относительно системы взаимно перпендикулярных осей.

Заметим, что ход вывода и полученные результаты (14.13) и (14.14) не изменились бы, если бы начало координат было взято не в центре тяжести сечения, а в любой другой точке O. Таким образом, формулы (14.13) и (14.14) являются формулами перехода от одной системы взаимно-перпендикулярных осей к другой, повёрнутой на некоторый угол α, независимо от того, центральные это оси или нет.

Из формул (14.13) можно получить ещё одну зависимость между моментами инерции при повороте осей. Сложим выражения для J'_y и J'_z (14.13); получим

$$J'_y + J'_z = J_y(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + J_z(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = J_y + J_z, \quad (14.15)$$

т. е. сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей y и z не меняется при их повороте. Подставляя в формулу (14.15) вместо J_y и J_z их значения из (14.9), получаем:

$$J_y + J_z = \int_F z^2\,dF + \int_F y^2\,dF = \int_F (z^2 + y^2)\,dF = \int_F \rho^2\,dF = J_p, \quad (14.16)$$

где $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ — расстояние площадок dF от точки O. Величина $J_p = \int_F \rho^2\,dF$ является, как уже известно, полярным моментом инерции сечения относительно точки O (§ 58).

Полярный момент инерции сечения относительно какой-либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку. Поэтому эта сумма и остаётся постоянной при повороте осей. Зависимостью (14.16) можно пользоваться для упрощения вычисления моментов инерции. Так, для круга мы уже имели (§ 58)

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Так как по симметрии для круга $J_z = J_y$, то

$$J_z = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi r^4}{4},$$

что было получено выше путём интегрирования (§ 80).

Точно так же для тонкостенного кольцевого сечения на основании формулы (11.15) можно получить:

$$J_y = \frac{J_p}{2} \approx \pi r_0^3 t.$$

§ 84. Главные оси инерции и главные моменты инерции.

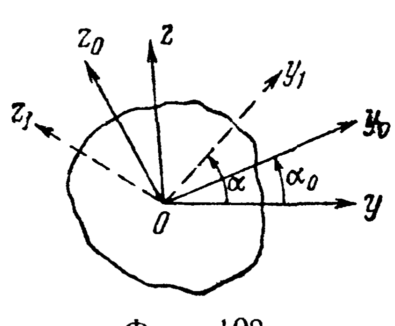
Формулы (14.7) и (14.13) решают поставленную в § 81 задачу: зная для данной фигуры центральные моменты инерции J_y, J_z и J_{zy}, мы можем вычислить момент инерции и относительно любой другой оси.

При этом можно за *основную* систему осей принять такую систему, при которой формулы (14.13) упрощаются. Именно, можно найти систему координатных осей, для которых центробежный момент инерции равен нулю. В самом деле, моменты инерции J_y и J_z всегда положительны, как суммы положительных слагаемых, центробежный же момент

$$J_{yz} = \int_F zy\,dF$$

может быть и положительным и отрицательным, так как слагаемые $zy\,dF$ могут быть разного знака в зависимости от знаков z и y для той или иной площадки. Значит, он может быть равен нулю (см. § 78, п. В).

Те оси, относительно которых центробежный момент инерции обращается в нуль, называются *главными осями* инерции. Если начало такой системы помещено в центре тяжести фигуры, то это будут *главные центральные оси.* Эти оси мы будем обозначать y_0 и z_0; для них



Фиг. 198.

$$J_{y_0z_0} = 0.$$

Найдём, под каким углом α_0 наклонены к центральным осям y и z (фиг. 198) главные оси. В формуле перехода (14.14) от осей yz к осям y_1z_1 для центробежного момента инерции дадим углу α значение α_0; тогда оси y_1 и z_1 совпадут с главными, и центробежный момент инерции будет равен нулю:

$$J'_{yz \text{ при } \alpha=\alpha_0} = J_{y_0z_0} = 0,$$

или

$$J_{y_0z_0} = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha_0 (J_z - J_y) + J_{yz}\cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{y\cdot}}{J_z - J_y}. \qquad (14.17)$$

Этому уравнению удовлетворяют два значения $2\alpha_0$, отличающиеся на 180°, или два значения α_0, отличающиеся на 90°. Таким образом, уравнение (14.17) даёт нам положение *двух осей*, составляющих между собой прямой угол. Это и будут главные центральные оси y_0 и z_0, для которых $J_{y_0 z_0} = 0$.

Пользуясь формулой (14.17), можно по известным J_y, J_z и J_{yz} получить формулы для главных моментов инерции J_{y0} и J_{z_0}. Для этого опять воспользуемся формулами (14.13); они дадут нам значения J_{y_0} и J_{z0}, если вместо α подставить α_0:

$$\left.\begin{aligned} J_{y_0} &= J_y \cos^2\alpha_0 + J_z \sin^2\alpha_0 - J_{yz}\sin 2\alpha_0, \\ J_{z_0} &= J_y \sin^2\alpha_0 + J_z \cos^2\alpha_0 + J_{yz}\sin 2\alpha_0. \end{aligned}\right\} \qquad (14.18)$$

Этими формулами вместе с формулой (14.17) можно пользоваться при решении задач. В § 85 будет показано, что одним из главных моментов инерции является $J_{\max}$, другим $J_{\min}$.

Формулы (14.18) можно преобразовать к виду, свободному от значения α_0. Выражая $\cos^2\alpha_0$ и $\sin^2\alpha_0$ через $\cos 2\alpha_0$ и подставляя их значения в первую формулу (14.18), получим, делая одновременно замену J_{yz} из формулы (14.17):

$$J_{y_0} = \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{J_y - J_z}{2}\cos 2\alpha_0 + \frac{J_y - J_z}{2}\,\frac{\sin^2 2\alpha_0}{\cos 2\alpha_0} =$$
$$= \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{J_y - J_z}{2}\cdot\frac{1}{\cos 2\alpha_0}.$$

Заменяя здесь из формулы (14.17) дробь $\frac{1}{\cos 2\alpha_0}$ на $\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \pm\sqrt{1+\frac{(2J_{yz})^2}{(J_y - J_z)^2}}$, получаем:

$$J_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4(J_{yz})^2}. \qquad (14.18')$$

К этой же формуле можно прийти, делая подобное же преобразование второй формулы (14.18).

За основную систему центральных осей, от которых можно переходить к любой другой, можно взять не Oy и Oz, а главные оси Oy_0 и Oz_0; тогда в формулах вида (14.13) не будет фигурировать центробежный момент инерции ($J_{y_0 z_0} = 0$). Обозначим угол, составленный осью y_1 (фиг. 199) с главной осью Oy_0, через β. Для вычисления J'_y, J'_z и J'_{yz}, переходя от осей y_0 и z_0, нужно в формулах

(14.13) и (14.14) заменить угол α через β, а J_y, J_z и J_{yz} — через J_{y0}, J_{z0} $J_{y0z0}=0$. В результате получаем:

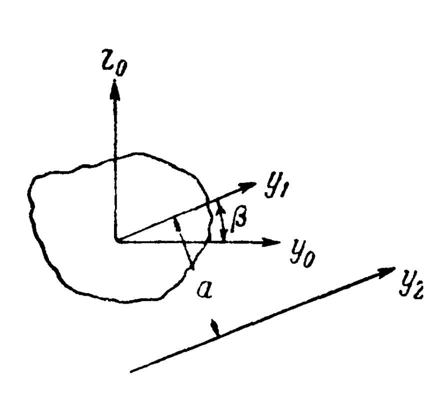
$$\left.\begin{aligned} J'_y &= J_{y0}\cos^2\beta + J_{z0}\sin^2\beta, \\ J'_z &= J_{y0}\sin^2\beta + J_{z0}\cos^2\beta, \\ J'_{yz} &= \frac{J_{y0}-J_{z0}}{2}\sin 2\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (14.19)$$

По своему виду эти формулы совершенно аналогичны формулам для нормальных σ_α и касательных τ_α напряжений (7.5) и (7.6) по двум взаимно-перпендикулярным площадкам в элементе, подвергающемся растяжению в двух направлениях (§ 36). Поэтому мы и здесь можем применить построение круга Мора; следует лишь по горизонтальной оси откладывать экваториальные моменты инерции, по вертикальной — центробежные. Построение круга и анализ его рекомендуется сделать самостоятельно. Укажем лишь формулу, позволяющую из двух значений угла α_0 (формула (14.17)) выделить то, которое соответствует отклонению первой главной оси (дающей max J) от начального положения оси y:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{J_{zy}}{J_{\min} - J_y}. \qquad (14.17')$$

Эта формула полностью аналогична формуле (7.11).

Теперь можно окончательно формулировать, что надо сделать, чтобы получить возможность простейшим образом вычислять момент инерции фигуры относительно любой оси. Необходимо через центр тяжести фигуры провести оси Oy и Oz так, чтобы, разбивая фигуру на простейшие части, мы могли легко вычислить моменты J_y, J_z и J_{zy}. После этого следует найти по формуле (14.17) величину угла α_0 и вычислить главные центральные моменты инерции J_{y0} и J_{z0} по формулам (14.18).



Фиг. 199.

Далее, можно найти момент инерции относительно любой центральной оси Oy_1 (фиг. 199), наклонённой к Oy_0 под углом β, по формуле (14.19):

$$J'_y = J_{y0}\cos^2\beta + J_{z0}\sin^2\beta.$$

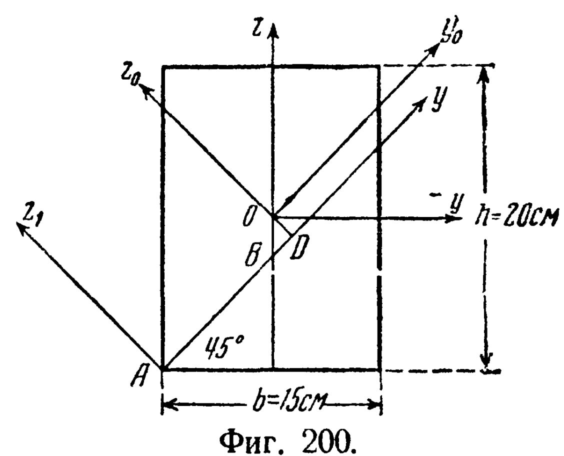
Зная же центральный момент инерции J'_y, можно сейчас же найти момент инерции относительно любой параллельной ей оси y_2, проходящей на расстоянии a (фиг. 199) от центра тяжести по формуле (14.7):

$$J''_y = J'_y + a^2F.$$

Во многих случаях удаётся сразу провести главные оси фигуры; если фигура имеет ось симметрии, то это и будет одна из главных

осей. В самом деле, при выводе формулы $\sigma = \frac{Mz}{J}$ мы уже имели дело с интегралом $\int_F yz\,dF$, представляющим собой центробежный момент инерции сечения относительно осей y и z; было доказано, что если ось Oz является осью симметрии, этот интеграл обращается в нуль.

Стало быть, в данном случае оси Oy и Oz являются *главными* центральными осями инерции сечения. Таким образом, *ось симметрии* — всегда *главная* центральная ось; вторая главная центральная ось проходит через центр тяжести перпендикулярно к оси симметрии.



Фиг. 200.

Пример 56. Найти моменты инерции прямоугольника (фиг. 200) относительно осей y_1 и z_1 и центробежный момент его относительно тех же осей.

Центральные оси y и z как оси симметрии будут главными осями; моменты инерции сечения относительно этих осей равны:

$$J_y = \frac{20^3 \cdot 15}{12} = 10^4\ см^4,\ J_z = \frac{15^3 \cdot 20}{12} = 5625\ см^4.$$

Центральные моменты относительно повёрнутых осей y_0 и z_0 равны:

$$J_y^0 = J_y \cos^2 45^\circ + J_z \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}[10\,000 + 5625] = 7813\ см^4 = J_z^0.$$

Центробежный момент инерции относительно осей y_0 и z_0 равен:

$$J_{yz}^0 = \frac{J_y - J_z}{2}\sin 90^\circ = \frac{10\,000 - 5625}{2} = +2188\ см^4.$$

Координаты центра тяжести прямоугольника относительно осей y_1 и z_1 равны:

$$y_1 = AB + BD = 7{,}5\sqrt{2} + 2{,}5 \cdot 0{,}7 = 12{,}35\ см,$$
$$z_1 = OD = BD = 2{,}5 \cdot 0{,}7 = +1{,}75\ см.$$

Моменты инерции относительно осей y_1 и z_1 равны:

$$J'_y = J_y^0 + Fz_1^2 = 7813 + 300 \cdot 1{,}75^2 = 8734\ см^4,$$
$$J'_z = J_z^0 + Fy_1^2 = 7813 + 300 \cdot 12{,}35^2 = 53\,616\ см^4.$$

Центробежный момент инерции равен:

$$J'_{yz} = J_{yz}^0 + Fy_1z_1 = 2188 + 300 \cdot 1{,}75 \cdot 12{,}35 = +8678\ см^4.$$

§ 85. Наибольшее и наименьшее значения центральных моментов инерции.

Как мы уже знаем, центральные моменты инерции являются *наименьшими* из всех моментов относительно ряда параллельных осей.

Найдём теперь крайние значения (максимум и минимум) для центральных моментов инерции. Возьмём ось y_1 и начнём её вращать, т. е. менять угол α; при этом будет изменяться величина

$$J'_y = J_y \cos^2 \alpha + J_z \sin^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha.$$

Наибольшее и наименьшее значения этого момента инерции соответствуют углу α_1, при котором производная $\frac{dJ'_y}{d\alpha}$ обращается в нуль. Эта производная равна:

$$\frac{dJ'_y}{d\alpha} = -2J_y \cos \alpha \sin \alpha + 2J_z \sin \alpha \cos \alpha - 2J_{yz} \cos 2\alpha.$$

Подставляя в написанное выражение $\alpha = \alpha_1$ и приравнивая его нулю, получаем:

$$(J_z - J_y) \sin 2\alpha_1 - 2J_{yz} \cos 2\alpha_1 = 0;$$

отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2J_{yz}}{J_z - J_y} = \operatorname{tg} 2\alpha_0.$$

Таким образом, осями с *наибольшим и наименьшим* центральными моментами инерции будут *главные* центральные оси. Так как при повороте центральных осей сумма соответствующих моментов инерции не меняется, то

$$J'_y + J'_z = J_y + J_z = J_p.$$

Когда один из центральных моментов инерции достигает *наибольшего* значения, другой оказывается *минимальным*, т. е. если

$$J_{y_0} = J_{\max}, \text{ то } J_{z_0} = J_{\min}.$$

Следовательно, *главные центральные оси инерции — это такие взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр тяжести сечения, относительно которых центробежный момент инерции обращается в нуль, а осевые моменты инерции имеют наибольшее и наименьшее значения.*

В дальнейшем будем обозначать главные оси инерции y и z и главные моменты инерции сечения J_y и J_z. Осью x по-прежнему будет обозначаться ось балки по её длине.

§ 86. Распространение формулы для вычисления нормальных напряжений на случай несимметричного сечения балки.

Пользуясь равенством нулю центробежного момента инерции относительно главных осей, можно показать, что формулы § 78 применимы при известных условиях и к *несимметричным* сечениям.

При выводе формулы для нормальных напряжений (§ 78) введённое нами ограничение, что балка *симметрична* относительно плоскости действия внешних сил xz, понадобилось нам прежде всего для: 1) установления перпендикулярности нейтральной оси y к плоскости zx, 2) доказательства того, что сумма моментов усилий dN относительно оси z равна нулю:

$$\sum M_z = 0, \quad \frac{E}{\rho} \int\limits_F zy\, dF = 0, \quad \int\limits_F zy\, dF = 0. \tag{13.6}$$

Но условия перпендикулярности осей z и y и равенства нулю $\int\limits_F zy\, dF$ могут быть выполнены и для несимметричного сечения балки; для этого достаточно, чтобы ось z, лежащая в плоскости действия сил, и нейтральная ось y были *главными центральными* осями инерции поперечного сечения балки. Тогда и условие *перпендикулярности* соблюдается, и интеграл $\int\limits_F zy\, dF$, как центробежный момент инерции сечения относительно главных осей, снова будет *равен нулю.*

Значит, вместо условия совпадения плоскости внешних сил с плоскостью симметрии сечений балки можно ввести другое: чтобы *плоскость действия внешних сил* совпадала с *одной из двух плоскостей*, содержащих главные оси инерции поперечных сечений. Эти две плоскости в балке называются *главными плоскостями инерции.*

Тогда нейтральной осью будет вторая главная ось, перпендикулярная к плоскости внешних сил, и условие $\int\limits_F zy\, dF = 0$ будет автоматически удовлетворено.

Так как при *всякой форме* поперечного сечения балки мы можем найти главные центральные оси инерции, то для балки *любого поперечного сечения* можно пользоваться выведенными формулами (13.9) и (13.13)

$$\sigma = \frac{Mz}{J} \quad \text{и} \quad \sigma_{max} = \frac{\max M}{W}$$

при условии, что *внешние силы лежат в одной из главных плоскостей инерции балки;* J и W берутся относительно другой главной

оси, перпендикулярной к плоскости действия внешних сил и являющейся нейтральной осью.

Как пример, можно указать балку зетового сечения (фиг. 201) с главными осями z и y. Приведённые выше формулы применимы к ней, если внешние силы будут лежать в плоскости z или y; нейтральной осью в первом случае будет y, во втором z. Так как нейтральные оси сечений и в этом случае перпендикулярны плоскости действия внешних сил, то ось балки при деформации будет оставаться в этой плоскости. Таким образом, *расположение внешних сил в одной из главных плоскостей инерции балки и будет общим случаем плоского изгиба.*

Фиг. 201.

Надо заметить, что в некоторых случаях в балках несимметричного (относительно оси, лежащей в плоскости действия сил) сечения появляется дополнительная система нормальных и касательных напряжений (§ 96), связанная с добавочным кручением балки [1]).

§ 87. Эллипс инерции.

Помимо аналитического, можно дать графическое изображение изменения моментов инерции при помощи построения так называемого *эллипса инерции.*

Введём новую величину — *радиус инерции фигуры относительно какой-либо оси.* Радиусом инерции относительно оси ν называется величина

$$i_\nu = \sqrt{\frac{J_\nu}{F}}, \tag{14.20}$$

где J_ν — момент инерции относительно оси ν, а F — площадь фигуры.

Если J_y и J_z — главные моменты инерции, то

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} \quad \text{и} \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}$$

называются *главными радиусами инерции.*

Построим на главных осях инерции фигуры (оси y и z) эллипс с полуосями i_y и i_z, отложив радиус i_y *перпендикулярно к оси* y и радиус i_z *перпендикулярно к оси* z (фиг. 202). Этот эллипс называется *центральным эллипсом инерции* фигуры; уравнение его будет

$$\frac{y^2}{i_z^2} + \frac{z^2}{i_y^2} = 1,$$

где y и z — координаты точек эллипса.

Если $i_y = i_z = i$, то эллипс инерции обращается в круг инерции с уравнением:

$$y^2 + z^2 = i^2.$$

---

[1]) См. главу XXX, Основы расчёта тонкостенных стержней на кручение и изгиб.

При помощи эллипса инерции можно графически найти радиус инерции i_x для любой оси x, составляющей с главной осью y угол β (фиг. 202), а затем, следовательно, вычислить и момент инерции J_x по формуле

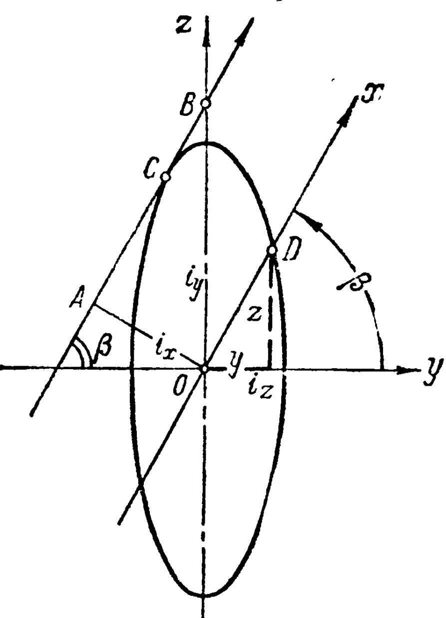
$$J_x = i_x^2 F. \qquad (14.21)$$

Для нахождения радиуса инерции i_x надо провести к эллипсу касательную, параллельную оси x; расстояние от центра эллипса до этой касательной (отрезок OA) и будет радиусом инерции i_x. Действительно, напишем выражение для J_x:

$$J_x = J_y \cos^2\beta + J_z \sin^2\beta.$$

Разделив обе части этой формулы на F, получим зависимость

$$i_x^2 = i_y^2 \cos^2\beta + i_z^2 \sin^2\beta.$$



Фиг. 202.

Теперь напишем уравнение касательной к эллипсу инерции, составляющей с осью y угол β, и вычислим длину перпендикуляра OA, опущенного из центра эллипса на эту касательную. Уравнение эллипса в параметрической форме имеет вид:

$$y = i_z \cos\varphi; \quad z = i_y \sin\varphi.$$

Координаты точки касания C отметим значком c:

$$y_c = i_z \cos\varphi_c; \qquad z_c = i_y \sin\varphi_c.$$

Уравнение касательной напишем в виде

$$z = ay + b.$$

Угловой её коэффициент равен:

$$a = \operatorname{tg}\beta;$$

с другой стороны, из уравнения эллипса

$$a = \left(\frac{dz}{dy}\right)_c = -\frac{i_y}{i_z}\operatorname{ctg}\varphi_c.$$

Ординату b найдём, подставляя в уравнение касательной координаты точки C; после некоторых преобразований, получим:

$$b = \frac{i_y}{\sin\varphi_c} = \frac{\sqrt{i_y^2\cos^2\beta + i_z^2\sin^2\beta}}{\cos\beta}.$$

Квадрат длины перпендикуляра OA, опущенного из центра O на касательную, равен:

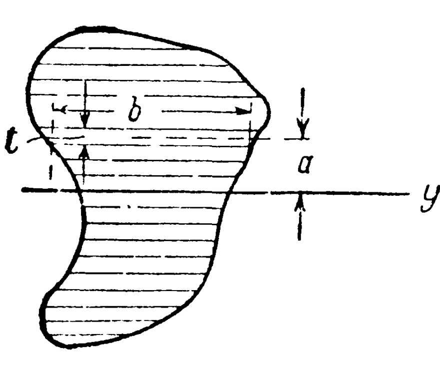
$$\overline{OA}^2 = \frac{b^2}{1+a^2} = \frac{i_y^2\cos^2\beta + i_z^2\sin^2\beta}{\cos^2\beta(1+\operatorname{tg}^2\beta)} = i_y^2\cos^2\beta + i_z^2\sin^2\beta = i_x^2,$$

что мы и хотели доказать.

Кроме указанного графического построения, изображающего зависимость между моментами инерции относительно различных осей, имеется ещё ряд графических приёмов, из которых рассмотрим лишь применение верёвочного многоугольника.

§ 88. Приближённый метод вычисления моментов инерции площади.

В некоторых случаях очертание поперечного сечения оказывается настолько сложным, что его трудно разбить на простые элементы, особенно если это очертание криволинейно. Тогда можно применить следующий приближённый метод вычисления момента инерции этой фигуры относительно какой-нибудь оси y (фиг. 203).



Фиг. 203.

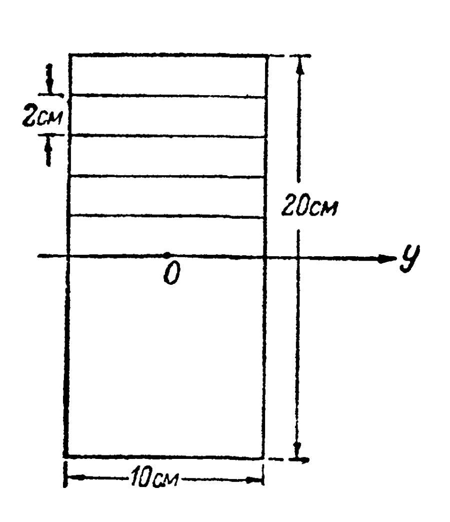
Разделяем фигуру на полоски линиями, параллельными оси y; ширину полосок t выбираем *малой* по сравнению с размерами фигуры. Тогда каждую из этих полосок можно принять за прямоугольник высотой t и переменной шириной b. Момент инерции каждой такой полоски относительно оси y будет равен:

$$\frac{t^3 b}{12} + a^2 tb.$$

Так как мы выбрали высоту полосок t *малой*, то слагаемым $\frac{t^3 b}{12}$ можно пренебречь по сравнению с $a^2 tb$. Тогда полный момент инерции фигуры будет равен:

$$J_y \approx \sum a^2 tb = \sum a^2 dF. \qquad (14.22)$$

Чтобы оценить точность этого метода, вычислим момент инерции относительно центральной оси прямоугольника, изображённого на фиг. 204; прямоугольник взят потому, что для него легко подсчитать точное значение J_y. Так как мы вычисляем момент инерции относительно оси симметрии, то достаточно вычислить момент инерции для верхней половины сечения и результат удвоить. Разделим верхнюю половину площади сечения на 5 полосок высотой по $t = 2$ *см*; ширина всех полосок одинакова. Тогда



Фиг. 204.

$$J_y = 2bt \sum a^2 = 2 \cdot 10 \cdot 2 (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2) = = 6600 \text{ см}^4.$$

Точная величина этого момента инерции равна:

$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = 6667 \text{ см}^4.$$

Разница

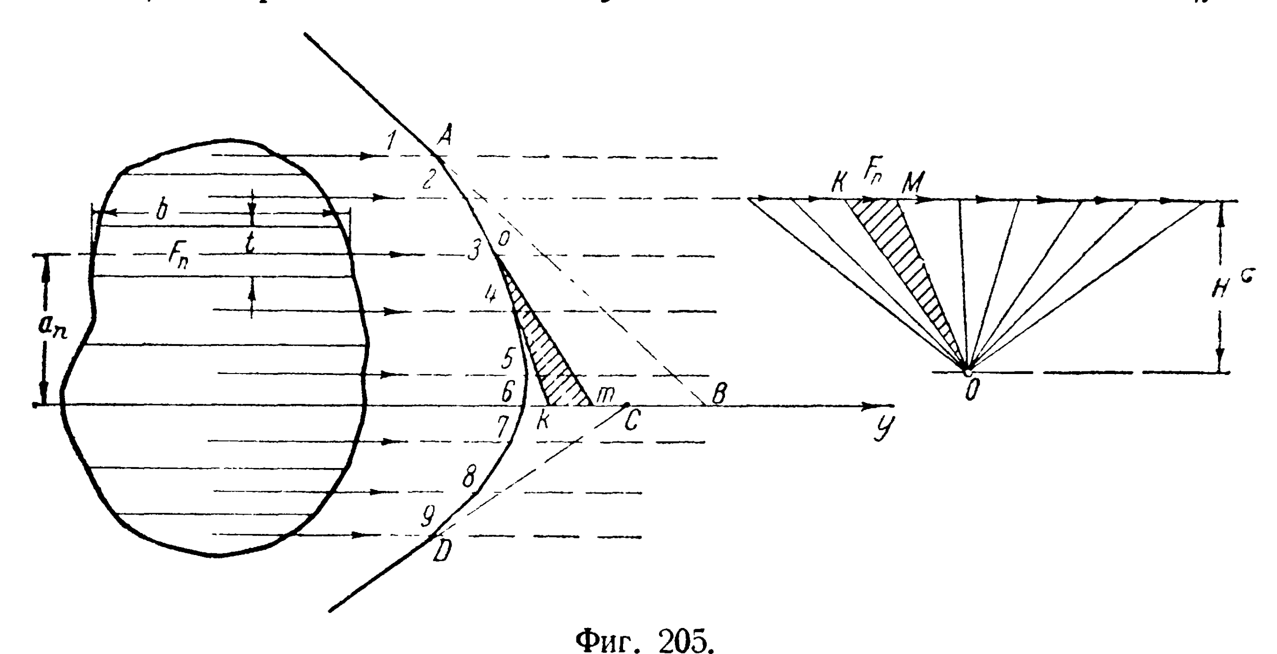
$$\frac{6667 - 6600}{6667} = \frac{67}{6667} \approx 1\%.$$

Мы видим, что даже при таком грубом делении площади на полоски результат получается достаточно точным. В пределе мы и приходим к точному выражению для момента инерции.

При неправильном или криволинейном очертании фигуры кроме числового подсчёта по формуле (14.22) можно применить графический метод — построение верёвочного многоугольника. Начертим (фиг. 205) какую-либо фигуру в линейном масштабе $n/1$, проведём ось y и разделим рассматриваемую площадь на элементарные полоски bt. Приложим в центре тяжести каждой n-й полоски условную (фиктивную) силу F_n, равную по числовой величине площади полоски; направление сил возьмём параллельно оси y.

Построим силовой многоугольник в масштабе $1/f$ с произвольным полюсным расстоянием H, проведём лучи и построим верёвочный многоугольник.

Возьмём в силовом многоугольнике какую-нибудь силу F_n; продолжим стороны верёвочного многоугольника, пересекающиеся на линии этой силы в точке o, до пересечения их с осью y в точках k и m. Расстояние силы F_n до



Фиг. 205.

оси y обозначим a_n. Заштрихованному на верёвочном многоугольнике треугольнику okm соответствует подобный ему треугольник OKM в силовом многоугольнике. Из подобия этих треугольников имеем:

$$\frac{a_n}{H} = \frac{\overline{km}}{F_n}.$$

Произведение средних и крайних даёт нам

$$a_n F_n = \overline{km} \cdot H.$$

Умножим обе части этого равенства на a_n:

$$a_n^2 F_n = a_n \cdot \overline{km} \cdot H.$$

Произведение

$$a_n \cdot \overline{km} = 2 \cdot \frac{1}{2} a_n \cdot \overline{km}$$

равно удвоенной площади заштрихованного треугольника okm.

Таким образом, момент инерции n-й площадки ($F_n = bt$) относительно оси y численно равен площади заштрихованного треугольника okm, умноженной на удвоенное полюсное расстояние H.

Надо помнить, что H входит в силовой многоугольник и, стало быть, выражается, как и силы F_n, в единицах площади. Если проделать эти вычисления для всех сил F_n и просуммировать полученные результаты, то момент инерции фигуры J_y, равный $\sum F_n a_n^2$, будет графически изображаться произведением полюсного расстояния H на удвоенную площадь $ABCDA$, ограниченную верёвочным многоугольником и продолжениями его крайних сторон. Называя величину этой площади ω, имеем формулу:

$$J_y = 2H\omega. \tag{14.23}$$

При вычислениях надо учитывать масштабы. Площадь ω измеряется на чертеже, изображённом в линейном масштабе $n/1$ (*см/см*), а полюсное расстояние H измеряется в масштабе сил $\frac{1}{f}$ (*см/см*^{2}). Поэтому если мы на чертеже измерили площадь $ABCDA$ равной ω *см*^{2}, а полюсное расстояние H *см*, то

$$J_y = 2H\omega f \cdot n^2.$$

Удобно выбирать высоту полосок одинаковой, тогда все F_n будут пропорциональны ширинам полосок. Площадь ω может быть измерена планиметром. Нет нужды гнаться за большим числом полосок; мы видели выше, что достаточная точность получается при сравнительно широких полосках. Надо помнить, что описанный способ основан на пренебрежении собственными центральными моментами инерции полосок.

Применим теперь полученные в этой главе результаты к решению задач по проверке прочности балок с более сложным сечением.

§ 89. Пример расчёта балки несимметричного сечения.

Пример 57. Определить величину допускаемого изгибающего момента для балки, защемлённой одним концом в стену, если пара сил расположена на другом конце в главной плоскости инерции. Размеры сечения в *мм* показаны на фиг. 206. Пролёт балки $l = 0{,}6$ *м*. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 1600$ *кг/см*^{2}.

Прежде всего необходимо найти положение центра тяжести сечения. Для этого выбираем произвольную систему координатных осей y_1z_1; удобно, чтобы вся фигура лежала в положительном квадранте. Расстояния центра тяжести сечения до этих осей найдутся по формулам:

$$y_c = \frac{S'_z}{F} \quad \text{и} \quad z_c = \frac{S'_y}{F},$$

где S'_y и S'_z — статические моменты площади относительно осей y_1 и z_1.

Для подсчёта статических моментов разобьём площадь нашей фигуры на 2 прямоугольника — вертикальный I и горизонтальный II. Площадь фигуры равна $F = 1 \cdot 12 + 7 \cdot 1 = 19{,}0$ *см*^{2}. Статические моменты[1]):

$$S'_z = F_1 y_{1,1} + F_2 y_{1,2} = 12 \cdot 0{,}5 + 7(1 + 3{,}5) = 37{,}5 \text{ см}^3;$$
$$S'_y = F_1 z_{1,1} + F_2 z_{1,2} = 12 \cdot 6{,}0 + 7 \cdot 11{,}5 = 152{,}5 \text{ см}^3.$$

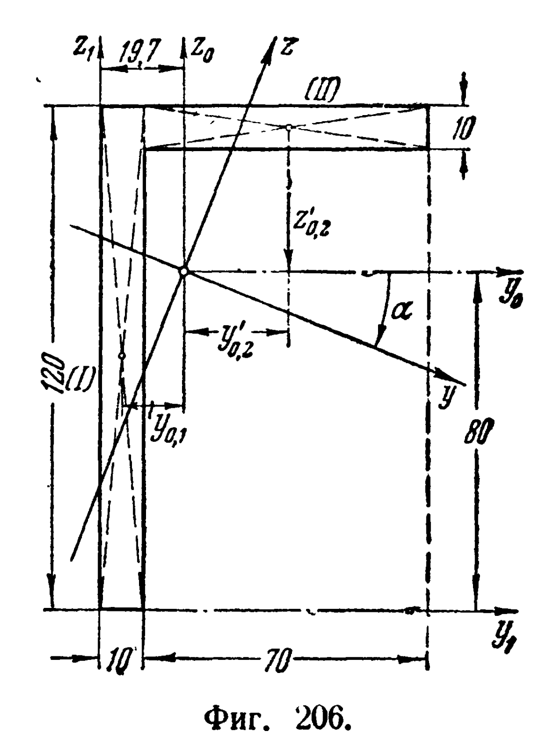
Координаты центра тяжести:

$$y_c = \frac{37{,}5}{19} = 1{,}97 \text{ см} \approx 2{,}0 \text{ см};$$
$$z_c = \frac{152{,}5}{19} = 8{,}00 \text{ см}.$$

---

[1]) Здесь индексы при координатах площадок указывают: первый — ось (y_1; z_1), а второй — номер площадки.

Теперь наметим систему центральных осей y_0 и z_0. Проще всего эти оси направить параллельно сторонам фигуры, что облегчит вычисление моментов инерции площади сечения относительно этих осей.



Фиг. 206.

Моменты инерции отдельных прямоугольников относительно осей y_0 и z_0 вычисляются по формулам перехода к параллельным осям (14.7) и (14.8), а собственные моменты инерции прямоугольников по формулам (14.1).

Вычисления ведём по схеме, показанной в таблице 20 (см. фиг. 206), пользуясь которой можно найти угол наклона главных осей с осью Oy_0:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J^0_{yz}}{J^0_z - J^0_y} = \frac{2 \cdot 97}{100 - 278} = -1{,}09;$$

$$2\alpha'_0 = -47^\circ 40' \text{ и } \alpha'_0 = -23^\circ 50'.$$

Знак минус показывает, что угол α'_0 следует отложить по часовой стрелке:

$$\sin\alpha'_0 = -0{,}404; \quad \cos\alpha'_0 = 0{,}915; \quad \sin 2\alpha'_0 = -0{,}74; \quad \cos 2\alpha'_0 = 0{,}673.$$

Главные моменты инерции будут:

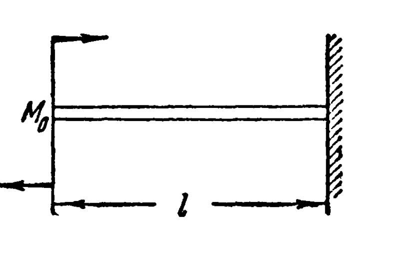
$$J_y = J^0_y \cos^2\alpha_0 + J^0_z \sin^2\alpha_0 - J^0_{yz} \sin 2\alpha_0 =$$
$$= 278 \cdot 0{,}915^2 + 100 \cdot 0{,}404^2 + 97 \cdot 0{,}74 = 320 \text{ см}^4,$$
$$J_z = J^0_y \sin^2\alpha_0 + J^0_z \cos^2\alpha_0 + J^0_{yz} \sin 2\alpha_0 =$$
$$= 278 \cdot 0{,}404^2 + 100 \cdot 0{,}915^2 - 97 \cdot 0{,}74 = 58 \text{ см}^4.$$

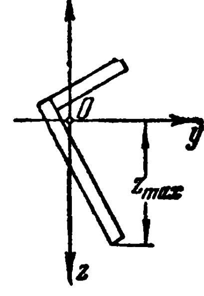
Произведём проверку правильности вычислений:

1) $J_y + J_z = 320 + 58 = 378 \text{ см}^4 = J^0_y + J^0_z = 278 + 100 = 378 \text{ см}^4$,

2) $J_{yz} = \frac{1}{2}(J^0_y - J^0_z)\sin 2\alpha + J^0_{yz}\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}(278 - 100) \cdot 0{,}74 + 97 \cdot 0{,}673 = 0.$

Расчёт показал, что $J_y = J_{max}$, а $J_z = J_{min}$. Следовательно, изгибающую пару выгоднее расположить в плоскости Oz так, чтобы ось Oy была нейтральной осью (фиг. 207).





Фиг. 207.

Теперь найдём момент сопротивления сечения. Для этого необходимо найти расстояние z_{max} от нейтральной оси Oy до наиболее удалённого волокна. Проще всего это сделать графически, вычертив в масштабе сечение и

Таблица 20. **Вычисление моментов инерции.**

Номера частей	Площади частей	Координаты площадок в *см*		Моменты инерции площадей в $см^4$							
				$J_y^0 = \frac{bh^3}{12} + Fz_0^2$			$J_z^0 = \frac{hb^3}{12} + Fy_0^2$			$J_{yz}^0 = Fy_0z_0$	
		y_0	z_0	$\frac{bh^3}{12}$	Fz_0^2	J_y^0	$\frac{hb^3}{12}$	Fy_0^2	J_z^0	$\pm$	J_{yz}^0
1	12	—1,5	—2,0	$\frac{1 \cdot 12^3}{12} = 144$	$12 \cdot 2^2 = 48$	192	$\frac{12 \cdot 1^3}{12} = 1,0$	$12 \cdot 1,5^2 = 27$	28	+	$12 \cdot 1,5 \cdot 2,0 = 36$
2	7	2,5	3,5	$\frac{7 \cdot 1^3}{12} = 0,6$	$7 \cdot 3,5^2 = 85,6$	86	$\frac{1 \cdot 7^3}{12} = 28,6$	$7 \cdot 2,5^2 = 43,8$	72	+	$7 \cdot 2,5 \cdot 3,5 = 61$
Σ	19			144,6	133,6	278	29,6	70,8	100	+	97

изобразив на нём главные оси[1]). Для нашего сечения измеренное расстояние оказалось равным $z_{max} = 8,1$ *см*. Момент сопротивления сечения относительно оси y, следовательно, равен:

$$W_y = \frac{J_y}{z_{max}} = \frac{320}{8,1} = 39,5 \text{ см}^3.$$

Из условия прочности[2]) находим величину допускаемого изгибающего момента

$$\sigma = \frac{\max M}{W_y} \leqslant [\sigma],$$

откуда

$$\max [M] \leqslant [\sigma] \cdot W_y;$$

$$M_0 = \max [M] \leqslant 1600 \cdot 39,5 = 63\,200 \text{ кгсм} \approx 0,63 \text{ тм}.$$

Если пару сил расположить в плоскости Oy, то при расстоянии от оси z до крайнего волокна $y_{max} = 4,12$ *см* момент сопротивления сечения был бы равен $W_z = \frac{J_z}{y_{max}} = \frac{58}{4,12} = 14,1$ *см*³, и мы могли бы безопасно приложить нагрузку в виде пары с моментом:

$$M_1^0 = {}_{\max}[M_1] \leqslant 1600 \cdot 14,1 = 22\,560 \text{ кгсм} \approx 0,226 \text{ тм},$$

что почти втрое меньше, чем при расположении пары в плоскости Oz.

Заметим также, что если пара будет расположена в какой-либо другой, не главной плоскости, например параллельно полке уголка, то и изгиб в этом случае не будет плоским изгибом и условие прочности примет другой вид (§ 157).

§ 90. Примеры.

Пример 58. Найти момент инерции треугольника (фиг. 190, § 80) относительно центральной оси y, параллельной основанию.

Для оси AB, проходящей через основание треугольника, выше было получено (§ 80): $J_{AB} = \frac{bh^3}{12}$.

Применяя формулу перехода для параллельных осей, имеем:

$$J_y^0 = J_{AB} - Fh_2^2 = \frac{bh^2}{12} - \frac{1}{2} bh \cdot \frac{h^2}{9} = \frac{bh^3}{36}.$$

Пример 59. Определить диаметр d оси железнодорожного вагона, представляющей балку с двумя консолями, нагружённую силами $P = 6,25$ *т* на концах консолей (фиг. 150, § 69). Длина пролёта $l = 1,58$ *м*; длина консолей $a = 0,267$ *м*, допускаемое напряжение на изгиб $[\sigma] = 600$ *кг/см*².

[1]) Для аналитического определения z_{max} или y_{max} можно воспользоваться формулами (14.10).

[2]) В примере не учитываются дополнительные нормальные напряжения, возникающие в рассматриваемом случае вследствие стеснённого кручения (см. главу XXX).

Наибольший изгибающий момент равен

$$M_{max}=Pa=6{,}25\cdot 0{,}267=1{,}67\ \textit{тм}.$$

Момент сопротивления сечения $W=\frac{\pi d^3}{32}$. Из условия прочности $W\geqslant\frac{M_{max}}{[\sigma]}$ получаем:

$$d\geqslant\sqrt[3]{\frac{32\,M_{max}}{\pi\,[\sigma]}}=\sqrt[3]{\frac{32\cdot 167\,000}{\pi\cdot 600}}=14{,}2\ \textit{см}.$$

Пример 60. Двутавровая балка № 45 пролётом $l=6$ *м* шарнирно опёрта по концам и несёт равномерно распределённую нагрузку $q=2$ *т/м* (включая и собственный вес).

Какой сосредоточенный груз P можно дополнительно приложить к этой балке на расстоянии $a=\frac{l}{4}$ от левой опоры при допускаемом напряжении $[\sigma]=1400$ *кг/см²*?

Для определения величины добавочного груза P необходимо найти величину наибольшего изгибающего момента в функции от P и q. Сечениями, где $M=M_{max}$, предположительно могут быть: сечение в точке приложения силы P, где изгибающий момент от этого груза достигает максимума; сечение посредине пролёта, где мы имеем M_{max} от распределённой нагрузки, и, наконец, сечение *3—3*, расположенное между первыми двумя.

Опорные реакции будут:

левая $A=\frac{ql}{2}+\frac{P(l-a)}{l}=\frac{ql}{2}+\frac{3}{4}P$,

правая $B=\frac{ql}{2}+\frac{Pa}{l}=\frac{ql}{2}+\frac{P}{4}$.

Изгибающий момент в сечении *1 — 1* под силой

$$M_1=\left(\frac{ql}{2}+\frac{3}{4}P\right)\frac{l}{4}-\frac{ql}{4}\cdot\frac{l}{8}=\frac{3}{32}ql^2+\frac{3}{16}Pl=(6{,}75+1{,}125P)\ \textit{тм}.$$

В сечении *2 — 2* посредине пролёта:

$$M_2=\left(\frac{ql}{2}+\frac{P}{4}\right)\frac{l}{2}-\frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{4}=\frac{ql^2}{8}-\frac{Pl}{8}=(9+0{,}75P)\ \textit{тм}.$$

Для промежуточного сечения *3 — 3*, проведённого в расстоянии x от правой опоры:

$$M_3=\left(\frac{ql}{2}+\frac{P}{4}\right)x-\frac{qx^2}{2}=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}+\frac{P}{4}x.$$

Взяв производную от M_3 по x и приравняв её нулю, найдём абсциссу $x=x_0$ сечения, где $M_3=M_{max}$:

$$\frac{dM_3}{dx}=\frac{ql}{2}-qx_0+\frac{P}{4}=0,\quad \text{откуда}\quad x_0=\frac{l}{2}+\frac{P}{4q}.$$

Подставляя полученное значение x_0 в выражение для M_3, получим:

$$\max M_3=\frac{ql}{2}\left(\frac{l}{2}+\frac{P}{4q}\right)-\frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}+\frac{P}{4q}\right)^2+\frac{P}{4}\left(\frac{l}{2}+\frac{P}{4q}\right)=$$

$$=\left(\frac{l}{2}+\frac{P}{4q}\right)\left(\frac{ql}{2}-\frac{ql}{4}-\frac{P}{8}+\frac{P}{4}\right)=\left(\frac{l}{2}+\frac{P}{4q}\right)\left(\frac{ql}{4}+\frac{P}{8}\right)=\left(3+\frac{P}{8}\right)^2\ \textit{тм}.$$

Величина допускаемого изгибающего момента должна быть:

$$[M] \leqslant [\sigma] \cdot W = 1400 \cdot 1220 = 17{,}1 \cdot 10^5 \textit{ кгсм} = 17{,}1 \textit{ тм}.$$

Приравнивая это значение момента полученным выражениям для M_1, M_2 и M_3, находим три значения силы P:

$$P_1 = \frac{17{,}1 - 6{,}75}{1{,}125} = 9{,}2 \textit{ т}; \quad P_2 = \frac{17{,}1 - 9{,}0}{0{,}75} = 10{,}8 \textit{ т};$$

$$P_3 = (\sqrt{17{,}1} - 3) \cdot 8 = 9{,}1 \textit{ т}.$$

Наименьшее из этих значений и будет допустимым: $P = 9{,}1$ *т*.

Пример 61. Подобрать двутавровое сечение балки на двух опорах пролётом $l=4$ *м*, загруженной равномерно распределённой нагрузкой $q=2$ *т/м* и сосредоточенной силой посредине пролёта $P=5{,}3$ *т* при допускаемом напряжении $[\sigma]=1600$ *кг/см²*.

Вследствие симметрии изгибающий момент будет иметь наибольшее значение посредине пролёта. Величину его найдём по методу сложения действия сил, пользуясь выражениями (12.10′) и (12.11):

$$M_{\max} = M_P + M_q = \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8} =$$

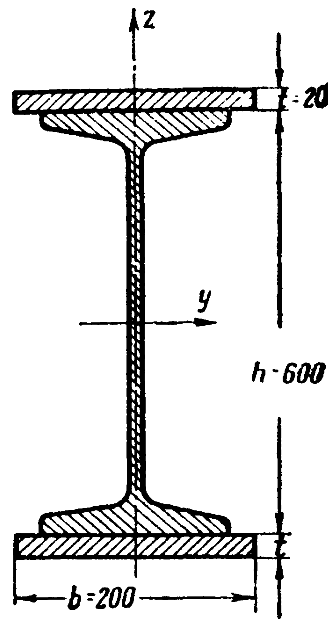
$$= \frac{5{,}3 \cdot 4}{4} + \frac{2 \cdot 4^2}{8} = 9{,}3 \textit{ тм} = 9{,}3 \cdot 10^5 \textit{ кгсм}.$$

Из условия прочности необходимый момент сопротивления сечения балки:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{930000}{1600} = 580 \textit{ см}^3.$$

Ближайший по сортаменту (ГОСТ 8239—56) номер профиля, удовлетворяющий этому условию, двутавр № 33; $W = 597$ *см³* (см. приложение IX, табл. 3).

Пример 62. Какую равномерно распределённую нагрузку можно приложить к мостовой балке пролётом $l = 10$ *м*, свободно лежащей на двух опорах, при допускаемом напряжении $[\sigma] = 1400$ *кг/см²*? Сечение балки состоит из двутавра № 60, усиленного двумя приваренными к нему листами 200×20 *мм* (фиг. 208).



Фиг. 208.

Момент инерции сечения балки относительно нейтральной оси y определяется как сумма моментов инерции двутавра и двух листов полок. Для определения момента инерции полок воспользуемся формулой перехода к параллельным осям; для двутавра — по сортаменту (ГОСТ 8239—56):

$$J_y = J_y^{\text{I}} + 2\left[\frac{bt^3}{12} + bt\left(\frac{h}{2} + \frac{t}{2}\right)^2\right] =$$

$$= 75\,450 + 2\left[\frac{20 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot 2\,(30 + 1)^2\right] = 152\,500 \textit{ см}^4.$$

Момент сопротивления сечения равен:

$$W = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{152\,500}{32} \approx 4770 \textit{ см}^3.$$

Наибольший изгибающий момент $M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$. Из условия прочности

$$\frac{ql^2}{8} \leqslant [\sigma] \cdot W,$$

откуда

$$q \leqslant \frac{8\,[\sigma] \cdot W}{l^2} = \frac{8 \cdot 1400 \cdot 4770}{10^2 \cdot 100^2} \approx 53{,}5 \text{ кг/см} = 5{,}35 \text{ т/м}.$$

Имея в виду, что вес двутавра составляет 104 *кг/см* (см. приложение IX, табл. 3), а двух листов $2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 0{,}00785 = 63$ *кг/м*, получаем собственный вес балки $104 + 63 = 167$ *кг/м*; тогда допускаемая (полезная) нагрузка будет:

$$q = 5350 - 167 = 5183 \text{ кг/м} \approx 5{,}2 \text{ т/м}.$$

Фиг. 209.

Пример 63. Определить момент инерции и момент сопротивления сечения, изображённого на фиг. 209, относительно центральной оси y.

Так как момент инерции представляет собой сумму вида $J_y = \int\limits_F z^2\,dF$, то для вычисления момента инерции можно воспользоваться формулами (14.1) и (14.6):

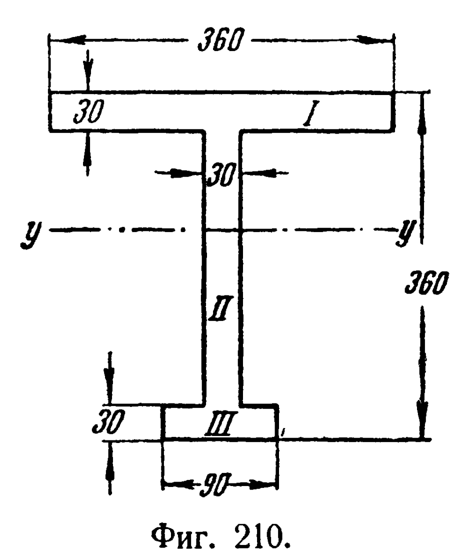
$$J_y = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}.$$



Момент сопротивления сечения:

$$W_y = \frac{J_y}{z_{max}} = \frac{BH^3 - bh^3}{12 \cdot \frac{H}{2}} = \frac{1}{6H}\left[BH^3 - bh^3\right].$$

Обращаем внимание на то, что момент сопротивления подобного сечения нельзя считать как разность вида $W = W_1 - W_2$ или $W = \frac{BH^2}{6} - \frac{bh^2}{6}$, что противоречит самому определению понятия о моменте сопротивления сечения балки, как об отношении $\frac{J}{z_{max}}$.



Фиг. 210.

Пример 64. Определить грузоподъёмность чугунной балки, изображённой на фиг. 210. Допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma] = 300$ *кг/см²*, на сжатие $[\sigma_{сж}] = 800$ *кг/см²*. Допустить, что ограничения, перечисленные в § 77, строго соблюдаются и изгибающий момент действует в плоскости симметрии балки.

Найдём положение центра тяжести сечения. Статический момент относительно края узкой полки равен

$$S_1 = 36 \cdot 3 \cdot 34{,}5 + 30 \cdot 3 \cdot 18 + 9 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 5385 \text{ см}^3.$$

Площадь сечения равна

$$F = 36 \cdot 3 + 30 \cdot 3 + 9 \cdot 3 = 225 \text{ см}^2.$$

Расстояние до центра тяжести от края узкой полки равно

$$z_1 = \frac{S_1}{F} = \frac{5385}{225} = 23{,}9 \text{ см} \approx 24 \text{ см}.$$

Расстояние до центра тяжести от края широкой полки равно

$$z_2 = 36 - 24 = 12 \text{ см}.$$

Момент инерции сечения относительно нейтральной оси *yy* равен сумме моментов инерции трёх прямоугольников, на которые разбита фигура:

$$J_y = \frac{3^3 \cdot 36}{12} + 36 \cdot 3 \cdot 10{,}5^2 + \frac{30^3 \cdot 3}{12} + 30 \cdot 3 \cdot 6^2 + \frac{3^3 \cdot 9}{12} + 3 \cdot 9 \cdot 22{,}5^2 = 35\,640 \text{ см}^4.$$

Моменты сопротивления сечения будут:

для волокон у края узкой полки $W_1 = \frac{35\,640}{24} = 1485 \text{ см}^3$,

» » » » широкой » $W_2 = \frac{35\,640}{12} = 2970 \text{ см}^3$.

Так как центр тяжести расположен ближе к широкой полке, то в её крайних волокнах напряжения будут по абсолютному значению *меньше*, чем в крайних волокнах узкой полки; поэтому сечение должно быть расположено так, чтобы широкая полка чугунной балки была растянута, а узкая сжата. Допустимый изгибающий момент определяется формулами:

$$M_1 = W_1 [\sigma_{сж}] = 1485 \cdot 800 = 1\,120\,000 \text{ кгсм},$$
$$M_2 = W_2 [\sigma] = 2970 \cdot 300 = 891\,000 \text{ кгсм}.$$

Допускаемая грузоподъёмность равна M_2. Чтобы балка имела одинаковую грузоподъёмность по растяжению и сжатию, надо, чтобы расстояния центра тяжести от краёв широкой и узкой полок относились, как $\frac{[\sigma]}{[\sigma_{сж}]} = \frac{3}{8}$, что может быть достигнуто путём изменения размеров сечения, например ширины одной из полок.

ОТДЕЛ V.
ПОЛНАЯ ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ.

ГЛАВА XV.
ВЫЧИСЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ И ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В БАЛКАХ.

§ 91. Касательные напряжения в балке прямоугольного сечения (формула Журавского).

Касательные напряжения при изгибе, уравновешивающие поперечную силу Q, достигают, как мы увидим дальше, более или менее значительной величины в балках, сечение которых имеет форму узкого прямоугольника или составлено из прямоугольников (двутавр). Поэтому мы займёмся в первую очередь вопросом о вычислении касательных напряжений по сечениям, перпендикулярным к оси балки, в том случае, когда эти сечения имеют форму прямоугольника (фиг. 211) высотой h и шириной b.

Пусть на левую отсечённую часть балки действует положительная поперечная сила Q, направленная вверх. Она уравновешивается касательными напряжениями τ, передающимися от правой части и как-то распределёнными по сечению.

Фиг. 211.

Относительно распределения напряжений Журавским (1855 г.) были сделаны следующие предположения:

1) направление всех касательных напряжений параллельно уравновешиваемой ими силе Q;

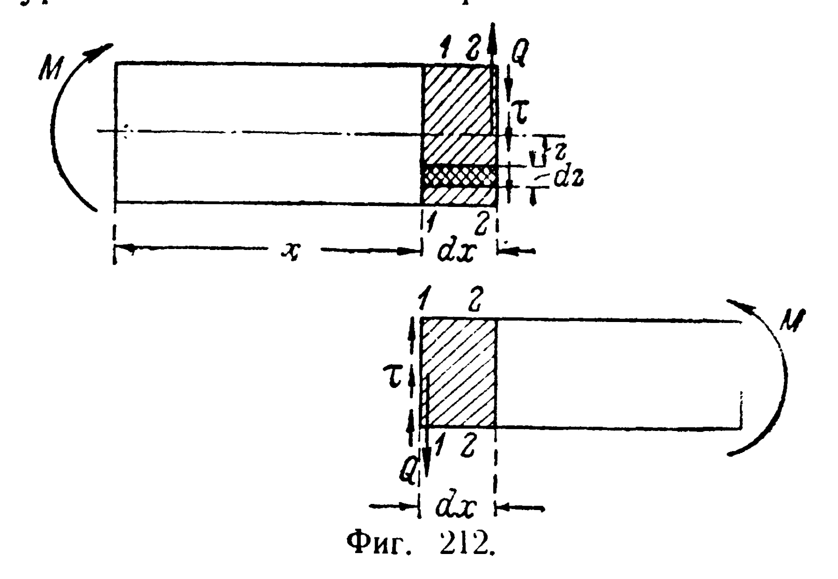
2) касательные напряжения, действующие по площадкам, расположенным на одном и том же расстоянии z от нейтральной оси y, равны между собой.

Как показывает теория упругости, оба указанных предположения оказываются достаточно правильными для балок прямоугольного сечения, если высота балки будет больше её ширины.

Перейдём к вычислению величины и распределения касательных напряжений по поперечному сечению балки.

Возьмём балку прямоугольного сечения, подвергающуюся плоскому изгибу. Проведём какое-нибудь сечение $2—2$ и рассмотрим

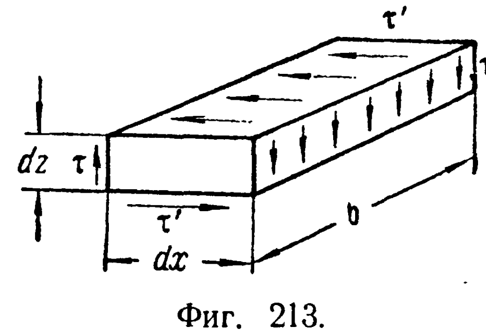
левую часть балки. На неё будут действовать изгибающий момент M и поперечная сила Q, уравновешивающиеся нормальными и касательными напряжениями. Примем, что M и Q положительны (фиг. 212).



Фиг. 212.

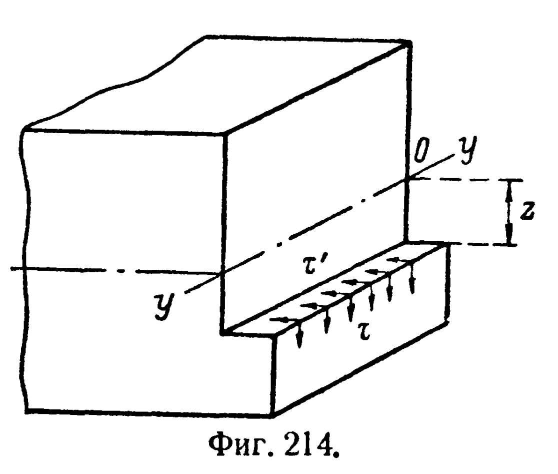
Нормальных напряжений изображать не будем; касательные же напряжения будут направлены по проведённому сечению *вниз*. Проведём очень близкое смежное сечение *1—1* на расстоянии dx от *2—2*. Относя выделенный элемент *1—1—2—2* то к левой, то к правой части балки, получаем, что по сечению *1—1* действуют такие же касательные напряжения τ, как и по сечению *2—2*, но направленные в другую сторону.

Разницей в величине сил Q для сечений *1—1* и *2—2*, которая имеет место при наличии сплошной нагрузки, пренебрегаем по её малости.



Фиг. 213.

По свойству парности касательных напряжений [гл. VII, § 36, формула (7.8)] следует ожидать появления таких же касательных напряжений по площадкам, перпендикулярным к сечениям балки, т. е. *параллельным оси x*. Поэтому, если мы на расстоянии z и $z+dz$ от нейтральной оси проведём два горизонтальных сечения балки и таким образом выделим элемент с рёбрами dz, dx, b (фиг. 213), то на этот элемент будут действовать касательные напряжения τ по вертикальным граням и равные им по величине касательные напряжения τ' по горизонтальным граням.

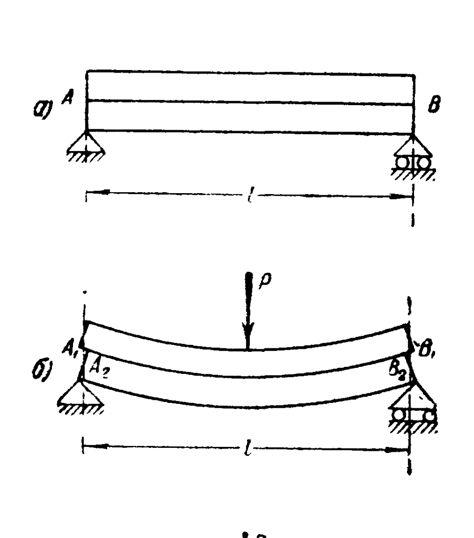


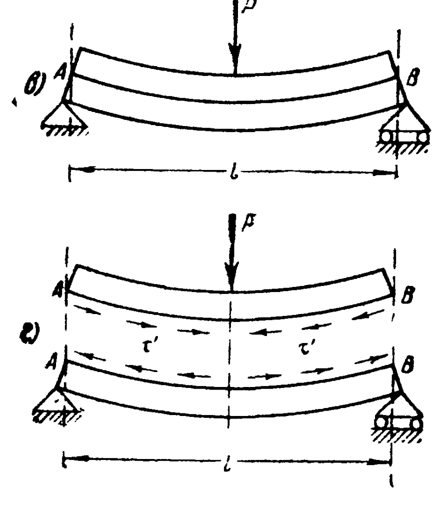
Фиг. 214.

Так как продольные волокна балки при деформации не давят друг на друга, то по сечениям балки, *параллельным* оси, нормальных напряжений не будет, а будут одни касательные τ'. Заменим вычисление касательных напряжений τ по сечению, перпендикулярному к оси, вычислением равных им напряжений τ' по сечению, параллельному оси, взятому на том же уровне (фиг. 214).

На первый взгляд кажется странным появление касательных напряжений по этим (параллельным оси балки) сечениям. Однако сейчас же можно привести пример, поясняющий это явление.

Представим себе балку состоящей из двух одинаковых брусков прямоугольного сечения, положенных друг на друга (фиг. 215, *а*); будем пренебрегать трением между ними. Предположим, что эта балка изгибается хотя бы силой P, приложенной посредине пролёта. Вид балки после искривления в сильно преувеличенном масштабе показан на фиг. 215, *б*. Нижние волокна верхней балки A_1B_1 растянулись, а верхние волокна нижней балки A_2B_2 сократились по сравнению со своей первоначальной длиной AB.





Если же балка является цельным бруском, то она изогнётся так, как показано на фиг. 215, *в*. Волокна AB окажутся в нейтральном слое и не изменят своей длины.

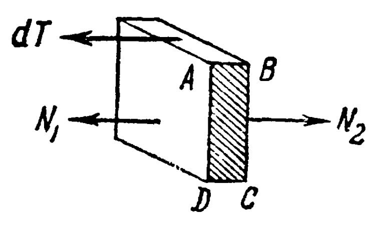
Фиг. 215.

Фиг. 216.

Следовательно, при изгибе цельной балки по нейтральной плоскости от верхней половины балки на нижнюю, и обратно, будут передаваться касательные напряжения $\tau' = \tau$, удерживающие верхнюю и нижнюю половины балки от сдвига по нейтральному слою (фиг. 215, *г*).

Изобразим на фиг. 216 нижнюю часть фасада балки прямоугольного сечения, испытывающей плоский изгиб. Проведём два очень близких сечения *1—1* и *2—2* на расстоянии dx друг от друга. Проведём ещё горизонтальное сечение на расстоянии z от нейтрального слоя.

Таким образом из балки выделится элемент $ABCD$ размерами dx, $\frac{h}{2}-z$ и b. Вид этого элемента в аксонометрической проекции показан на фиг. 217. Пусть изгибающий момент в сечении $1-1$ равен M, а в смежном сечении $2-2$ равен $M+dM$. Тогда по боковым граням элемента будут действовать нормальные напряжения σ — слева меньшие, справа бо́льшие. По горизонтальному сечению будут действовать касательные напряжения τ'.



Фиг. 217.

Касательные напряжения τ по сечениям $1-1$ и $2-2$ в условие равновесия выделенного элемента не войдут, так как мы используем равенство нулю суммы проекций всех сил на ось балки; поэтому мы их на чертеже и не изображаем.

Для составления уравнений равновесия вычислим все силы, действующие на наш элемент, параллельные оси балки. Элементарное касательное усилие dT по площадке $b\,dx$ будет равно

$$dT=\tau\cdot b\cdot dx.$$

Нормальные напряжения, действующие по боковой бесконечно малой площадке dF на уровне z_1 от нейтральной оси, будут равны:

$$\sigma=\frac{Mz_1}{J}.$$

Усилие dN_1, приходящееся на эту площадку, будет равно:

$$dN_1=\frac{Mz_1}{J}\,dF.$$

На всю боковую грань AD будет действовать сила N_1 (фиг. 217):

$$N_1=\int\limits_{F_1}\frac{Mz_1}{J}\,dF=\frac{M}{J}\int\limits_{F_1}z_1\,dF.$$

Интеграл $\int\limits_{F_1}z_1\,dF$ представляет собой *статический момент относительно нейтральной оси* y части площади сечения $GFAD$, расположенной от уровня z до края балки (фиг. 218). Обозначим его $S(z)$. Знак z показывает, что $S(z)$ меняется в зависимости от того, на каком расстоянии z от нейтральной оси мы вычисляем напряжение τ. Таким образом,

$$N_1=\frac{MS(z)}{J_y}. \qquad (15.1)$$

Аналогично на грань BC нашего элемента действует сила

$$N_2=\frac{(M+dM)\,S(z)}{J_y}. \qquad (15.2)$$

Разность нормальных усилий

$$N_2 - N_1 = \frac{dM \cdot S(z)}{J_y}$$

уравновешивается при проектировании на ось Ox (фиг. 217) касательным усилием dT. Отсюда

$$\tau = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S(z)}{J_y b}.$$

Но $\frac{dM}{dx} = Q$, поэтому

$$\tau = \frac{QS(z)}{J_y b}, \tag{15.3}$$

а значит, этой же формулой выражается и касательное напряжение на уровне z по сечению, перпендикулярному к оси балки.

Выведем формулу $S(z)$ для случая балки прямоугольного сечения (фиг. 218) высотой h и шириной b. Статический момент площади $GFAD$ относительно оси O_1O_1 будет равен величине этой площади, умноженной на расстояние z_k от её центра тяжести до оси O_1O_1. Площадь $GFAD$ равна

$$b\left(\frac{h}{2} - z\right);$$

расстояние z_k равно

$$z_k = \left(\frac{h}{2} - \frac{\frac{h}{2} - z}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right).$$

Тогда

$$S(z) = b\left(\frac{h}{2} - z\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right) = \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right). \tag{15.4}$$

Фиг. 218.

При вычислении статического момента части площади сечения безразлично, брать ли ту часть площади сечения, что расположена ниже уровня z, или бо́льшую, так как по абсолютному значению оба статических момента будут равны. Берут обычно статический момент той части площади, вычисление которого более просто. Так как для прямоугольника $J_y = \frac{bh^3}{12}$, то формула (15.3) принимает вид:

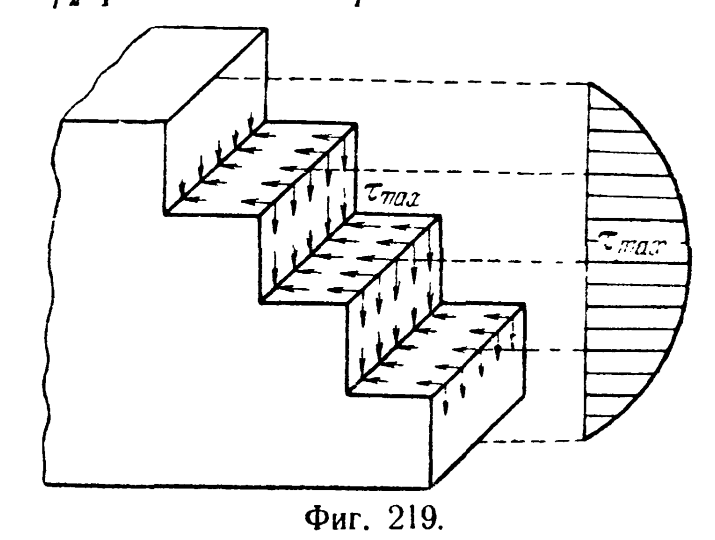
$$\tau = \frac{Qbh^2 \cdot 12}{bbh^3 \cdot 8}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right). \tag{15.5}$$

Таким образом, величина касательного напряжения τ меняется по высоте прямоугольного сечения по закону *параболы*. У верхнего и нижнего краёв сечения при $z = \pm h/2$ касательное напряжение τ обращается в нуль, что находится в строгом соответствии с законом парности касательных напряжений. Максимума оно достигает в точках

на нейтральной оси (там, где нормальное напряжение равно нулю) при $z=0$ и притом в сечении, где $Q(x)=Q_{max}$:

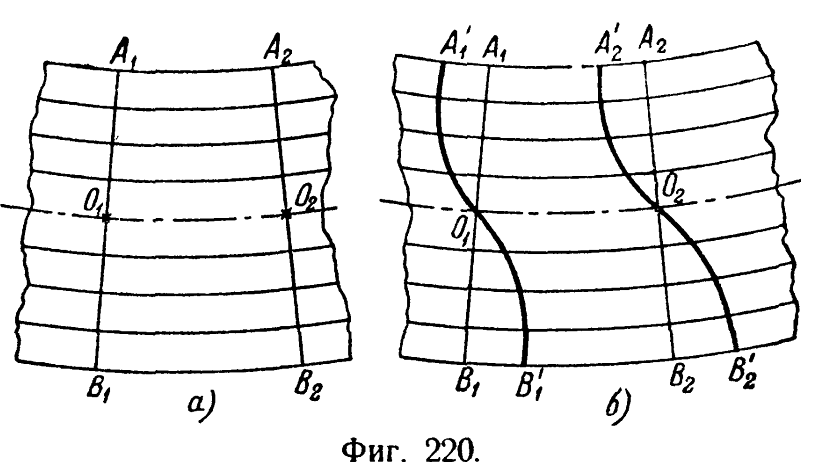
$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\cdot\frac{Q_{max}}{bh}. \tag{15.6}$$

Таким образом, *наибольшее* касательное напряжение при прямоугольном сечении будет в $1^1/_2$ раза больше *среднего* значения этого напряжения. На фиг. 219 изображена картина распределения касательных напряжений при положительной поперечной силе.



Фиг. 219.

Наличие касательных напряжений в балке несколько искажает принятую нами раньше схему деформации балки. Мы считали, что под действием изгибающих моментов поперечные сечения, оставаясь плоскими, поворачиваются (фиг. 220, *а*). Под действием касательных напряжений элементы материала между двумя сечениями перекашиваются; этот перекос, в соответствии с изменением величины касательных напряжений, возрастает от краёв балки к нейтральной оси.



Фиг. 220.

Поэтому сечения искривляются (фиг. 220, *б*). Однако это искривление почти не отражается на продольных деформациях волокон, что позволяет пользоваться формулой $\sigma=\frac{Mz}{J}$ и при наличии поперечной силы.

Поэтому кроме проверки прочности материала по наибольшим нормальным напряжениям (13.15)

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W}\leqslant[\sigma]$$

производится проверка прочности материала и по наибольшим касательным напряжениям

$$\tau_{max}=\frac{Q_{max}S_{max}}{J_y b}\leqslant[\tau]. \tag{15.7}$$

Значения допускаемого напряжения $[\tau]$ были даны выше.

Для того чтобы получить представление о *порядке* величины τ в балках прямоугольного сечения, рассмотрим числовой пример.

Найдём наибольшие нормальные и касательные напряжения для балки прямоугольного сечения при следующих данных: балка лежит на двух опорах и по всей длине $l=4$ *м* несёт равномерную нагрузку при $q=1{,}2$ *т/м*; $M_{max}=2{,}4$ *тм*; $Q_{max}=2{,}4$ *т*; $h=27$ *см*; $b=18$ *см*; $[\sigma]=110$ *кг/см*²; $[\tau]=22$ *кг/см*².

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W}=\frac{240\,000\cdot 6}{18\cdot 27^2}=109{,}5\ кг/см^2<110\ кг/см^2;$$

$$\tau_{max}=\frac{3Q_{max}}{2bh}=\frac{3\cdot 2400}{2\cdot 27\cdot 18}=7{,}5\ кг/см^2<22\ кг/см^2.$$

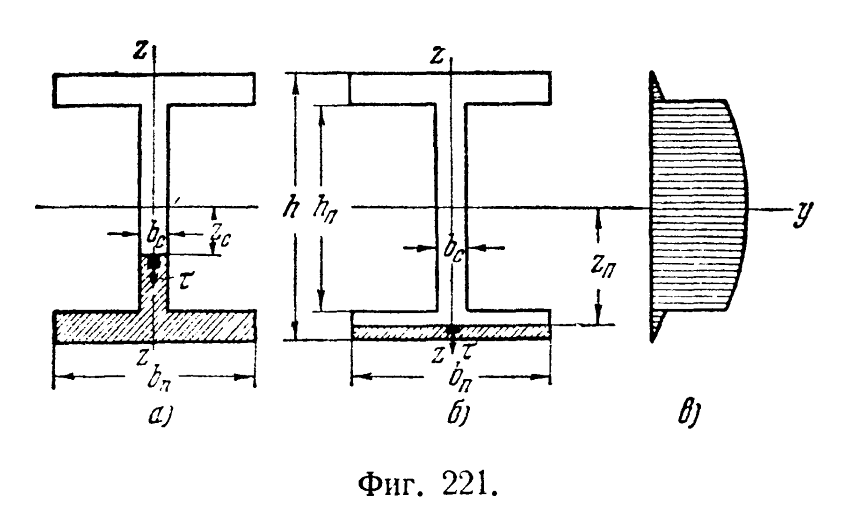
Балка прямоугольного сечения, подобранная при нормальных напряжениях, равных допускаемым, имеет большое недонапряжение по касательным.

Однако на практике может встретиться и обратное явление; оно имеет место в случае, когда при большой поперечной силе изгибающий момент невелик. В этих случаях и при прямоугольном сечении величина касательных напряжений может оказаться решающей для определения размеров балки.

Формула касательных напряжений в балке прямоугольного сечения впервые была выведена русским инженером Д. И. Журавским при проектировании[1]) им деревянных мостов для железной дороги Петербург — Москва в 1855 г. Журавский воспользовался несколько иным и более трудным приёмом для получения этой формулы, не применяя зависимости $\frac{dM}{dx}=Q$, с которой иногда совершенно напрасно связывают имя Шведлера.

§ 92. Касательные напряжения в балке двутаврового сечения.

Так как сечения двутавровых и тавровых балок можно рассматривать как составленные из прямоугольников, то с известным приближением можно распространить на них теорию, изложенную в предыдущем параграфе. Таким образом, касательные напряжения в точке на расстоянии z от нейтральной оси для двутаврового сечения (фиг. 221) выражаются также формулой



Фиг. 221.

$$\tau=\frac{QS(z)}{J_y b(z)}.\qquad(15.3)$$

Здесь $S(z)$ — попрежнему статический момент относительно нейтральной оси y части площади сечения между уровнем z и краем балки. Что касается величины $b(z)$ — ширины сечения, то ей в дан-

[1]) Д. И. Журавский, О мостах раскосной системы Гау, часть II, приложение III. Замечания относительно сопротивления бруса, подверженного силе, нормальной к его длине, стр. 130.

ном случае приписан значок z; это означает, что в знаменатель формулы (15.3) следует подставлять ширину сечения на уровне z. Как видно из вывода формулы (15.3), величина b входила множителем в слагаемое $\tau' b\, dx$, т. е. была поперечным размером площадки, по которой действовало напряжение τ'; таким образом, величина b была шириной балки на уровне z. Поэтому при применении формулы (15.3) к двутавровому сечению следует, вычисляя касательные напряжения на уровне $z_п$ (фиг. 221, *б*), т. е. на площадках, попадающих в пределы полки, подставлять в знаменатель ширину пояса $b_п$. В этом случае формула (15.3) принимает вид:

$$\tau_п = \frac{Qh^2}{8J_y}\left(1 - \frac{4z_п^2}{h^2}\right). \tag{15.8}$$

При вычислении же касательных напряжений на уровне $z_с$, т. е. на площадках, находящихся в пределах стенки, надо вместо b_z подставлять толщину стенки $b_с$. Формула тоже видоизменится: придётся брать статический момент двух прямоугольников (штриховка на фиг. 221, *а*). Если произвести вычисления, то получим:

$$\tau_с = \frac{Q}{8b_с J_y}\left[b_п h^2\left(1 - \frac{h_п^2}{h^2}\right) + b_с h_п^2\left(1 - \frac{4z_с^2}{h_п^2}\right)\right]. \tag{15.9}$$

В обоих случаях τ меняется по параболической кривой.

Так как для двутаврового сечения толщина стенки обычно бывает незначительной, то в этом профиле касательные напряжения достигают довольно большой величины, и поэтому проверка их всегда является необходимой.

В месте перехода от полки (пояса) к стенке ширина b_z меняется скачком; в знаменатель формулы (15.9) можем подставить значения и $b_п$ и $b_с$. Для величины касательного напряжения мы на этом уровне получаем два значения. График распределения напряжений по оси стенки $z - z$ получает вид, изображённый на фиг. 221, *в* и 222, *а*.

Надо помнить, что это результат подсчётов, сделанных в предположении, что формула (15.3) применима и к вычислению напряжений у места перехода от пояса к стенке. На самом деле резкое изменение ширины сечения вызывает местное перераспределение напряжений.

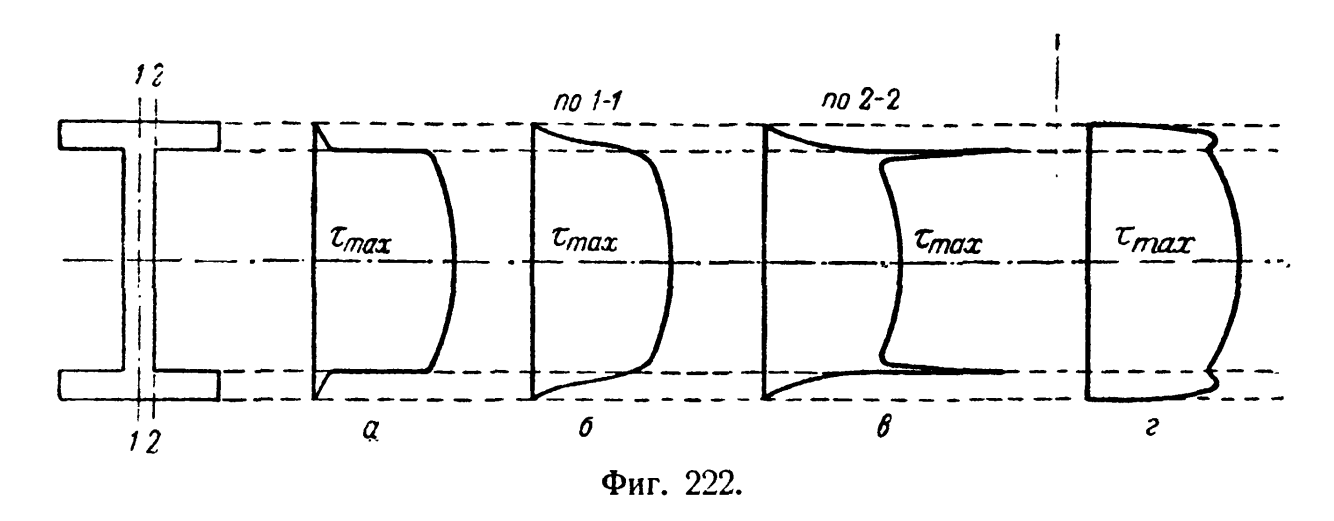
Более точные исследования показывают, что по линии, совпадающей с осью симметрии сечения, распределение касательных напряжений будет с достаточной точностью изображаться графиком фиг. 222, *б*; по линии же *2—2*, проходящей у самого края стенки, — кривой, показанной на фиг. 222, *в*; последний график показывает, что в точках у входящих углов сечения касательные напряжения теоретически достигают очень большой величины; на практике эти входящие углы скругляются, напряжения падают и их распределение в точках линии *2—2* примерно представляется кривой фиг. 222, *г*. Наибольшая ордината графиков фиг. 222, *а*, *б* и *г* примерно одинакова и относится к точкам на нейтральной оси.

Внесённые поправки не изменяют двух основных следствий, вытекающих из графика фиг. 222, *а*, а именно:

1) наибольшее касательное напряжение будет в точках нейтральной оси;

2) бо́льшая часть поперечной силы уравновешивается касательными напряжениями в стенке.

Поэтому пользование *условным* графиком (фиг. 222, а) допустимо. Надо лишь помнить, что он не даёт правильного представления о распределении



Фиг. 222.

касательных напряжений как вблизи места перехода от полок к стенке, так и в пределах самих полок.

Результаты исследования распределения напряжений в двутавровом сечении позволяют высказать следующее заключение о работе различных элементов этого профиля.

Пояса балки, или полки, попадают в область наибольших нормальных напряжений; так как их ширина большая, а толщина незначительна, они всей своей площадью воспринимают нормальные напряжения, близкие к наибольшим; таким образом, они берут на себя главную долю сопротивления сечения изгибающему моменту. Касательные напряжения в них очень малы, а потому пояса принимают на себя сравнительно небольшую часть поперечной силы.

Наоборот, на долю стенки приходится малая часть сопротивления изгибающему моменту, так как её наибольший размер расположен по высоте, а по мере приближения к нейтральной оси нормальные напряжения быстро падают. С другой стороны, величина $S(z)$ для различных значений z в пределах стенки меняется слабо (средняя часть кривой на фиг. 222, *а*), а ширина $b_с$ мала. Поэтому касательные напряжения по всей высоте стенки обычно достаточно велики, и почти вся поперечная сила ими и уравновешивается.

Таким образом, в двутавровом сечении пояса работают главным образом на уравновешивание изгибающего момента, а стенка — поперечной силы.

Проверим на касательные напряжения балку, испытывающую действие поперечной силы $Q = 2{,}4$ *т*, приняв $[\tau] = 1000$ *кг/см²*. Профиль двутавра № 18 в схематизированном виде показан на фиг. 223. Момент инерции $J_y = 1290$ *см⁴*.

Найдём касательные напряжения в точках на уровне 1, 2, 3. Статические моменты равны:

$$S_2 = 9 \cdot 0{,}81 \cdot 8{,}595 = 62{,}6 \text{ см}^3,$$

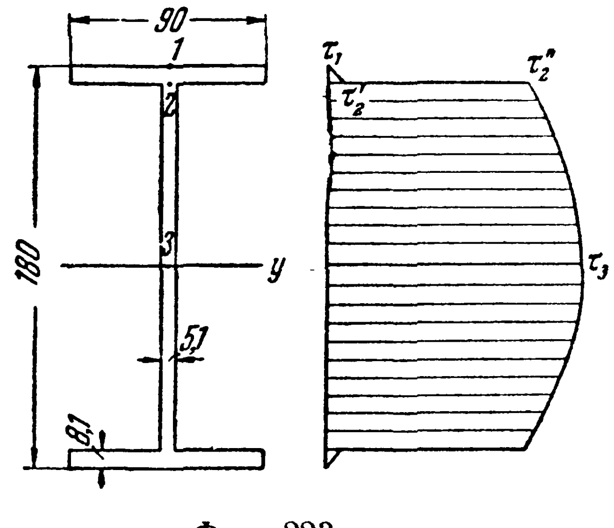
$$S_3 = 62{,}6 + 0{,}51 \cdot 8{,}19 \cdot 4{,}095 = 79{,}7 \text{ см}^3.$$

Касательные напряжения равны:

$$\tau_1 = 0, \qquad \tau_2' = \frac{2400 \cdot 62{,}6}{1290 \cdot 9} = 12{,}9 \text{ кг/см}^2,$$

$$\tau_2'' = \frac{2400 \cdot 62{,}6}{1290 \cdot 0{,}51} = 226 \text{ кг/см}^2, \qquad \tau_3 = \frac{2400 \cdot 79{,}7}{1290 \cdot 0{,}05} = 292 \text{ кг/см}^2.$$

Условный график распределения касательных напряжений показан на фиг. 223. Как видно, наибольшее касательное напряжение значительно ниже допускаемого. Это произошло потому, что мы взяли прокатный профиль, у которого стенка сделана достаточно толстой. Как мы увидим дальше, для составных балок, клёпаных и сварных, можно добиться значительно большего использования материала стенки. Определим ту долю поперечной силы, которая соответственно условной эпюре воспринята стенкой. Умножим ординаты эпюры касательных напряжений на площадь стенки двутавра $Q_c = 226 \cdot 0{,}51 \cdot 16{,}38 + (292 - 226) \cdot 0{,}51 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16{,}38 = 1890 + 368 = 2258$ *кг*, что составляет 94% от всей силы Q.



Фиг. 223.

Приведённый в настоящем параграфе способ определения касательных напряжений для двутавра может быть применён и к другим подобным сечениям (полый прямоугольник, тавр и др.).

§ 93. Касательные напряжения в балках круглого профиля и пустотелых.

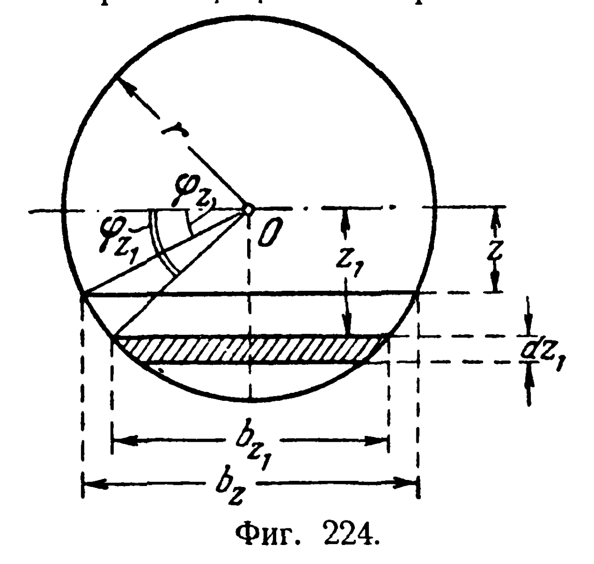
Принимая ранее сделанное для прямоугольного сечения предположение, что касательные напряжения постоянны по ширине профиля и параллельны поперечной силе, что для круга не вполне справедливо, можем пользоваться формулой (15.3):

$$\tau = \frac{QS(z)}{J_y b(z)}, \qquad (15.3)$$

которая определит ту составляющую касательного напряжения, которая параллельна Q.

Здесь $S(z)$ будет по-прежнему статическим моментом части площади от уровня z до края и будет выражаться формулой (фиг. 224)

$$S(z) = \int_F z_1\, dF = \int_F z_1 b(z_1) \cdot dz_1.$$



Фиг. 224.

Для вычисления $S(z)$ лучше ввести новую переменную — угол φ_{z1}; r — радиус сечения. Тогда

$$z = r \cdot \sin \varphi_z; \quad z_1 = r \cdot \sin \varphi_{z1}; \quad b(z_1) = 2r \cos \varphi_{z1};$$
$$dz_1 = r \cos \varphi_{z1} \cdot d\varphi_{z1}; \quad b(z) = 2r \cos \varphi_z.$$

Ограничим свою задачу нахождением величины τ_{max}:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_{max}}{J_y \cdot b}, \tag{15.7}$$

$$S_{max} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2r \cos\varphi_{z1} \cdot r \sin\varphi_{z1} \cdot r \cos\varphi_{z1} \cdot d\varphi_{z1} =$$

$$= \frac{2r^3}{3} \left| -\cos^3\varphi_{z1} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2r^3}{3}. \tag{15.10}$$

Так как $J = \frac{\pi r^4}{4}$ и $b_{z=0} = d = 2r$, то получаем:

$$\tau_{max} = \frac{Q \cdot 2r^3 \cdot 4}{3 \cdot 2r \cdot \pi r^4} = \frac{4Q}{3\pi r^2}.$$

Таким образом, для круглого сечения

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2}, \tag{15.11}$$

т. е. τ_{max} в $1^1/_3$ раза больше среднего значения τ.

Так как уже для прямоугольного сечения, где τ_{max} в $1^1/_2$ раза больше среднего значения, проверка по касательным напряжениям часто бывает излишней, то тем более это относится к круглому сечению. Надо отметить, однако, что для балок трубчатого сечения касательные напряжения могут достигнуть более значительной величины.

Пример 65. Определить наибольшие касательные напряжения в чугунной трубе наружным диаметром $d = 10$ *см* с толщиной стенок $t = 1$ *см*; $Q_{max} = 2$ *т*.

Наибольшее касательное напряжение имеет место в точках нейтральной плоскости и будет выражаться формулой

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{max}}{J_y \cdot b}; \tag{15.7}$$

здесь J_y — момент инерции трубчатого сечения; S_{max} — статический момент полукольца; $b = 2t$ — удвоенная толщина стенок трубы

$$J_y = \frac{\pi}{4}\left[\left(r_0 + \frac{t}{2}\right)^4 - \left(r_0 - \frac{t}{2}\right)^4\right] = \pi r_0^3 t \left(1 + \frac{t^2}{4r_0^2}\right) \approx \pi r_0^3 t,$$

где r_0 — средний радиус трубы.

Статический момент полукольца будет равен разности статических моментов относительно диаметра наружного и внутреннего полукругов; формула статического момента для полукруга:

$$S(z) = \frac{2r^3}{3}. \tag{15.10}$$

Искомый статический момент полукольца равен

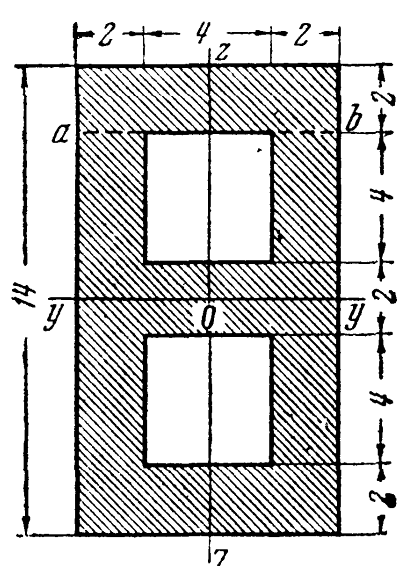
$$S_{max} = \frac{2}{3}\left[\left(r_0 + \frac{t}{2}\right)^3 - \left(r_0 - \frac{t}{2}\right)^3\right] = 2r_0^2 t\left[1 + \frac{t^2}{12r_0^2}\right] \approx 2r_0^2 t.$$

Таким образом,

$$\tau_{max}=\frac{Q\cdot 2r_0^2t}{2t\cdot \pi r_0^3t}=\frac{Q}{\pi r_0 t}=\frac{2Q}{\pi d_0 t}.$$

Наибольшее касательное напряжение для кольцевого сечения в два раза больше среднего; напомним, что для прямоугольника это соотношение равно 1,5, а для сплошного круга 1,33;

$$\tau_{max}=\frac{2\cdot 2000}{\pi\cdot 9\cdot 1}=141{,}4\ кг/см^2.$$



Фиг. 225.

Пример 66. Определить для уровня ab нормальные и касательные напряжения в балке пустотелого профиля, загружённой в проверяемом сечении изгибающим моментом $M=1{,}2$ *тм* и поперечной силой $Q=4$ *т*. Плоскость действия M и Q — xOz. Форма поперечного сечения балки представлена на фиг. 225.

Момент инерции сечения

$$J_y=\frac{8\cdot 14^3}{12}-\frac{4\cdot 10^3}{12}+\frac{4\cdot 2^3}{12}=$$
$$=\frac{4\cdot 2^3}{12}(2\cdot 7^3-5^3+1)=1500\ см^4.$$

Статический момент части сечения, лежащей выше уровня ab, где можно ожидать значительных нормальных и касательных напряжений (при $z=5$ *см*), равен

$$S(z)=2\cdot 8(5+1)=96\ см^3.$$

Ширину сечения $b(z)$ следует принять равной сумме толщин двух стенок

$$b(z)=2+2=4\ см.$$

Напряжения по уровню ab будут:

$$\sigma=\frac{Mz}{J_y}=\frac{120\,000\cdot 5}{1500}=400\ кг/см^2,$$
$$\tau=\frac{QS(z)}{J_yb(z)}=\frac{4000\cdot 96}{1500\cdot 4}=64\ кг/см^2.$$

§ 94. Проверка прочности по главным напряжениям.

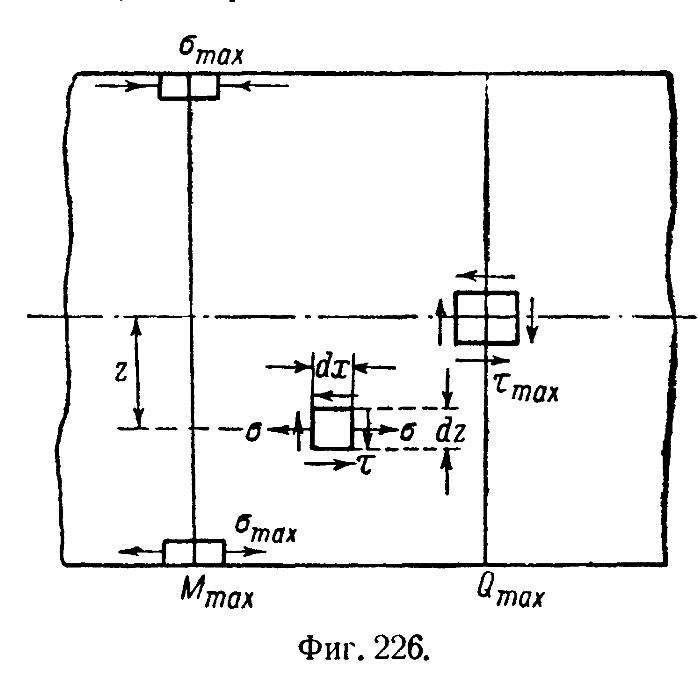
В предыдущем изложении были введены две проверки прочности материала балки при изгибе — по нормальным (13.15) и касательным (15.7) напряжениям:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W}\leqslant[\sigma], \qquad (13.15)$$

$$\tau_{max}=\frac{Q_{max}S_{max}}{J_yb(z)}\leqslant[\tau]. \qquad (15.7)$$

Выясним, прочность каких элементов балки мы проверяем по этим формулам.

На фиг. 226 показана часть фасада изучаемой балки в том месте, где расположены сечения с наибольшим изгибающим моментом и наибольшей поперечной силой. На чертеже изображены элементы, прочность которых мы проверяем по условиям (13.15), (15.7). Первое относится к элементам, расположенным у верхнего и нижнего краёв сечения с M_{max}. Эти элементы подвергаются простому растяжению или сжатию. Второе условие прочности (15.7) относится к элементу, расположенному у нейтрального слоя в сечении с Q_{max}, — этот элемент испытывает чистый сдвиг.

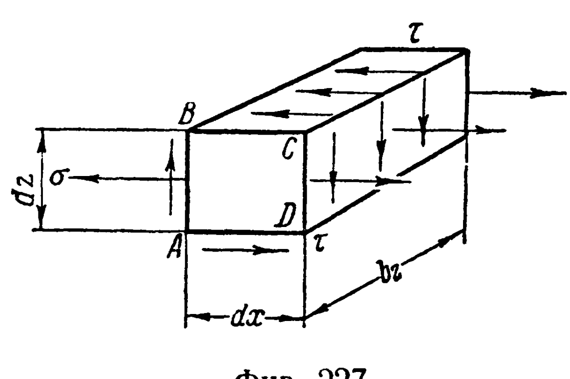


Фиг. 226.

Таким образом, производя принятую в обычной практике расчёта проверку прочности по наибольшим нормальным и касательным напряжениям, мы на самом деле проверяем прочность материала балки лишь в трёх указанных на фиг. 226 элементах.

Нет никакой уверенности, вообще говоря, в том, что эти три элемента находятся *в наиболее опасном* состоянии. Поэтому мы должны научиться проверять прочность каждого элемента балки, взятого в любом сечении на любом расстоянии z от нейтральной оси. Только тогда мы сумеем среди этих элементов разыскать наиболее напряжённый и сможем проверить его прочность.

Возьмём какой-нибудь элемент материала (фиг. 226) в произвольном сечении на расстоянии z от нейтрального слоя. На этот элемент будут действовать нормальное напряжение σ по граням, перпендикулярным к оси балки, и касательные напряжения τ по всем четырём боковым граням. Фасадные грани элемента будут свободны от напряжений (фиг. 227).



Фиг. 227.

Напряжения σ и τ выразятся следующими формулами:

$$\sigma = \frac{Mz}{J}, \quad \tau = \frac{QS(z)}{Jb}, \quad (15.12)$$

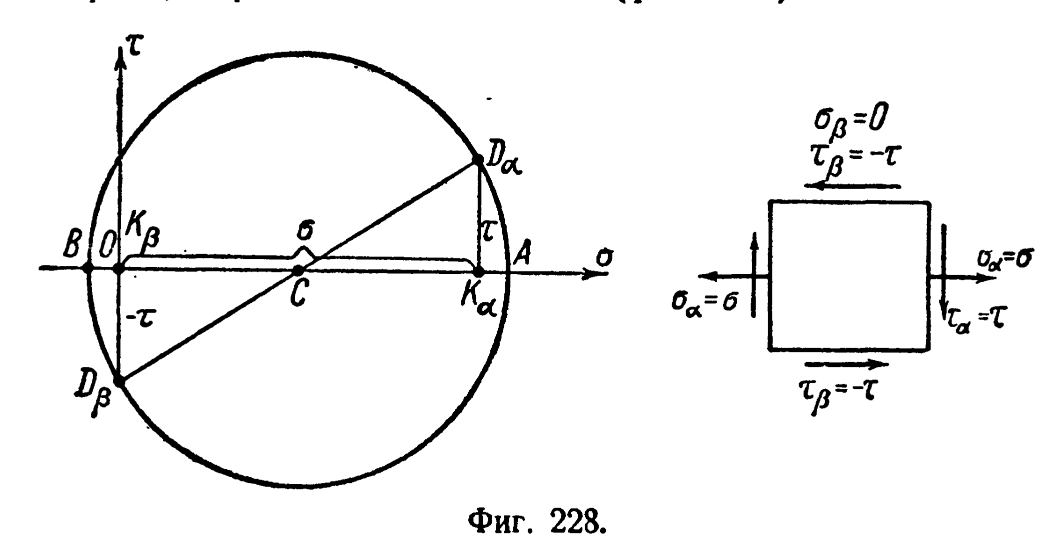
где M — изгибающий момент и Q — поперечная сила в том сечении, где мы выделили элемент.

Возьмём случай, когда σ и τ положительны. Так как этот элемент подвергается сложному напряжённому состоянию, то для его

проверки придётся применить теории прочности; вычисления надо начать с нахождения главных напряжений.

Так как по фасадной грани $ABCD$ элемента (фиг. 227) и по параллельным ей не действуют касательные напряжения, то это будет одна из главных площадок; так как по ней отсутствуют и нормальные напряжения, то соответствующее ей главное напряжение равно нулю. Таким образом, мы имеем дело с *плоским* напряжённым состоянием.

Нам теперь нужно найти оставшиеся два главных напряжения, зная нормальные и касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам, параллельным и перпендикулярным к оси балки (фиг. 226). Подобную задачу мы уже решали в § 38 путём построения круга напряжений. Там этот приём был применён к более общему случаю напряжённого состояния, когда по двум взаимно перпендикулярным площадкам с нормалями α и β действовали напряжения σ_α, σ_β, τ_α, $\tau_\beta = -\tau_\alpha$. Условимся теперь относить значок α к грани нашего элемента, перпендикулярной к оси балки, а β — к грани, параллельной этой оси (фиг. 228).



Фиг. 228.

Отложим от точки O в положительном направлении величину $\sigma_\alpha = \sigma$ — отрезок OK_α; на перпендикуляре к оси σ в точке K_α отложим вверх отрезок $K_\alpha D_\alpha$, равный τ. Точка D_α лежит на круге напряжений, соответствует площадке, перпендикулярной к оси балки.

Для площадки, параллельной оси балки, $\sigma_\beta = 0$; значит, точка K_β совпадает с точкой O. Отрезок $K_\beta D_\beta$, отложенный вниз, изобразит касательное напряжение $\tau_\beta = -\tau$ и даст вторую точку круга D_β. Соединяя их, получаем центр круга — точку C — и радиусы CD_α и CD_β. Построение круга даёт нам отрезки OA и OB, изображающие искомые главные напряжения. Из чертежа ясно, что эти напряжения — разных знаков. Поэтому нумерация главных напряжений должна быть выбрана такой:

$$\sigma_1 = \overline{OA} > 0; \qquad \sigma_2 = 0; \qquad \sigma_3 = \overline{OB} < 0.$$

Пользуясь данными в § 38 формулами (7.13), получим:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{1}{2}[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}];$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{1}{2}[\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}];$$

$$\sigma_2 = 0.$$

Формулы для σ_1 и σ_3 могут быть сведены в одну:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]. \qquad (15.13)$$

Построение и вычисление мы провели, когда и σ и τ положительны. При отрицательном значении того или иного из этих напряжений следует изменить его знак в формулах (15.13). Соответственное изменение построений пришлось бы сделать и при графическом определении σ_1 и σ_3 с помощью круга напряжений.

Имея величину всех трёх главных напряжений, мы можем составить расчётные условия по всем теориям прочности.

По первой теории — наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma_1 \leqslant [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma_{r1} = \frac{1}{2}[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leqslant [\sigma]. \qquad (15.14)$$

По второй теории — наибольших относительных удлинений:

$$[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leqslant [\sigma].$$

Подставляя значения σ_1, σ_2, σ_3, находим:

$$\left[\frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) - \frac{1}{2}\mu(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})\right] \leqslant [\sigma].$$

Принимая $\mu = 0{,}3$, получаем:

$$\sigma_{r2} = [0{,}35\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leqslant [\sigma]. \qquad (15.15)$$

По третьей теории — наибольших касательных напряжений:

$$[\sigma_1 - \sigma_3] \leqslant [\sigma], \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leqslant [\sigma];$$

окончательно

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant [\sigma]. \qquad (15.16)$$

Наконец, по четвёртой теории — наибольшей потенциальной энергии изменения формы:

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leqslant 2[\sigma]^2,$$

откуда

$$\frac{1}{4}[(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})^2 + (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})^2 + (2\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})^2] \leqslant 2[\sigma]^2.$$

После преобразований получаем:

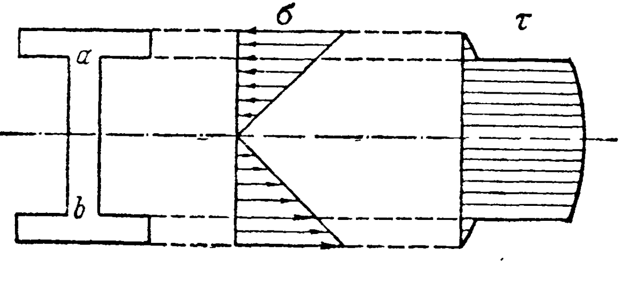
$$[\sigma^2 + 3\tau^2] \leqslant [\sigma]^2, \qquad \sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqslant [\sigma]. \qquad (15.17)$$

Теперь надо выяснить, *в каких точках балки* следует производить проверку прочности на главные напряжения.

Так как расчётное напряжение σ_r зависит и от σ и от τ, то проверке подлежит тот элемент материала балки, для которого σ и τ будут *одновременно* возможно бо́льшими; это осуществимо при наличии, скажем, двух таких условий:

1) изгибающий момент и поперечная сила достигают наибольшей величины в одном и том же сечении;

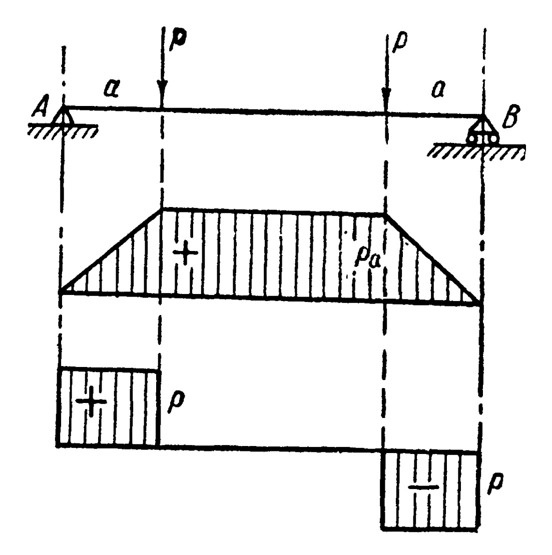
2) ширина балки резко меняется вблизи краёв сечения (например, в двутавре или пустотелом прямоугольном профиле); эпюры напряжений для таких профилей (фиг. 229) показывают, что на уровне перехода от полки к стенке (точки a и b) касательные и нормальные напряжения имеют величину, *близкую к максимальной*.



Фиг. 229.

Указанные два условия, таким образом, определяют и необходимость дополнительной проверки прочности, и тот элемент, для которого эта проверка должна быть сделана; может случиться, что эти условия не имеют места; тогда ограничиваются выбором нескольких точек, могущих дать наиболее высокие значения σ_r. Что же касается выбора расчётной формулы, то наиболее правильным было бы применить теорию наибольшей потенциальной энергии (15.17).

На практике, однако, при расчёте балок до сих пор сохранилось применение теории наибольших нормальных напряжений (15.14), дающей часто более экономичные размеры.



Фиг. 230.

Пример 67. Балка AB (фиг. 230), лежащая на двух опорах, нагружена симметрично расположенными силами $P = 6{,}4$ *т*, отстоящими от опор на $a = 50$ *см*; допускаемое напряжение $[\sigma] = 1400$ *кг/см²*. Подобрать двутавровое сечение и проверить прочность материала у места перехода от полки к стенке.

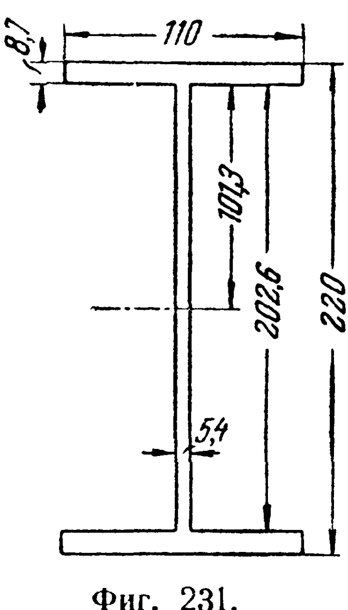
Наибольшие значения M и Q будут в одном сечении — под грузом:

$$M_{max} = Pa = 0{,}5 \cdot 6{,}4 = 3{,}2 \ \textit{тм},$$
$$Q_{max} = P = 6{,}4 \ \textit{т}.$$

Подбираем сечение:

$$W=\frac{M_{\max}}{[\sigma]}=\frac{320\,000}{1400}=229\ см^3.$$

Надо взять двутавровую балку № 22; $W=232$ *см*³; $J=2550$ *см*⁴. Размеры поперечного сечения балки показаны схематично на фиг. 231. При выбранном профиле



Фиг. 231.

$$\sigma_{\max}=\frac{320\,000}{232}=1380\ кг/см^2.$$

Дополнительная проверка прочности должна быть сделана при $z=10{,}13$ *см*.

$$\sigma=\frac{320\,000\cdot 10{,}13}{2550}=1271\ кг/см^2.$$

Статический момент равен

$$S(z)=11\cdot 0{,}87\cdot 10{,}565=101\ см^3.$$

Касательные напряжения

$$\tau=\frac{6400\cdot 101}{0{,}54\cdot 2550}=469\ кг/см^2.$$

Условие прочности по первой теории прочности (15.14):

$$\frac{1}{2}\left[1271+\sqrt{1271^2+4\cdot 469^2}\right]=1426\ кг/см^2>1400\ кг/см^2.$$

Условие прочности по четвёртой теории прочности (15.17):

$$\sqrt{1271^2+3\cdot 469^2}=1510\ кг/см^2>1400\ кг/см^2.$$

Так как расчётные напряжения по четвёртой теории прочности на 8% превышают допускаемые напряжения, размер сечения следует увеличить, приняв двутавр № 22а. Для этого профиля после пересчёта получим: $\sigma_{\max}=1260$ *кг/см*² и при $z=10{,}11$ *см* $\sigma=1158$ *кг/см*² и $\tau=482$ *кг/см*². Расчётные напряжения: по первой теории прочности $\sigma_{r_1}=1329$ *кг/см*² и по четвёртой теории прочности $\sigma_{r_4}=1423$ *кг/см*².

§ 95. Направления главных напряжений.

В предыдущем параграфе мы определили лишь величину главных напряжений для произвольно взятого элемента балки и не интересовались их направлением. С точки зрения проверки прочности материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, полученных результатов было достаточно. Для таких же материалов, как железобетон, крайне существенно знать *направления* растягивающих напряжений в каждой точке, чтобы в этом направлении расположить стержни арматуры.

Определение положения главных напряжений может быть сделано при помощи круга напряжений (фиг. 232). Пусть в рассматриваемом

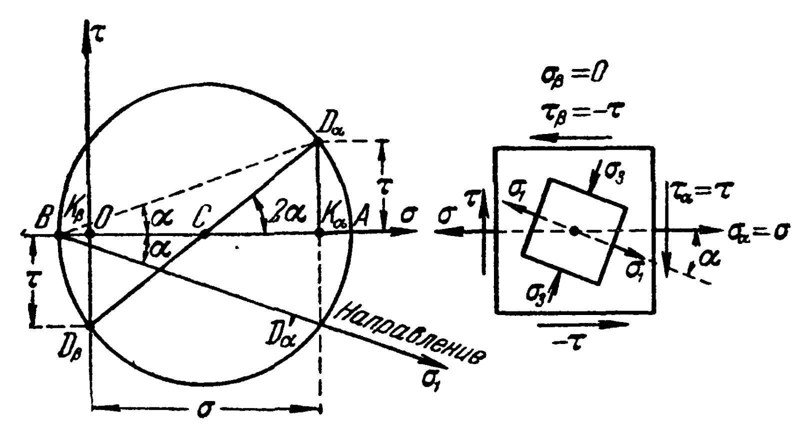
случае σ_α и τ_α по сечению, *перпендикулярному* к оси балки, будут положительны:

$$\sigma_\alpha = +\sigma = \frac{Mz}{J}$$

и

$$\tau_\alpha = +\tau = \frac{QS(z)}{Jb(z)}.$$

Строим круг; взаимное расположение линий действия напряжений σ_α и наибольшего (алгебраически) главного напряжения σ_1 совпадает с относительным расположением на чертеже круга напряжений линии BD_α и оси абсцисс, составляющих между собой угол α (фиг. 232).

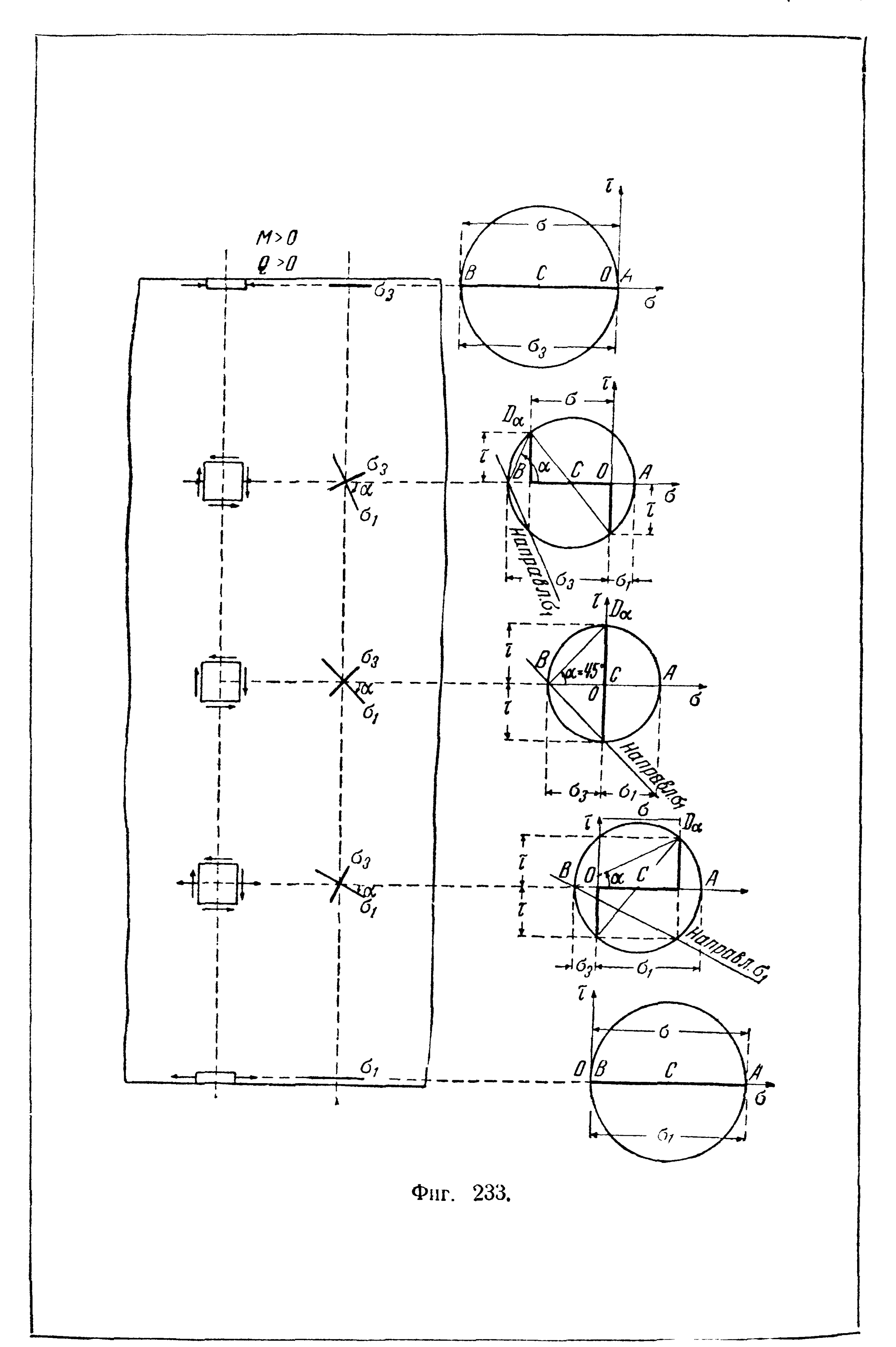


Фиг. 232.

Чтобы на чертеже элемента построить линию действия σ_1, надо от направления σ_α отложить угол α *по часовой стрелке.* При перемещении выбранного элемента в пределах сечения направление главных напряжений меняется. У краёв балки одно из главных напряжений нуль, а другое направлено параллельно оси балки, у нейтрального слоя главные напряжения составляют углы 45° с осью балки.

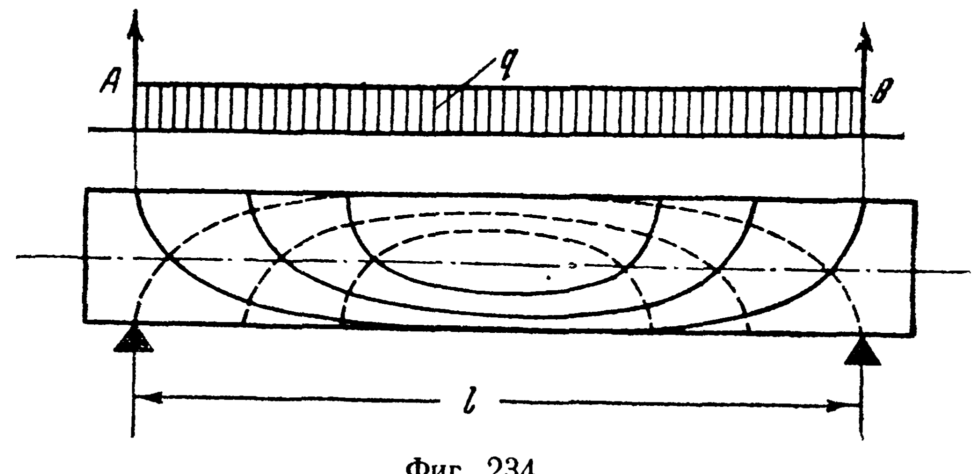
На фиг. 233 изображены круги напряжений и направления главных напряжений в различных точках сечения. Направление сжимающих напряжений показано на фасаде балки жирными линиями, растягивающих — тонкими. Принято, что изгибающий момент и поперечная сила в сечении положительны.

Получив направление главных напряжений в какой-либо точке проведённого сечения, продолжаем направление одного из них до пересечения с соседним сечением. В полученной точке определяем новое направление рассматриваемого главного напряжения и продолжаем его до пересечения со следующим сечением. Поступая таким образом, получим ломаную линию, которая в пределе обратится в кривую, касательная к которой совпадает с направлением рассматриваемого главного напряжения в точке касания. Эта кривая называется *траекторией главного напряжения.* Направление траекторий главных напряжений зависит от вида нагрузки и от условий



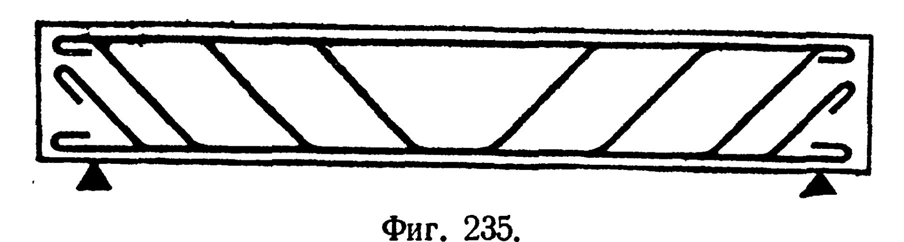
Фиг. 233.

опирания балки. Через каждую точку балки можно провести две траектории главных напряжений — растягивающих и сжимающих (фиг. 234). Для сжимающих напряжений траектории показаны пунктиром, для растягивающих — сплошной линией.



Фиг. 234.

В железобетонных балках надо располагать арматуру так, чтобы она шла примерно в направлении траекторий главных растягивающих напряжений. Для примера на фиг. 235 показано расположение арматуры в простой балке.



Фиг. 235.

Пример 68. Балка прямоугольного сечения высотой $h = 160$ *мм* и шириной $b = 80$ *мм*, пролётом $l = 0{,}80$ *м* нагружена силой $P = 2$ *т* посредине пролёта. Найти величину и направление главных напряжений в точке на расстоянии $z = 2$ *см* вверх от нейтрального слоя в сечении на расстоянии $x_0 = 0{,}3$ *м* от левой опоры.

Реакции балки A и B равны 1000 *кг*; изгибающий момент во взятом сечении равен $M = Ax_0 = 1000 \cdot 30 = 30\,000$ *кгсм*. Поперечная сила $Q = 1000$ *кг*.

Момент инерции сечения

$$J = \frac{16^3 \cdot 8}{12} = 2730 \text{ см}^4.$$

Статический момент части сечения выше уровня z равен (фиг. 236, *а*)

$$S_z = 8 \cdot 6 \cdot 5 = 240 \text{ см}^3.$$

Нормальное напряжение в рассматриваемой точке равно

$$\sigma = -\frac{Mz}{J} = -\frac{30\,000 \cdot 2}{2730} = -22 \text{ кг/см}^2.$$

Касательное напряжение равно

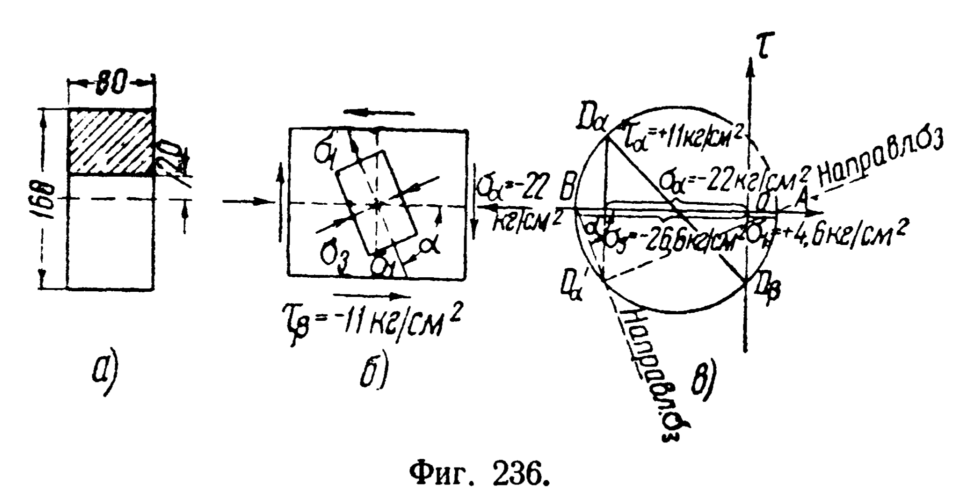
$$\tau = \frac{QS(z)}{Jb} = +\frac{1000 \cdot 240}{2730 \cdot 8} = +11 \text{ кг/см}^2.$$

Главные напряжения равны:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right]=\frac{1}{2}\left[-22\pm\sqrt{22^2+4\cdot 11^2}\right]=$$

$$=\left\{\begin{matrix}+\ 4{,}6\\ -26{,}6\end{matrix}\right\}\ \textit{кг/см}^2.$$

Для определения направления главных напряжений изобразим выделенный у рассматриваемой точки элемент материала и построим круг напряжений.



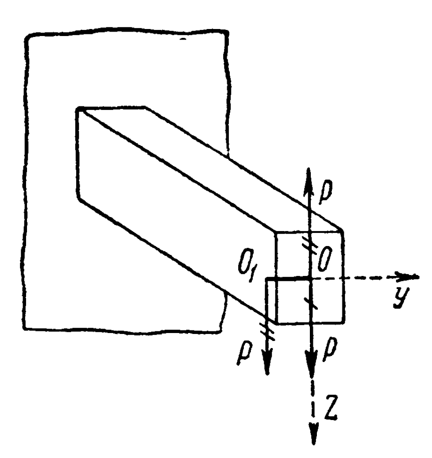
Фиг. 236.

На фиг. 236, *в* линия BD'_α соответствует направлению напряжения σ_1. Величина угла α определяется формулой

$$|\operatorname{tg}\alpha|=\left|\frac{D_\alpha K}{BK}\right|=\frac{11}{26{,}6-22}=\frac{11}{4{,}6}=2{,}392;\quad |\alpha|=67°15'.$$

§ 96. Центр изгиба.

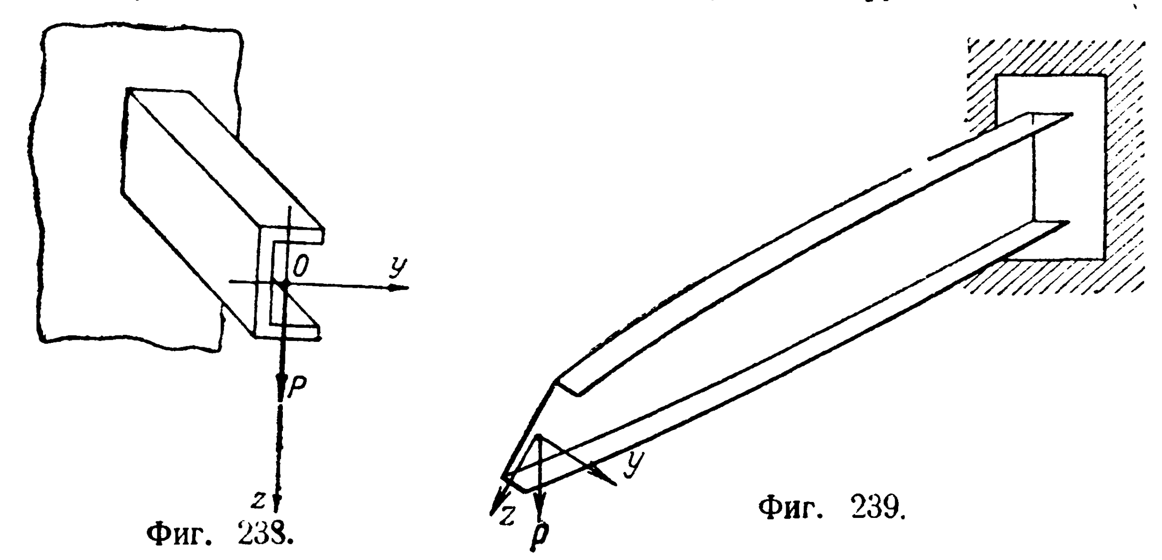
При изучении случая *плоского* изгиба балок мы предполагали, что все внешние силы лежат в одной из главных плоскостей инерции балки. Возьмём балку, имеющую *симметричное* сечение (например, прямоугольник), и посмотрим, что будет, если мы нагрузим её силами, лежащими в плоскости, параллельной главной плоскости симметрии (фиг. 237). Пусть для этой балки сила P будет приложена к концу стержня O_1O, лежащего в плоскости торца балки и с ним скреплённого. Прикладывая в центре тяжести торцевого сечения O две равные и прямо противоположные силы P, мы видим, что балка будет изгибаться в плоскости главной оси Oz силой P, однажды перечеркнутой на чертеже, и скручиваться парой сил с моментом $P\cdot\overline{O_1O}$. Здесь мы будем иметь случай совместного действия плоского изгиба и кручения. Для того чтобы избежать кручения, которому балка такого сечения, как вытянутый прямоугольник, сопротивляется плохо, в рассматриваемом случае необходимо приложить силу P в точке O, в плоскости симметрии сечения Oz. Опыт показывает, что, действительно, при загрузке балки *симметричного* сечения силами в плоскости симметрии кручения не происходит; балка испытывает *плоский* изгиб.



Фиг. 237.

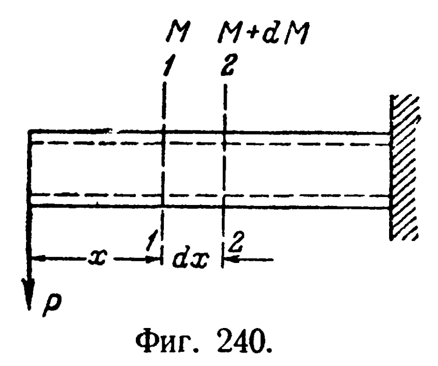
Несколько иначе будет обстоять дело, если мы нагрузим балку сосредоточенной силой в плоскости главной оси, *не являющейся осью симметрии.*

Пример такой нагрузки для балки швеллерного (корытного) сечения изображён на фиг. 238. Опыт показывает, что хотя сила P лежит в главной плоскости Oz, однако балка не только изгибается, но и скручивается (фиг. 239).



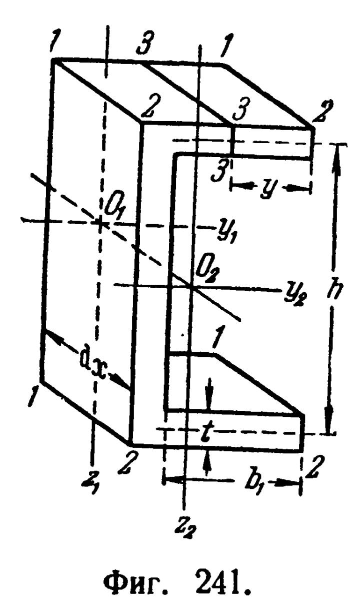
Фиг. 238. Фиг. 239.

Наблюдающееся на опыте явление не только изгиба, но и скручивания показывает, что при этой нагрузке касательные напряжения, вызванные изгибом, складываются в равнодействующую Q, уже не лежащую в плоскости xOz, а ей параллельную. Значит, при изгибе рассматриваемой балки помимо напряжений $\tau = \frac{QS(z)}{J_y b(z)}$ возникают ещё какие-то касательные напряжения. Выясним величину и распределение этих напряжений.

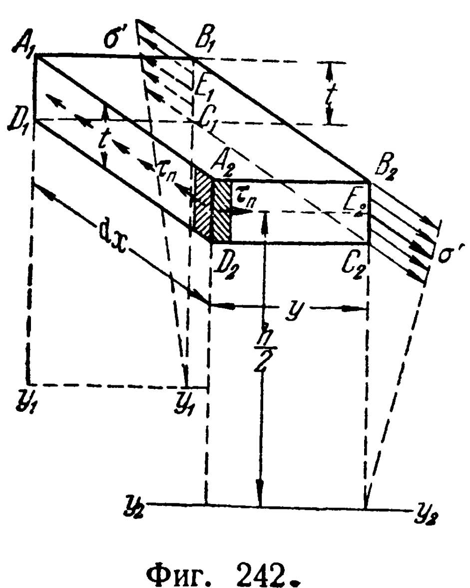


Фиг. 240.

Рассмотрим балку корытного сечения, закреплённую одним концом и расположенную так, что стенка её вертикальна. Нагрузим её на другом конце вертикальной же силой P (фиг. 240), расположенной в главной центральной плоскости сечения. Выделим из этой балки сечениями *1—1* и *2—2* элемент длиной dx. Он изображён на фиг. 241, там же показаны размеры поперечного сечения. Отрежем



Фиг. 241.



Фиг. 242.

сечением *3—3*, параллельным оси балки, часть верхней полки этого швеллера и рассмотрим равновесие отрезанной части. Она изображена на фиг. 242.

По граням $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ этого элемента действуют нормальные напряжения σ, в нашем случае растягивающие; величина их зависит от изгибающих моментов M и $M+dM$ в сечениях $1-1$ и $2-2$. Сумма N_2 нормальных усилий по площади $A_2B_2C_2D_2$ больше суммы N_1, действующей по площади $A_1B_1C_1D_1$; поэтому для равновесия выделенного элемента полки должны возникнуть касательные напряжения τ_n по площади $D_1A_1A_2D_2$. Сумма напряжений τ_n должна уравновешивать разность нормальных усилий, т. е.

$$\tau_n t\,dx = N_2 - N_1.$$

Обозначим среднее значение нормального напряжения, действующего по площадке торца полки $A_2B_2C_2D_2$, т. е. напряжение в точках E_2, через σ'', а соответствующее среднее напряжение в точках E_1 сечения $A_1B_1C_1D_1$ — через σ' (фиг. 242).

Тогда

$$N_2 = \sigma'' t y,$$

где величина напряжения σ'' равна

$$\sigma'' = \frac{M+dM}{J}\cdot\frac{h}{2}.$$

Следовательно,

$$N_2 = \frac{M+dM}{J}\cdot\frac{h}{2}\,ty.$$

Подобным же образом

$$N_1 = \frac{M}{J}\cdot\frac{h}{2}\,ty.$$

Отсюда

$$\tau_n t dx = N_2 - N_1 = \frac{dM}{J}\cdot\frac{h}{2}\,ty,$$

или

$$\tau_n = \frac{dM}{dx}\cdot\frac{h}{2J}y = \frac{Qhy}{2J}. \qquad (15.18)$$

Фиг. 243.

По свойству парности касательных напряжений наличие τ_n по площадке $A_1A_2D_2D_1$ сейчас же влечёт за собой появление такого же по величине и обратного по знаку касательного напряжения в точках у ребра A_2D_2 по площадке $A_2B_2C_2D_2$ (фиг. 242). (Надо помнить, что масштаб чертежа искажён: отрезок $D_1D_2 = dx$ очень мал, а отрезок $A_2B_2 = y$ — конечная величина.)

Таким образом, по сечению $2-2$ в точках верхней полки будут действовать горизонтально направленные касательные напряжения τ_n, меняющиеся по закону прямой в зависимости от y (фиг. 243):

$$\tau_n = \frac{Qh}{2J}\,y.$$

Подобным же образом можно показать, что такие же напряжения, но обратного направления, будут действовать в точках нижней полки.

Касательные напряжения τ_n, действующие на каждую полку, дадут в сумме равнодействующее усилие T_1, которое можно вычислить так. Сила, действующая на заштрихованную площадку $t\,dy$, равна (фиг. 243):

$$dT_1 = \tau_n t\,dy = \frac{Qh}{2J}\,yt\,dy;$$

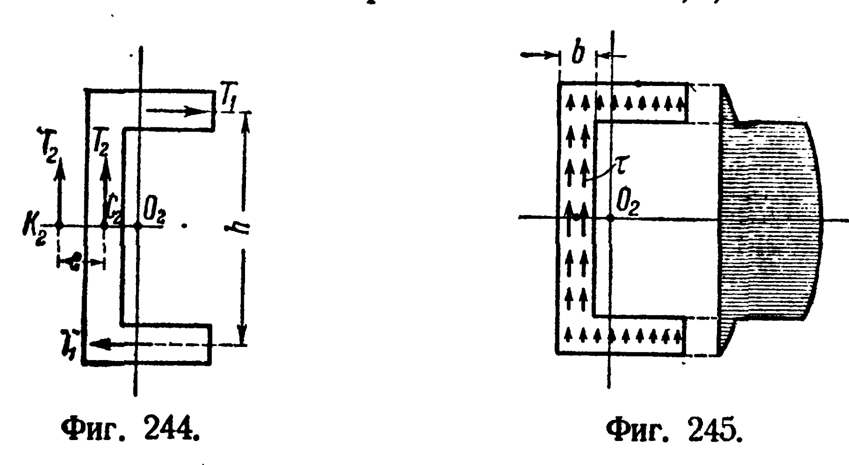
суммируя все такие силы, получаем:

$$T_1 = \int_0^{b_1} \frac{Qh}{2J} yt\, dy = \frac{Qh}{4J} b_1^2 t.$$

Эти усилия показаны на фиг. 244. Кроме касательных напряжений τ_n, по сечению действуют вертикально направленные касательные напряжения:

$$\tau = \frac{QS(z)}{Jb(z)}.$$

Условная эпюра распределения этих напряжений показана на фиг. 245. Соответствующие усилия сложатся в равнодействующее усилие T_2, которое с достаточной степенью точности можно считать равным поперечной силе Q и приложенным в центре тяжести *стенки* C_2 (фиг. 244); таким образом, здесь пренебрегают вертикальными касательными напряжениями в полках (по сравнению с касательными напряжениями в стенке) [1]).



Фиг. 244. Фиг. 245.

Полная система касательных усилий, состоящая из усилия T_2 и пары усилий T_1, может быть заменена одним усилием T_2, приложенным в точке K_2, в расстоянии e от центра тяжести стенки C_2.

Плечо пары усилий T_1 измеряется расстоянием h (фиг. 243 и 244). Для определения расстояния e приравняем нулю сумму моментов трёх сил относительно точки K_2:

$$-T_2 e + T_1 h = 0;$$

отсюда

$$e = \frac{T_1 h}{T_2} = \frac{Qh^2 b_1^2 t}{4JQ} = \frac{h^2 b_1^2 t}{4J}. \tag{15.19}$$

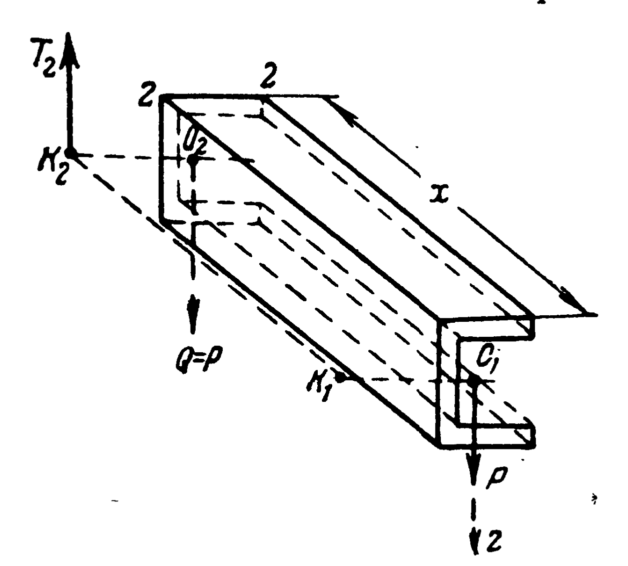
Таким образом, при изгибе швеллера сосредоточенной силой P, приложенной в центре тяжести сечения, помимо обычных напряжений τ, возникают ещё касательные напряжения τ_n. Суммирование всех этих напряжений даёт нам касательное усилие, проходящее уже не через центр тяжести сечения O, а через точку K_2, так называемый ***центр изгиба*** (иногда именуемый центром жёсткости или центром скалывания).

---

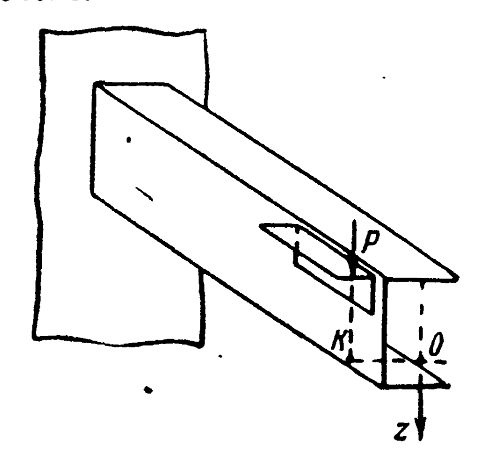
[1]) Все выводы этого параграфа можно считать достаточно точными, если толщины стенки и полки составляют менее 1 : 20 соответствующего второго размера. В противном случае расчёт нуждается в уточнении: при определении, например, положения усилия T_2 следует учесть и вертикальные касательные усилия в полках.

Если мы расположим силу P в плоскости xOz, то отрезок балки длиной x (фиг. 246) не может быть в равновесии; поперечная сила Q в сечении 2 проходит через точку O_2, тогда как полное касательное усилие T_2 — через точку K_2. Для равновесия необходимо, чтобы в проведённом сечении возникли ещё *касательные напряжения кручения*, которые дадут пару, уравновешивающую совместно с усилием T_2 поперечную силу Q в сечении 2.

Если же мы хотим избежать кручения нашей балки, то надо силу P приложить в точке K_1 хотя бы при помощи приваренного отрезка уголка, как схематически показано на фиг. 247. Тогда поперечная сила в сечении 2 пройдёт тоже через точку K_2, и равновесие по отношению к касательным напряжениям будет обеспечено.



Фиг. 246.



Фиг. 247.

Формулу для вычисления e можно преобразовать. Подставим в неё приближённое значение момента инерции J; последний будем вычислять, принимая момент инерции полки равным её площади, умноженной на квадрат половины расстояния h. Тогда (фиг. 243)

$$J=\frac{t_c h^3}{12}+2b_1 t\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{1}{2}b_1 t h^2\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{t_c h}{b_1 t}\right),$$

где t_c — толщина стенки. Называя площадь стенки $t_c h=F_c$, а площадь полки $b_1 t=F_п$, получаем:

$$J=\frac{1}{2}b_1 t h^2\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{F_c}{F_п}\right)$$

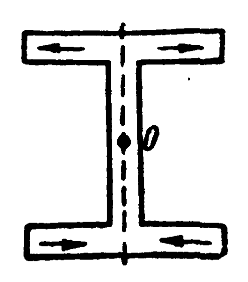
и, далее,

$$e=\frac{h^2 b_1^2 t}{4J}=\frac{\frac{1}{2}b_1}{1+\frac{1}{6}\cdot\frac{F_c}{F_п}}. \qquad (15.20)$$

Эта формула показывает, что расстояние e будет тем больше, чем больше площадь пояса по отношению к площади стенки; но во всяком случае

$$e<\frac{1}{2}\cdot b_1.$$

Для сечений типа двутавра при изгибе поперечными силами мы также будем иметь наличие горизонтальных касательных напряжений в поясах (фиг. 248). Однако благодаря симметрии сечения эти напряжения взаимно уравновешиваются в пределах каждой полки, и центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. Совпадение центра изгиба с центром тяжести сечения имеет место, если сечение имеет две оси симметрии или центр антисимметрии (зетобразная форма); в этом случае скручивание при действии нагрузки в плоскости, проходящей через ось стержня, исключено. Кроме того, из формул (15.18) и (15.19) следует, что скручивание балок при нагрузке их в главной плоскости, не являющейся плоскостью симметрии, связано с наличием в сечениях поперечной силы. Впрочем, для тонкостенных стержней несимметричного профиля (см. главу XXX) скручивание балки может возникнуть и при отсутствии поперечных сил.



Фиг. 248.

Практическое значение рассмотренного явления достаточно велико. Балки корытного, уголкового и тому подобных сечений скручиваются весьма легко; поэтому расположение плоскости действия внешних сил вне центров изгиба может повести к значительным дополнительным деформациям в этих балках. Более точные исследования показывают, что в некоторых случаях кручение балок таких профилей сопровождается появлением дополнительных нормальных напряжений, достигающих иногда значительной величины. Надо, однако, помнить, что для развития этих дополнительных напряжений необходимо, чтобы деформация кручения — и довольно значительная — произошла. Поэтому наличие связей, соединяющих балку с соседними элементами конструкции и препятствующих кручению, может предотвратить появление этих добавочных напряжений даже и при несовпадении плоскости внешних сил с плоскостью центров изгиба.

Пример 69. Швеллер № 40 изгибается сосредоточенными силами, расположенными в плоскости, параллельной стенке. Определить расстояние этой плоскости от оси стенки при условии, что кручение балки должно быть исключено.

Плоскость действия сил должна проходить через линию центров изгиба. Расстояние этой линии от оси стенки определяется формулой (15.20)

$$e = \frac{h^2 b_1^2 t}{4J}.$$

Для нашего профиля (см. таблицу в приложении IX) $b_1 = b - d = 115 - 8 = 107$ *мм*; $h = 400 - 13{,}5 = 386{,}5$ *мм*; $J = 15220$ *см*^{4}. Отсюда

$$e = \frac{38{,}65^2 \cdot 10{,}7^2 \cdot 1{,}35}{4 \cdot 15220} = 3{,}8,$$

т. е. плоскость нагрузки должна проходить вне сечения на расстоянии $e = 3{,}8$ *см* от оси стенки.

§ 97. Подбор сечения балок по допускаемым нагрузкам.

Всё предыдущее изложение было построено на методе подбора сечения и поверки прочности балок *по допускаемым напряжениям.* Но уже на примере скручиваемого стержня мы видели, что при *неравномерном* распределении напряжений по сечению метод подбора размеров сечения по допускаемым нагрузкам даёт иной результат. Подобный же случай мы имеем и при изгибе.

В методе расчёта по допускаемым напряжениям мы пользовались для подбора сечения балок условием

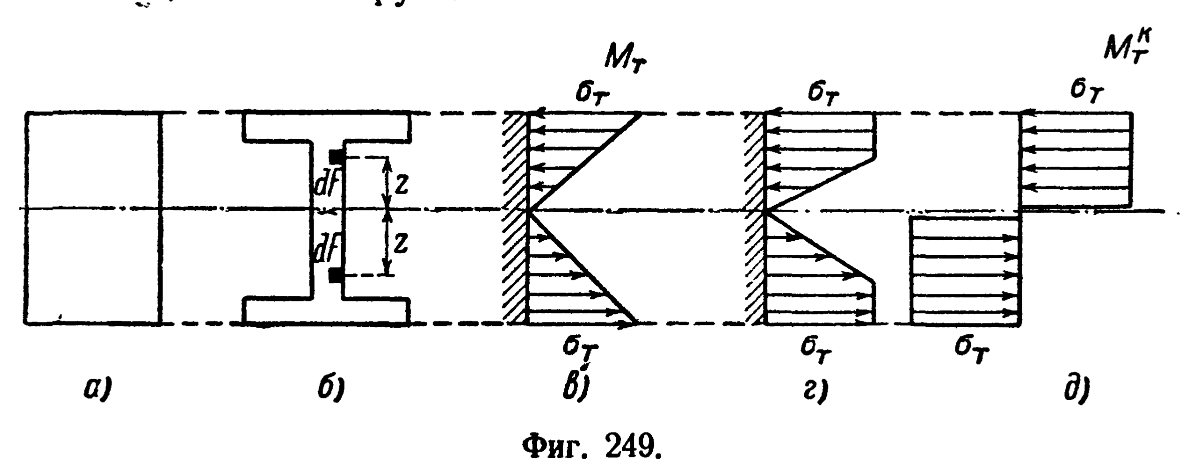
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leqslant [\sigma].$$

Здесь $[\sigma]$ для материалов, имеющих площадку текучести (мягкая сталь), было равно

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{k_т},$$

где $\sigma_т$ — предел текучести, а $k_т$ — соответствующий коэффициент запаса.

Таким образом, *опасным* мы представляем себе здесь то состояние, когда *наибольшее напряжение* в опасном сечении балки дойдёт до предела текучести. Изгибающий момент при этом состоянии назовём $M_т$; он соответствует достижению грузоподъёмности *материала* в наиболее напряжённых волокнах опасного сечения балки. Однако этому состоянию не будет отвечать исчерпание грузоподъёмности всей балки, как конструкции.



Фиг. 249.

Возьмём стальную балку симметричного (например, прямоугольного или двутаврового) сечения (фиг. 249, *а* и *б*). При моменте, равном $M_т$, распределение напряжений в опасном сечении показано на фиг. 249, *в*; напряжение дошло до предела текучести лишь в *крайних* волокнах, вся же остальная часть балки находится в упругом состоянии. Поэтому для дальнейшей деформации балки необходимо новое увеличение нагрузки и изгибающего момента: грузоподъёмность балки ещё не исчерпана.

При увеличении момента зона текучести будет распространяться внутрь балки, эпюра напряжений примет вид, показанный на фиг. 249, *г*, и в пределе, когда материал по всей высоте сечения потечёт и грузоподъёмность балки будет полностью исчерпана, эпюра напряжений примет форму двух прямоугольников (фиг. 249, *д*). Изгибающий момент на этой стадии работы балки и будет предельным, разрушающим для балки в целом. Дальнейшая деформация балки

пойдёт уже без увеличения момента; в опасном сечении образуется так называемый *пластический шарнир.*

Определим величину этого предельного момента $M_т^к$. Он будет равен сумме моментов относительно нейтральной оси усилий по фиг. 249, *д*. На площадку dF на расстоянии z от нейтральной оси будет действовать сила $\sigma_т dF$; момент этой силы относительно нейтральной оси равен $\sigma_т dF \cdot z$. По симметрии сечения достаточно вычислить сумму моментов этих сил для верхней или нижней половины сечения и результат удвоить; тогда

$$M_т^к = 2\int\limits_{\frac{F}{2}} \sigma_т z\,dF,$$

где F — площадь всего сечения. Так как $\sigma_т$ постоянно для всех точек сечения, то

$$M_т^к = 2\sigma_т \int\limits_{\frac{F}{2}} z\,dF = 2\sigma_т S_{max},$$

поскольку интеграл

$$\int\limits_{\frac{F}{2}} z\,dF = S_{max}$$

представляет собой статический момент половины сечения относительно нейтральной оси.

Условие прочности имеет вид

$$M_{max} \leqslant [M];$$

при коэффициенте запаса $k_т$ получаем:

$$[M] = \frac{M_т^к}{k_т} = \frac{2S_{max}\sigma_т}{k_т} = 2S_{max}[\sigma].$$

Тогда условием прочности будет:

$$M_{max} \leqslant 2S_{max}[\sigma] \quad \text{и} \quad 2S_{max} \geqslant \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \qquad (15.21)$$

Следовательно, при расчёте по допускаемым нагрузкам вместо подбора сечения симметричной балки по её моменту сопротивления W приходится подбирать размеры по величине удвоенного статического момента полусечения балки. Для прямоугольного сечения высотой h и шириной b

$$2S_{max} = 2b\frac{h}{2}\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4} = 1{,}5\frac{bh^2}{6} = 1{,}5\ W.$$

Подставляя это значение в формулу (15.21), получаем:

$$W \geqslant \frac{M_{max}}{1{,}5[\sigma]}.$$

Таким образом, при расчёте по допускаемым нагрузкам необходимый момент сопротивления балки прямоугольного сечения получается в 1,5 раза меньшим, чем при расчёте по допускаемым напряжениям.

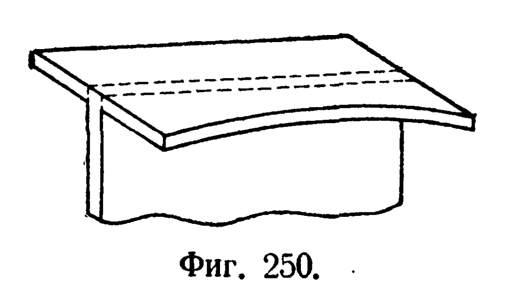
Можно для любого симметричного сечения представить величину $2S_{max}$ как произведение момента сопротивления на некоторый коэффициент n, зависящий от формы сечения:

$$2S_{max}=nW;$$

тогда формула (15.21) примет вид

$$W\geqslant\frac{M_{max}}{n[\sigma]}. \qquad (15.22)$$

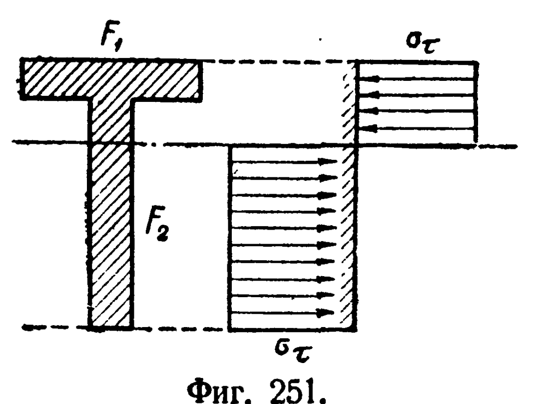
Для прямоугольника $n=1,5$; для двутавровых сечений нашего сортамента n колеблется от 1,13 до 1,17; в среднем можно принять $n=1,15$. Таким образом, переход на метод расчёта по допускаемым нагрузкам для стальных балок наиболее употребительного профиля может дать возможность поднять грузоподъёмность на 15%, что равносильно повышению допускаемых напряжений. Такое повышение допускаемых напряжений потребует более тщательного исследования (при проверке прочности) запаса против других возможных видов разрушения балки.



Фиг. 250.

Опыт показывает, что стальные двутаврового профиля балки никогда не могут быть разрушены только в результате наступления текучести по всему сечению. Чаще наблюдается потеря устойчивости пояса (фиг. 250) или устойчивости стенки. Таким образом, повышение допускаемых напряжений, к которому сводится в данном случае применение метода расчёта по допускаемым нагрузкам, требует особого внимания к проверкам устойчивости элементов балок.

При действии повторной нагрузки следует иметь в виду возможность разрушения материала за счёт развития трещин усталости. Это требует дополнительной проверки прочности для обеспечения конструкции от подобного вида разрушения.



Фиг. 251.

Для балок, сечения которых имеют лишь одну ось симметрии, например балок таврового профиля, расчёт по допускаемым нагрузкам несколько осложняется.

На фиг. 251 изображены сечение такой балки и эпюра распределения нормальных напряжений при исчерпании грузоподъёмности балки. Здесь надо сначала определить положение нейтральной оси; в рассматриваемой стадии работы балки *эта ось уже не проходит через центр тяжести сечения.*

Назовём площадь сжатой части сечения F_1, а растянутой F_2. Условие равенства между собой сумм растягивающих и сжимающих напряжений даёт

$$\sigma_т F_1 = \sigma_т F_2 \quad \text{или} \quad F_1 = F_2.$$

Нейтральная ось делит площадь сечения на две равновеликие части. При изгибе в пределах упругости это же условие привело нас к равенству статических моментов сжатой и растянутой части сечения, в силу чего нейтральная ось проходила через центр тяжести сечения. Здесь же она делит площадь сечения пополам.

Найдя положение нейтральной оси, определяем величину

$$M_{доп} = \frac{\sigma_т (S_1 + S_2)}{k_1},$$

где S_1 и S_2 — статические моменты верхней и нижней половин площади сечения относительно нейтральной оси. Условие прочности принимает вид

$$(S_1 + S_2) \geqslant \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \tag{15.23}$$

Изложенные соображения относятся к случаю чистого изгиба; наличие поперечных сил несколько осложняет расчёт.

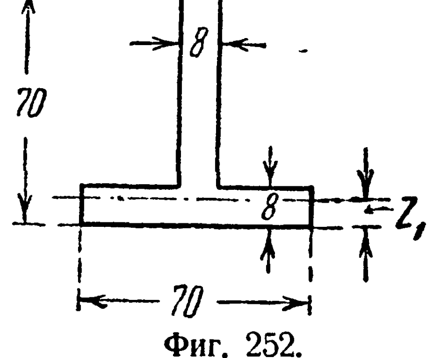
Пример 70. Определить коэффициент n для круглого сечения радиуса r.

Статический момент полукруга относительно нейтральной оси равен (§ 93) $S_{max} = \frac{2r^3}{3}$; момент сопротивления $W = \frac{\pi r^3}{4}$, следовательно,

$$n = \frac{2S_{max}}{W} = \frac{4r^3 \cdot 4}{3\pi r^3} = 1{,}7.$$

Пример 71. Определить по методу допускаемых нагрузок величину допускаемой силы P, приложенной посредине пролёта $l = 2$ *м* к шарнирно-опёртой балке. Сечение балки — тавр $70 \times 70 \times 8$ *мм* (фиг. 252). Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = 1600 \ кг/см^2.$$



Фиг. 252.

Величина допускаемого изгибающего момента определяется формулой

$$M_{max} = \frac{Pl}{4} = (S_1 + S_2)[\sigma].$$

Для нахождения S_1 и S_2 надо отыскать положение нейтральной оси так, чтобы она делила площадь сечения пополам и была перпендикулярна к оси симметрии. Называя через z_1 расстояние нейтральной оси от края полки, получаем уравнение

$$7 \cdot z_1 = 6{,}2 \cdot 0{,}8 + 7(0{,}8 - z_1);$$

отсюда $z_1 = 0{,}75$ *см*.

Статические моменты равны

$$S_1 = 7{,}0 \frac{0{,}75^2}{2} = 1{,}98 \ см^3, \quad S_2 = 7{,}0 \cdot \frac{0{,}05^2}{2} + 6{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}15 = 15{,}61 \ см^3.$$

Изгибающий момент равен

$$M_{max} = (1{,}98 + 15{,}61) \cdot 1600 = 28\,160 \text{ кгсм}.$$

Допускаемое значение силы P равно

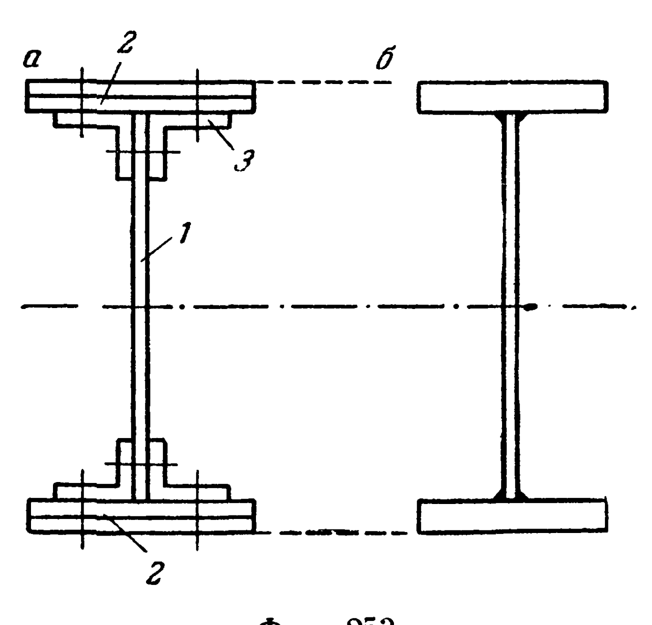
$$[P] = \frac{4M_{max}}{l} = \frac{4 \cdot 28\,160}{200} = 563 \text{ кг}.$$

ГЛАВА XVI.

РАСЧЁТ СОСТАВНЫХ БАЛОК.

§ 98. Подбор сечения клёпаных балок.

Наибольший прокатный профиль двутавровой балки № 70б имеет момент сопротивления $W = 5010$ *см*³ (см. стр. 837). Момент сопротивления самого большого балочного широкополочного профиля (ГОСТ 6183—52) № 100$Б_7$ достигает 20 440 *см*³. Однако прокатные профили больших размеров изготовляются лишь по специальным заказам при больших поставках, а потому очень часто приходится прибегать к составным сечениям — к клёпаным и сварным балкам.



Фиг. 253.

Клёпаная балка состоит (фиг. 253, *а*) из вертикального листа *1*, нескольких пар горизонтальных листов *2* и четырех уголков *3*; уголки и листы соединяются заклёпками.

Сварная балка (фиг. 253, *б*) состоит из вертикального и горизонтальных листов, соединённых сварными швами.

Покажем на примере ход подбора сечения клёпаной балки. Допускаемые напряжения примем следующие: на растяжение и сжатие $[\sigma] = 1600$ *кг/см*², на срезывание $[\tau] = 1000$ *кг/см*², на смятие в заклёпках $[\sigma_c] = 2800$ *кг/см*², на срезывание в заклёпках $[\tau]_з = 1000$ *кг/см*².

Схема выбранной для расчёта балки и нагрузок показана на фиг. 254. Опасными сечениями являются:

а) сечение посредине пролёта балки: $M_{max} = 177{,}6$ *тм*; $Q = 0$;

б) сечения над обеими опорами: $M = 174{,}2$ *тм*; $Q_{max} = 94$ *т*.

Необходимый момент сопротивления равен

$$W = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{17\,760\,000}{1600} = 11\,100 \text{ см}^3.$$

Определение необходимых размеров поперечного сечения балки будет требовать выполнения следующих операций:

1. Прежде всего необходимо установить основной размер поперечного сечения — *высоту* вертикального листа h.

Практика проектирования показала, что достаточно хорошие результаты дают следующие эмпирические формулы:

$$h = 1{,}2\sqrt{W} \text{ при } W \leqslant 10\,000 \text{ см}^3$$

$$(h \text{ в см})$$

$$h = 1{,}0\sqrt{W} \text{ при } W \geqslant 30\,000 \text{ см}^3.$$

Для нашего случая можно принять промежуточное значение

$$h = 1{,}18\sqrt{11\,100} = 1{,}18 \cdot 105{,}7 = 124{,}7 \text{ см}.$$

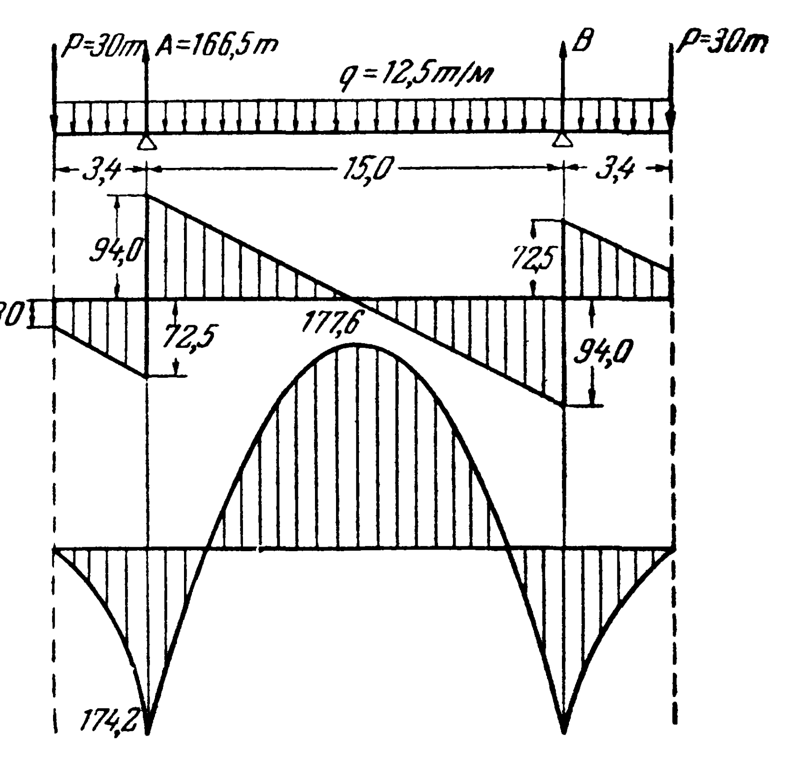
Примем высоту стенки $h = 124$ *см.*

2. Далее необходимо определить *толщину* вертикального листа b (толщину стенки балки). При предварительном подборе толщины стенки будем в запас прочности считать, что вся поперечная сила воспринимается только стенкой, т. е. прямоугольным сечением высотой h и шириной b. Тогда условие прочности по касательным напряжениям получит вид:

$$\tau_{max} = \frac{3Q_{max}}{2bh} \leqslant [\tau],$$

откуда

$$b = \frac{3Q_{max}}{2h[\tau]} = \frac{3 \cdot 94\,000}{2 \cdot 124 \cdot 1000} = 1{,}13 \text{ см}.$$



Фиг. 254.

По техническим условиям для обеспечения устойчивости стенки (сопротивления короблению) толщина её должна быть не менее $b \geqslant 0{,}08\sqrt{h}$ (*см*), или для нашего примера

$$b \geqslant 0{,}08\sqrt{124} = 0{,}89 \text{ см}.$$

Обычно толщину стенки принимают в пределах от 8 до 12 и более *мм*: назначаем $b = 1{,}0$ *см* $= 10$ *мм*.

3. Для определения размера *поясов* балки, состоящих каждый из двух уголков и горизонтальных листов, необходимо выяснить, какой же момент инерции должна иметь балка.

Выше мы нашли величину необходимого момента сопротивления $W = 11\,100$ *см*³; это — так называемый момент сопротивления нетто, рабочий момент сопротивления балки, или момент сопротивления ослабленного заклёпочными отверстиями сечения балки.

Перейдём к моменту инерции:

$$J_{\text{нет}} = W_{\text{нет}} \cdot z_{\max};$$

здесь $z_{\max}$ — расстояние от нейтральной оси до наиболее удалённого волокна балки. Величина $z_{\max}$ превышает половину высоты вертикального листа на толщину пакета горизонтальных листов; принимая, что эта толщина колеблется в обычных балках от 1 до 3 *см*, получаем:

$$z_{\max} = \frac{h}{2} + (1 \div 3)\ \text{см}.$$

В нашем случае примем $z_{\max} = 62 + 2 = 64$ *см*. Если мы при этом ошибёмся на 1 — 2 *см*, то относительная ошибка будет весьма малой. Далее находим

$$J_{\text{нет}} = W_{\text{нет}}\, z_{\max} = 11\,100 \cdot 64 \approx 711\,000\ \text{см}^4.$$

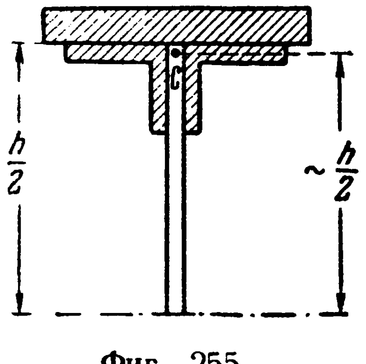
Практика проектирования показала, что ослабление момента инерции за счёт заклёпочных отверстий составляет обычно от 12 до 18%.

Полный момент инерции сечения, включающий в себя и моменты инерции площадей заклёпочных отверстий, будем называть J брутто и обозначать $J_{\text{бр}}$. Следовательно, $J_{\text{бр}} = (1{,}12 \div 1{,}18)\, J_{\text{нет}}$.

Примем $J_{\text{бр}} = 1{,}15\, J_{\text{нет}} = 1{,}15 \cdot 711\,000 \approx 818\,000$ *см*⁴.

4. Далее следует определить момент инерции поясов. Так как размеры стенки нам известны, то мы можем вычислить её момент инерции. Он равен

$$J_{\text{с}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \cdot 124^3}{12} = 159\,000\ \text{см}^4.$$



Фиг. 255.

На долю обоих поясов (горизонтальные листы и уголки) остаётся момент инерции:

$$J_{\text{п}} = J_{\text{бр}} - J_{\text{с}} = 818\,000 - 159\,000 = 659\,000\ \text{см}^4.$$

5. Теперь можно найти приблизительную величину площади пояса $F_{\text{п}}$ по его моменту инерции, предположив, что центр тяжести пояса обычно лежит на уровне верха вертикального листа (фиг. 255).

Пренебрегая собственным центральным моментом инерции площади пояса, можно считать, что

$$J_п = 2F_п \frac{h^2}{4} = \frac{F_п h^2}{2}.$$

Отсюда

$$F_п = \frac{2J_п}{h^2} = \frac{2 \cdot 659\,000}{124^2} = 86{,}0 \text{ см}^2.$$

Площадь пояса состоит из площади двух уголков и пакета горизонтальных листов.

Площадь уголков обычно составляет 0,3 ÷ 0,5 от площади пояса, т. е. в нашем случае от 26 до 43 *см*². Выпишем из сортамента уголки, дающие нам приблизительно нужную площадь. Это уголки:

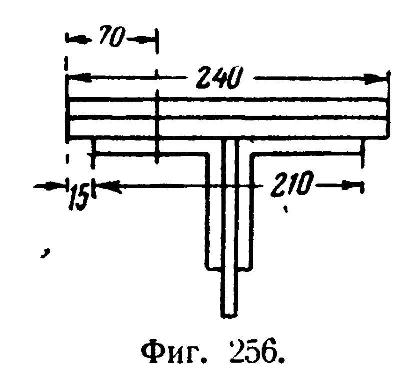
90 × 90 × 8	площадь двух уголков	27,8 *см*²
90 × 90 × 9	» » »	31,2 »
100 × 100 × 8	» » »	31,2 »
100 × 100 × 10	» » »	38,4 »
100 × 100 × 7	» » »	30,4 »
100 × 100 × 18	» » »	34,4 »
125 × 125 × 8	» » »	39,4 »

Выберем из этой таблички уголки 100 × 100 × 10. Тогда на долю площади пакета горизонтальных листов остаётся

$$86{,}0 - 38{,}4 = 47{,}6 \text{ см}^2 \approx 48 \text{ см}^2.$$

Приняв, что в поясе должно быть два листа, и назначая толщину листов 10 *мм*, мы должны взять ширину $b = \frac{48}{2} = 24$ *см* = 240 *мм*.

Брать листы толщиной 12 *мм* в данном случае не можем, так как при этом ширина окажется равной 20 *см*, листы не будут закрывать уголков, не будут иметь свесов над ними.



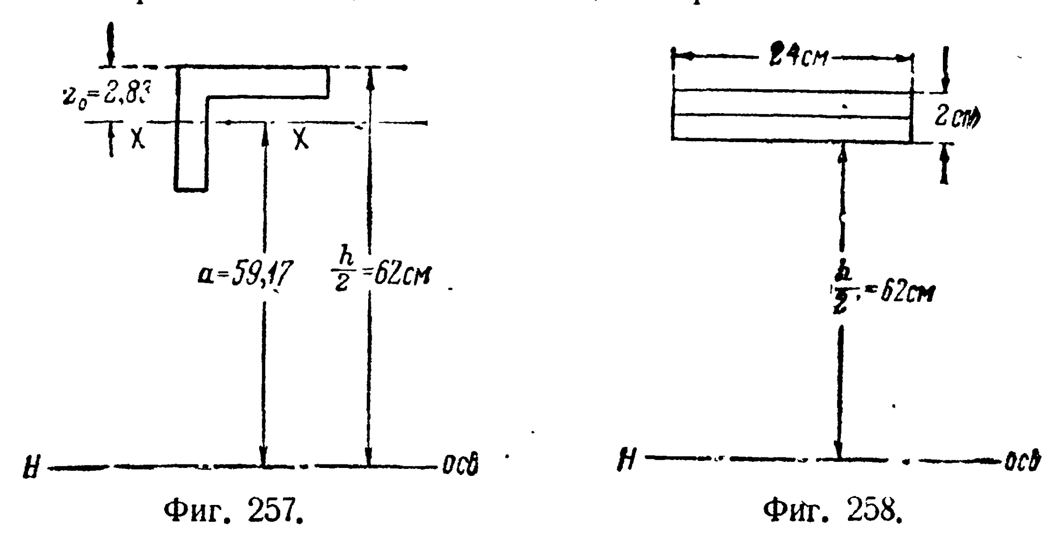
Фиг. 256.

Ставить один лист 480 × 10 невозможно, так как будут большие свесы листа, не поддержанные уголками; эти свесы могут коробиться при работе сжатого пояса балки. Обычно свесы допускаются в пределах от 5 до 30 *мм*; верхний предел определяется требованием, чтобы расстояние от оси вертикальной поясной заклёпки до края листа не превышало 8δ, где δ — толщина листа. При листах 240 × 10 свес получается (фиг. 256) равным 15 *мм*, что допустимо.

§ 99. Проверка прочности балки по нормальным напряжениям.

Задавшись размерами составных частей сечения, приступаем к проверке прочности балки по формулам (13.15) и (15.7), для чего следует вычислить более точно значения J, W, S. Вычисление всех этих величин удобно проводить в табличной форме. Таблица 21 подобных вычислений дана на стр. 333. Поясним произведённые в таблице подсчёты и записи.

Момент инерции уголков равен учетверённому моменту инерции одного уголка (фиг. 257). Этот момент инерции равен собственному центральному моменту инерции уголка (берём из таблиц сортамента) плюс произведение площади его на квадрат расстояния a от центра тяжести уголка до нейтральной оси; расстояние z_0 от края уголка до его центра тяжести дано в таблицах сортамента.



Фиг. 257. Фиг. 258.

Подобным же образом вычисляется момент инерции обеих пар горизонтальных листов (фиг. 258).

Момент инерции выбранного нами сечения равен $J_{бр} = 811\,000$ *см*^{4}. Как мы видим, несмотря на приближённость подбора, мы получили искомую величину момента инерции очень близкой к той, которую хотели получить. Разница составляет всего

$$\frac{811\,000 - 818\,000}{818\,000} \cdot 100 = -0,9\%.$$

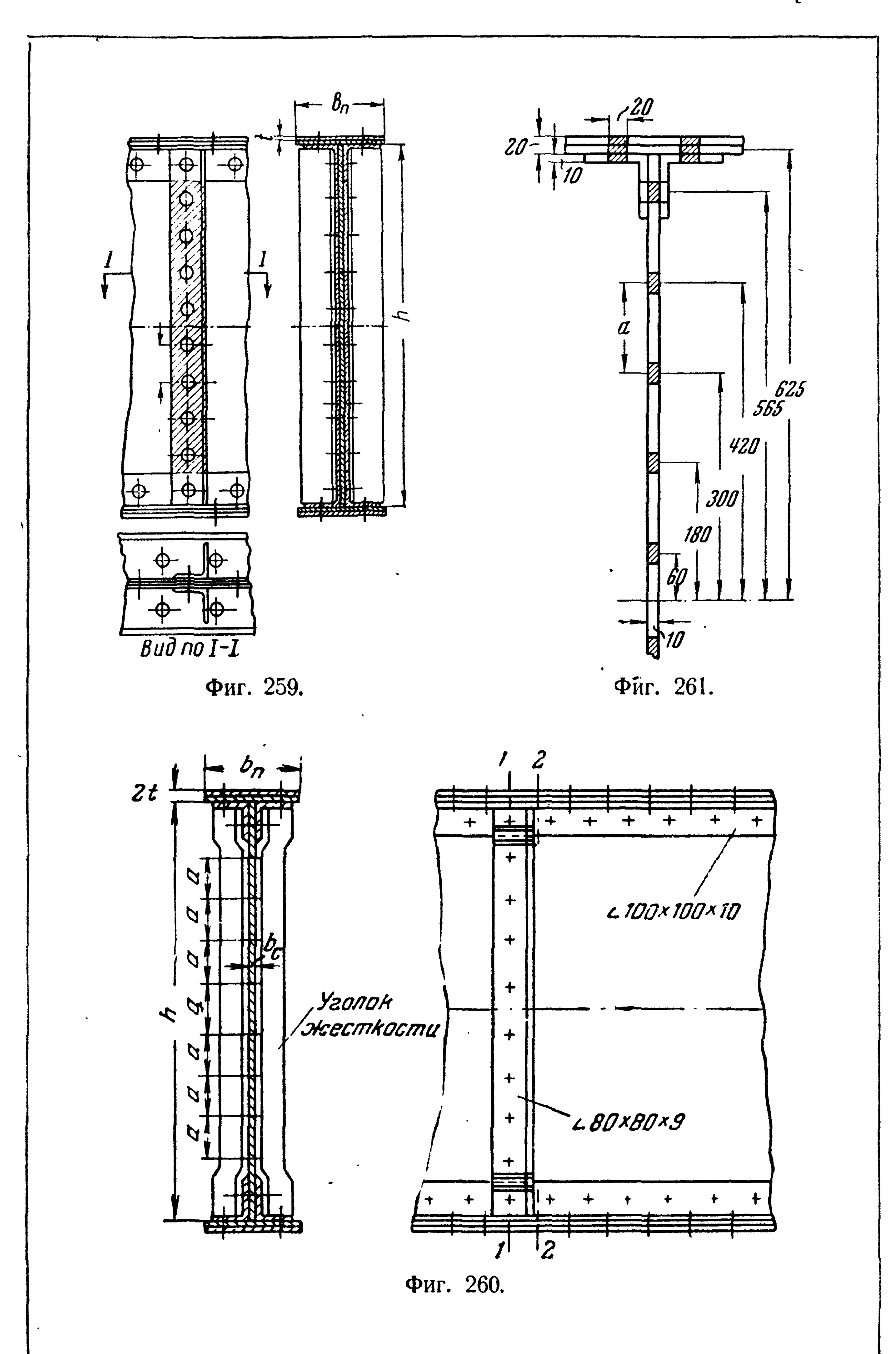
Теперь необходимо вычислить уменьшение момента инерции балки вследствие наличия заклёпочных отверстий.

Расположение заклёпок на фасаде балки показано на фиг. 259, 260, 261.

Заклёпки в вертикальных и горизонтальных полках поясных уголков располагаются в шахматном порядке. Расстояние между заклёпками a называется шагом заклёпок. Определение величины шага заклёпок *в поясных уголках* приведено ниже, в § 102. Шаг заклёпок *в уголках жёсткости* расчётом обычно не устанавливается, а берётся равным $5d \div 7d$, где d — диаметр заклёпки.

Таблица 21. Расчётные данные клёпаной балки.

Наименование элементов и их размеры	Момент инерции сечения брутто	Момент инерции заклёпочных отверстий	Момент инерции нетто	Статический момент полусечения
	фиг. 257, 258	фиг. 261		фиг. 262
мм	*см*^{4}	*см*^{4}	*см*^{4}	*см*^{3}
Вертикальный лист 1240·10	$\frac{1\cdot 124^3}{12}=$ 159 000	$2\cdot 1\cdot 2\,(56{,}5^2+42^2+30^2+18^2+6^2)=24\,900$	134 100	$62\cdot 1\cdot 31=1922$
Четыре уголка 100·100·10	$4\,(179+19{,}2\cdot 59{,}17^2)=271\,000$	$4\cdot 1\cdot 2\cdot 61{,}5^2=30\,200$	240 800	$2\cdot 19{,}2\cdot 59{,}17=2270$
Первые листы пояса 240·10	$2\left(\frac{24}{12}\cdot 1^3+24\cdot 62{,}5^2\right)=187\,500$	$2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 62{,}5^2=31\,200$	156 300	$1\cdot 24\cdot 62{,}5=1500$
Вторые листы пояса 240·10	$2\left(\frac{24}{12}\cdot 1^3+24\cdot 63{,}5^2\right)=193\,500$	$2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 63{,}5^2=32\,200$	161 300	$1\cdot 24\cdot 63{,}5=1524$
Полное сечение балки	811 000	118 500	692 500	$=7216$
Сечение с одной парой листов в поясе (см. гл. XX, § 122, фиг. 316)			531 200	5692
Сечение балки без поясных листов (см. гл. XX, § 122, фиг. 316)			374 900	4192



Фиг. 259.

Фиг. 261.

Фиг. 260.

Диаметр заклёпок принимается примерно равным удвоенной толщине применённых в конструкции листов; стандартные диаметры заклёпок: $d = 14$, 17, 20, 23, 26 *мм*.

Для предотвращения коробления и выпучивания тонкой вертикальной стенки её укрепляют, приклёпывая через промежутки, примерно равные высоте балки, *уголки жёсткости*.

На фиг. 259 показана часть фасада и разрез клёпаной балки, на которой уголки жёсткости присоединены с постановкой прокладок между ними и стенкой балки. Прокладки на фасаде отмечены тонкой штриховкой.

На фиг. 260 показан другой приём прикрепления уголков жёсткости. Для того чтобы перевести уголок жёсткости из плоскости стенки балки в плоскость поясных уголков, концы уголка жёсткости «высаживаются». В обоих случаях уголок жёсткости прикрепляется к балке заклёпками.

В нашем примере выбран диаметр заклёпок 20 *мм* и шаг $a = 120$ *мм*. Расположение заклёпок, прикрепляющих уголок жёсткости, показано на фиг. 259, 260 и 261.

При вычислении величины ослабления момента инерции учитывают, что отдельные элементы сечения балки ничем, кроме заклёпок, не соединены. Поэтому вычисляют *наибольшее* возможное *ослабление* для каждого из этих элементов. Так, для стенки берут сечение *1—1* (фиг. 260) — по заклёпкам, прикрепляющим уголок жёсткости; для горизонтальных листов — сечение *2—2* — через вертикальные заклёпки; для уголков — тоже сечение *2—2*, так как отверстия в горизонтальных полках уголков сильнее ослабляют балку, чем отверстия в вертикальных: они дальше расположены от нейтральной оси.

Поэтому отверстие для заклёпки, присоединяющей поясной уголок к стенке, учитывается при вычислении ослабления стенки (заштрихованный прямоугольник на фиг. 261) и не учитывается при вычислении ослабления уголка (два белых прямоугольника).

Влияние отверстий на прочность балки принято учитывать, вычитая из момента инерции всего сечения $J_{бр}$ момент инерции ΔJ заштрихованных площадей заклёпочных отверстий. Этот способ учёта влияния заклёпочных отверстий является *условным*; он просто отражает тот факт, что балка, составленная из нескольких элементов, слабее сплошной, цельной балки.

При вычислении момента инерции площадей заклёпочных отверстий пренебрегают их собственными центральными моментами инерции, так как размеры этих отверстий малы по сравнению с размерами балки. Тогда ΔJ просто равен сумме произведений величины каждой заштрихованной площадки на квадрат её расстояния до нейтральной оси.

Подсчёт моментов инерции заклёпочных отверстий производим в графе 3 таблицы 21. Действительное ослабление оказалось равным $\frac{118\,500}{811\,000} \cdot 100 = 14{,}7\%$ вместо принятых нами 15%.

Момент инерции сечения балки равен:

$$J_{\text{нет}} = 692\,500 \text{ см}^4.$$

Момент сопротивления нетто

$$W_{\text{нет}} = \frac{J_{\text{нет}}}{z_{\max}} = \frac{692\,500}{64} = 10\,800 \text{ см}^3,$$

и действительное напряжение получается равным

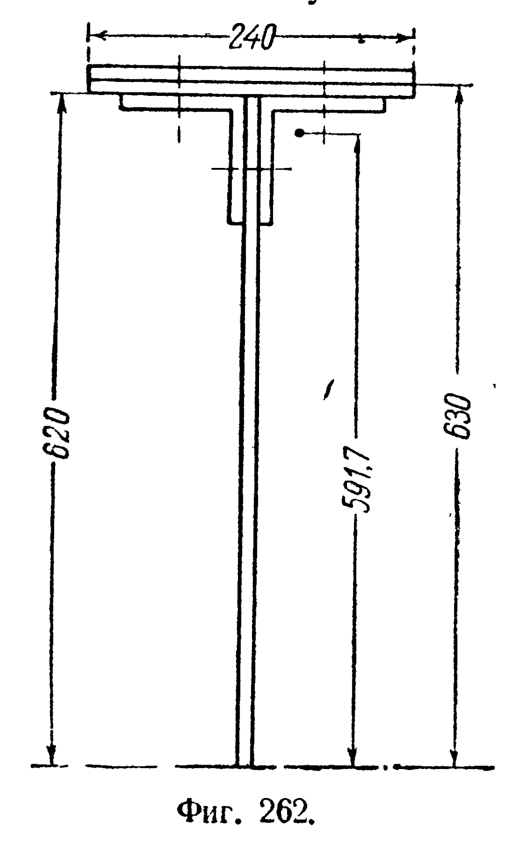
$$\sigma_{\max} = \frac{17\,760\,000}{10\,800} = 1645 \text{ кг/см}^2 > 1600 \text{ кг/см}^2.$$

Перенапряжение составляет

$$\frac{1645 - 1600}{1600} \cdot 100\% = 2{,}8\%.$$

Обычно практикой допускается перенапряжение (или недонапряжение) до 5%. Таким образом, принятое сечение может быть оставлено.

Если бы перенапряжение оказалось более 5%, то сечение балки следовало бы усилить. Это проще всего достигается увеличением ширины полок с последующей повторной проверкой прочности усиленного таким образом сечения.



Фиг. 262.

§ 100. Проверка прочности балки по касательным напряжениям.

Полученное сечение надо проверить по касательным напряжениям по формуле (15.7):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{J_y b} \leqslant [\tau].$$

При пользовании этой формулой обычно возникает вопрос, помещать в знаменатель $J_{\text{бр}}$ или $J_{\text{нет}}$. Очевидно, в первом случае пришлось бы в числителе иметь $S_{\text{бр}}$, а во втором $S_{\text{нет}}$. Отношение $\frac{S_{\text{бр}}}{J_{\text{бр}}}$ примерно то же, что и $\frac{S_{\text{нет}}}{J_{\text{нет}}}$. Поэтому принято обе величины вводить в формулу, не учитывая ослабления, т. е. брутто.

Вычисление статического момента *полусечения* (фиг. 262) выполнено в пятой графе таблицы 21. Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{94\,000 \cdot 7216}{1 \cdot 811\,000} = 835 \text{ кг/см}^2 < 1000 \text{ кг/см}^2.$$

§ 101. Проверка прочности балки по главным напряжениям.

Проверку прочности по главным напряжениям производим в сечении над опорой, где $M = 174{,}2$ *тм* и $Q_{\max} = 94$ *т* (фиг. 254).

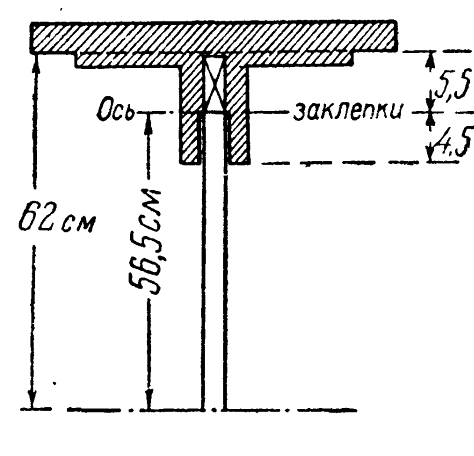
Принимают, что в клёпаной балке уголки ниже заклёпки совсем не связаны со стенкой. Утрируя это предположение, можно изобразить поперечное сечение балки, как показано на фиг. 263.

Тогда в наиболее опасном положении по высоте сечения оказываются элементы материала стенки, лежащие на уровне горизонтальных поясных заклёпок; в этом уровне и принято проводить проверку прочности. Величину нормальных напряжений следует вычислять по формуле

$$\sigma = \frac{Mz_0}{J_{нет}},$$

а касательных — по формуле

$$\tau = \frac{QS_п}{J_{бр}b_c},$$



Фиг. 263.

где b_c — толщина стенки, а $S_п$ — статический момент пояса (заштрихованная площадь) плюс части стенки выше поясных заклёпок (перечёркнутый прямоугольник). Другими словами, считают, что переход от широкой части балки к узкой происходит на уровне оси поясных заклёпок. Делаем вычисления:

$$\sigma = \frac{17\,420\,000 \cdot 56{,}5}{692\,500} = 1420 \text{ кг/см}^2,$$

$$S_п = 3024 + 2270 + 1 \cdot 5{,}5\,(62 - 2{,}75) = 5620 \text{ см}^3,$$

$$\tau = \frac{94\,000 \cdot 5620}{1 \cdot 811\,000} = 652 \text{ кг/см}^2.$$

Что касается формулы для расчётных напряжений, то на практике ещё удержалась проверка по первой теории прочности (наибольших нормальных напряжений):

$$\sigma_{r1} = \frac{1}{2}\left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right] \leqslant [\sigma]. \quad (15.14)$$

Эта формула (15.14) даёт более экономичное решение, а полувековой опыт пользования ею даёт удовлетворительные результаты.

В результате имеем:

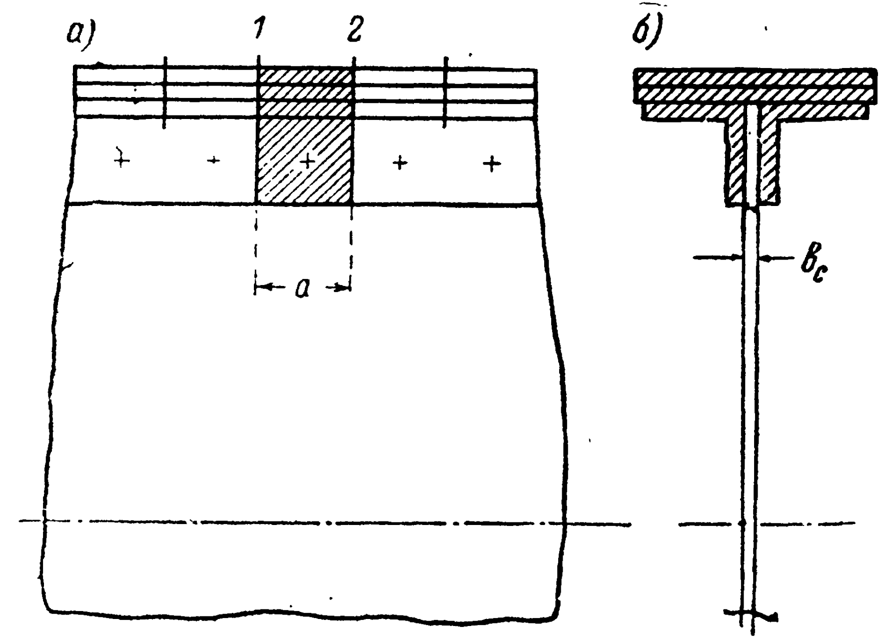
$$\sigma_{r1} = \frac{1}{2}\left[1420 + \sqrt{1420^2 + 4 \cdot 652^2}\right] = \frac{1}{2}(1420 + 1926) = 1673 \text{ кг/см}^2.$$

При $[\sigma] = 1600$ *кг/см²* перенапряжение составляет всего лишь 4,5%.

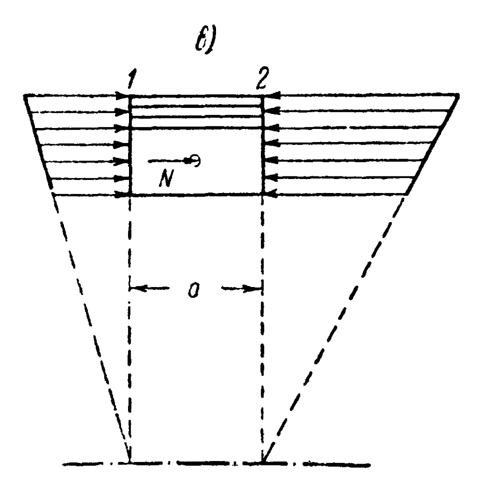
Надо сказать, что для составных балок, работа которых в действительности гораздо сложнее, эта поверка носит в значительной мере условный характер, чем и объясняется сохранение до сих пор указанной расчётной формулы.

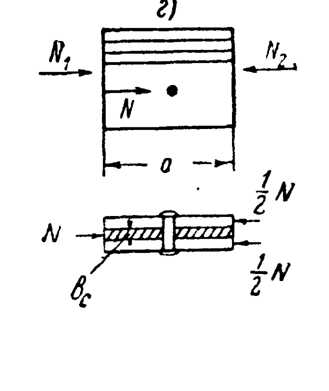
§ 102. Расчёт заклёпок в балке.

Совместная работа всех элементов клёпаной балки обусловлена наличием заклёпок. Поэтому необходимо разместить поясные заклёпки, установить расстояние между ними и проверить их прочность. Рассмотрим сначала горизонтальные поясные заклёпки.

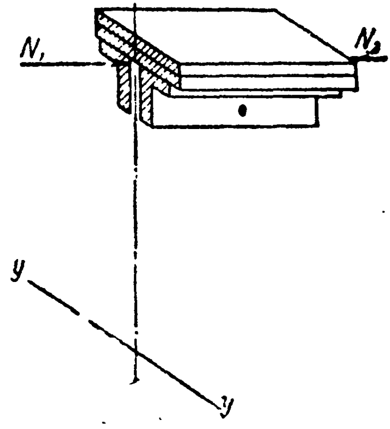


Вырежем сечениями *1* и *2* (фиг. 264) из балки часть пояса длиной *a* между двумя вертикальными заклёпками. Пусть изгибающий момент в сечении *1* будет M, а в сечении *2* $M+\Delta M$. Тогда вырезанный элемент пояса окажется в равновесии под дей-





Фиг. 264.



Фиг. 265.

ствием разности сумм (N_2 и N_1) нормальных напряжений, передающихся на него слева и справа, и реакции заклёпки N (фиг. 264, *в* и *г*).

Нормальное усилие N_1, действующее на торец выделенного элемента пояса (фиг. 265), будет равно статическому моменту заштри-

хованной площади пояса относительно нейтральной оси, умноженному на $\frac{M}{J}$ (сравнить с формулой (15.1) стр. 301):

$$N_1 = \frac{MS_п}{J}.$$

Точно так же.

$$N_2 = \frac{(M + \Delta M)\, S_п}{J}.$$

Усилие, перерезывающее заклёпку (так называемая сдвигающая сила)

$$N = N_2 - N_1 = \frac{\Delta M S_п}{J}.$$

Но $\frac{dM}{dx} = Q$ и $dM = Qdx$; в нашем случае можно заменить dx на a и dM на ΔM, следовательно, $\Delta M = Qa$ и

$$N = \frac{QS_п a}{J}. \qquad (16.1)$$

Эта формула впервые была выведена Д. И. Журавским.

В свою очередь, обе стенки пояса (вертикальные полки уголков) будут передавать на заклёпку силы $\frac{N}{2}$, уравновешивающиеся реакцией стенки балки N (фиг. 264, *г*); заклёпка подвергается двойному перерезыванию. Условие прочности заклёпки на перерезывание имеет вид:

$$\tau = \frac{N}{2\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} = \frac{QS_п a}{2J\frac{\pi d^2}{4}} \leqslant [\tau]_з. \qquad (16.2)$$

Условием прочности на смятие служит:

$$\sigma_c = \frac{N}{b_c d} = \frac{QS_п a}{J b_c d} \leqslant [\sigma_c], \qquad (16.3)$$

где d — диаметр заклёпки; b_c — толщина стенки балки; $[\tau]_з$ — допускаемое напряжение на срезывание; $[\sigma_c]$ — допускаемое напряжение на смятие.

Проверку надо вести в сечении, где Q — максимум. В нашем примере:

$$Q_{max} = 94\ т; \quad J = 811\,000\ см^4; \quad S_п = 3024 + 2270 = 5294\ см^3;$$
$$d = 2\ см; \quad b_c = 1\ см.$$

Расстояние между заклёпками определится из условий прочности на перерезывание (16.2):

$$a \leqslant \frac{[\tau]_3 J\pi d^2}{2QS_п} = \frac{1000 \cdot 811\,000 \cdot 3{,}14 \cdot 4}{2 \cdot 94\,000 \cdot 5294} = 10{,}3 \text{ см};$$

или на смятие (16.3):

$$a \leqslant \frac{[\sigma_c] J b_c d}{QS_п} = \frac{2800 \cdot 811\,000 \cdot 1 \cdot 2}{94\,000 \cdot 5294} = 9{,}2 \text{ см}.$$

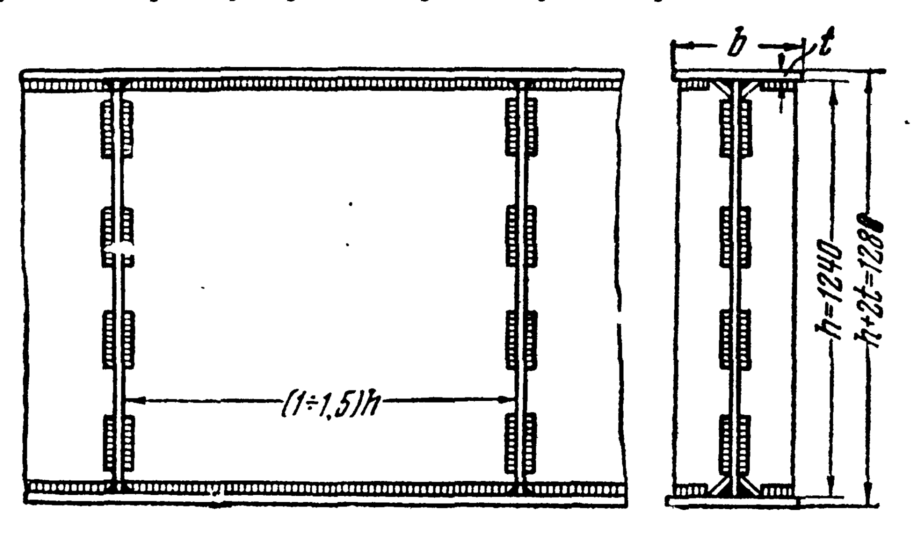
Следовательно, шаг *поясных* заклёпок необходимо принять равным

$$a = 90 \text{ мм}.$$

Таким же путём можно проверить прочность заклёпок, соединяющих горизонтальные листы с уголками. Однако такой проверки никогда не делают, так как эти заклёпки находятся в лучших условиях, чем горизонтальные заклёпки пояса.

§ 103. Подбор сечения и проверка прочности сварной балки.

Ход подбора размеров сечения сварной балки тот же, что и клёпаной. Не приходится лишь вычислять ослабления сечения. Уголки жёсткости заменяются рёбрами, привариваемыми к стенке (фиг. 266). Для примера рассмотрим вариант расчёта балки, изучен-



Фиг. 266.

ной в §§ 98—102. Принимаем ту же высоту стенки, что и для клёпаной балки, $h = 1240$ *мм*; предполагая толщину пояса t равной 2 *см*, получаем необходимую величину момента инерции:

$$J = W \cdot z_{max} = 11\,100 \cdot 64 \approx 711\,000 \text{ см}^4.$$

Вычитая момент инерции стенки, получаем момент инерции поясов:

$$J_п = 711\,000 - 159\,000 = 552\,000 \text{ см}^4.$$

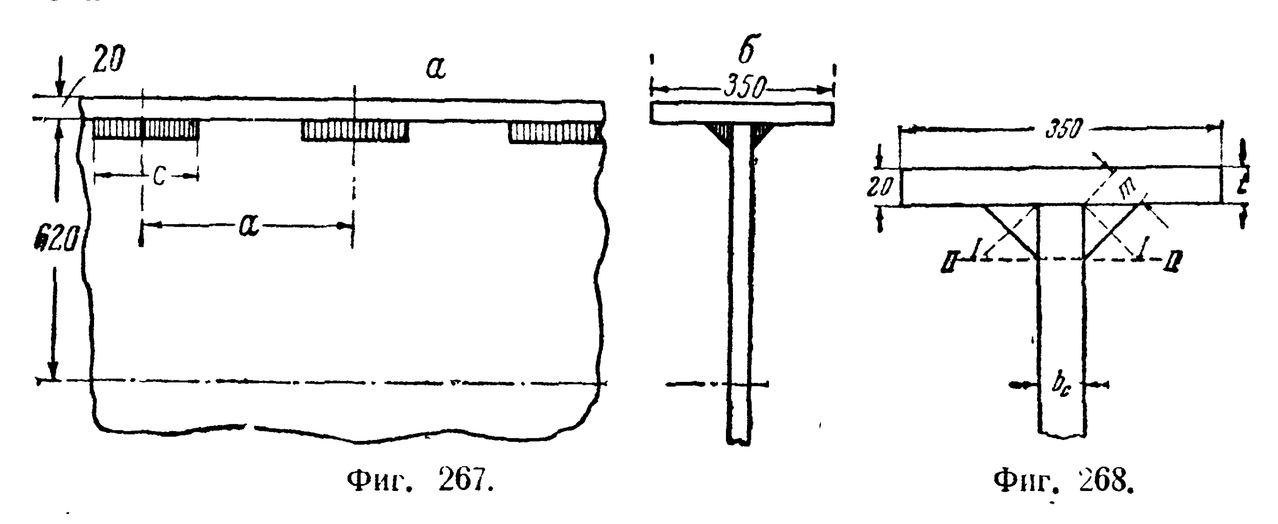
Площадь пояса

$$F_п = \frac{2J_п}{(h+t)^2} = \frac{2 \cdot 552\,000}{126^2} = 69{,}5\ см^2.$$

Пояс делаем из одного толстого листа. Для соблюдения нормальных пропорций между шириной пояса b и высотой балки h обычно принимают

$$b \cong 0{,}2h \div 0{,}3h \quad и \quad b \leqslant 30\ t.$$

При толщине листов $t = 2\ см$ получаем необходимую ширину пояса $b = 35\ см$, что удовлетворяет всем поставленным ограничениям.



Фиг. 267. Фиг. 268.

Вычислим величину момента инерции поясов при принятых размерах (фиг. 267 и 268):

$$J_п = 2 \cdot \left[\frac{35 \cdot 2^3}{12} + 63^2 \cdot 35 \cdot 2\right] = 2\,(23 + 277\,830) \cong 555\,700\ см^4.$$

Момент инерции всего сечения равен

$$J = 159\,000 + 555\,700 = 714\,700\ см^4.$$

Момент сопротивления

$$W = \frac{714\,700}{64} = 11\,150\ см^3.$$

Наибольшие напряжения

$$\sigma_{max} = \frac{17\,760\,000}{11\,150} = 1592\ кг/см^2,$$

т. е. всего на $0{,}5\%$ меньше допускаемых.

Вместо заклёпок приходится назначать сварные швы, прикрепляющие пояс к стенке. Можно сделать как сплошной шов, так и прерывистый (фиг. 266, 267 и 268).

Примем следующие обозначения: m — расчётная высота сечения шва; c — расчётная длина участка шва (*шпонки*); a — расстояние между серединами шпонок; $[\tau_э]$ — допускаемое напряжение на срезывание в материале шва.

Шпонки в сварной балке играют ту же роль, что заклёпки в клёпаной балке. Поэтому размеры шпонок и расстояние между ними следует определять так же, как это сделано в предыдущем параграфе. Каждая пара шпонок (слева и справа от вертикального листа) берёт на себя силу, равную

$$N=\frac{QS_{\text{п}}a}{J}.$$

Условие прочности шпонки на срезывание имеет вид

$$\tau=\frac{N}{2mc}=\frac{QS_{\text{п}}a}{2Jmc}\leqslant[\tau_{\text{э}}]. \tag{16.4}$$

Отсюда

$$\frac{a}{c}\leqslant\frac{2Jm\,[\tau_{\text{э}}]}{QS_{\text{п}}}. \tag{16.5}$$

Задаваясь высотой шва m, находим отношение $\frac{a}{c}$. Величина m не должна быть меньше 4 *мм*.

Наибольшее расстояние в свету между шпонками должно быть не больше 16δ и во всяком случае не больше 250 *мм* (δ — наименьшая толщина свариваемых листов). Длина же шпонки должна удовлетворять условию

$$c_{\min}\geqslant 4m \text{ и во всяком случае } c_{\min}\geqslant 40 \text{ мм}.$$

Каждая шпонка шва является очагом концентрации местных напряжений, что при хрупком состоянии материала в зоне сварки очень нежелательно. Прерывистые швы не допускают применения автоматической сварки. Поэтому Т. У. на ответственные металлические конструкции рекомендуют применение сплошных швов по всей длине соединяемых элементов.

При сплошном шве условие прочности на срез по ломаному сечению $1-1$ напишется так:

$$\tau=\frac{Q\cdot S_{\text{п}}}{J2m}\leqslant[\tau_{\text{э}}], \tag{16.6}$$

откуда

$$m=\frac{QS_{\text{п}}}{J\cdot 2\,[\tau_{\text{э}}]}. \tag{16.7}$$

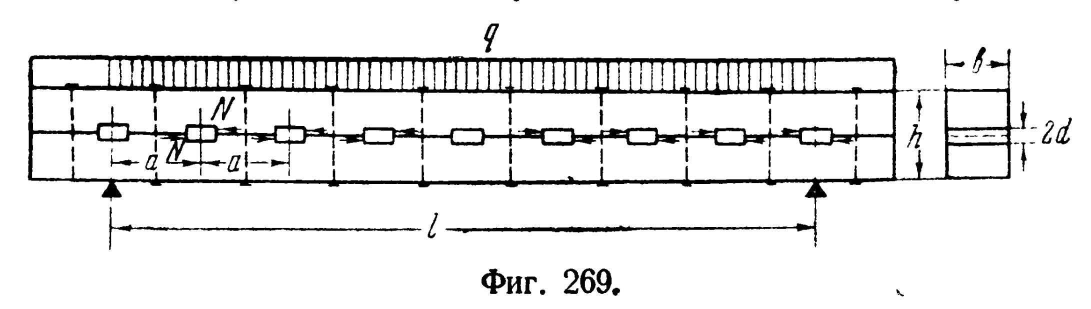
§ 104. Расчёт деревянных составных балок.

В § 91 мы рассмотрели работу деревянной балки, составленной из двух одинаковых, положенных друг на друга брусьев.

На практике для соединения частей деревянной балки часто применяют шпонки, играющие ту же роль, что заклёпки и сварные шпонки в металлических балках. Сейчас применяется очень большое число различных типов

шпоночных соединений, но все эти типы развились из наиболее простого, проверочный расчёт которого мы и рассмотрим.

Представим себе балку, составленную из двух сосновых брусьев прямоугольного сечения, соединённых дубовыми шпонками и стянутых болтами

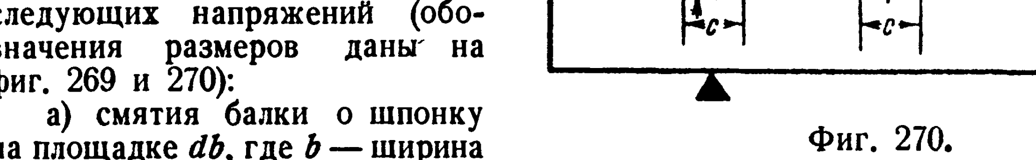


Фиг. 269.

(фиг. 269). При работе балки каждая шпонка воспринимает от одного бруска и передаёт другому силу

$$N = \frac{QS_{п}a}{J}, \tag{16.8}$$

где $S_{п}$ — статический момент половины сечения шпоночной балки относительно нейтральной оси. Характер действия сил N на шпонку показан на фиг. 269.



Фиг. 270.

Сила N, стремящаяся сдвинуть верхний брус относительно нижнего, передаётся на шпонку и вызывает появление следующих напряжений (обозначения размеров даны на фиг. 269 и 270):

а) смятия балки о шпонку на площадке db, где b — ширина балки, $2d$ — высота шпонки;

б) скалывания балки на участке между шпонками по площадке $(a - c)\ b$;

в) смятия шпонки о балку по площадке db;

г) скалывания шпонки по площадке cb.

Для допускаемых по этим площадкам напряжений можно принять следующие значения:

$[\sigma_{см}]$ = на смятие вдоль волокон = 70 $кг/см^2$ }
$[\tau]$ = на скалывание вдоль волокон = 12 $кг/см^2$ } для материала балки (сосна);

$[\sigma_{см}]_{90}$ = на смятие поперёк волокон = 50 $кг/см^2$ }
$[\tau]_{90}$ = на скалывание поперёк волокон в тангенциальном направлении = 10 $кг/см^2$ } для материала шпонок (дуб).

Условия прочности для указанных четырёх площадок напишутся так:

$$\frac{N}{db} \leqslant [\sigma_{см}]; \tag{16.9}$$

$$\frac{N}{db} \leqslant [\sigma_{см}]_{90}; \tag{16.10}$$

$$\frac{N}{(a - c)\ b} \leqslant [\tau]; \tag{16.11}$$

$$\frac{N}{cb} \leqslant [\tau]_{90}. \tag{16.12}$$

Балка в целом должна удовлетворять условию прочности

$$\sigma = \frac{M_{max} z_{max}}{J} = \frac{M_{max}}{W} \leqslant [\sigma],$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на растяжение или сжатие при изгибе балки, принимаемое равным 80 *кг/см²*.

Величину J в данном случае следовало бы вычислять с учётом ослабления сечения шпонкой по формуле:

$$J = \frac{b}{12}[h^3 - (2d)^3]. \qquad (16.13)$$

Так как глубина врубок d составляет обычно $1/10 \div 1/20\ h$, то ослабление сечения врубками, вычисленной по этой формуле, получается порядка 0,1%. Между тем, многочисленные опыты показывают, что за счёт податливости соединений балка составного сечения значительно слабее цельной балки.

Некоторые технические условия предлагают поэтому расчётный момент сопротивления W определять как для цельного бруса с умножением его затем на понижающий коэффициент 0,8, если балка состоит из двух брусьев или на 0,7, если она состоит из трёх брусьев.

Пример 72. Проверить напряжения в деревянной балке по следующим данным: нагрузка равномерно распределена по длине балки и равна $q = 1{,}25$ *т/м*; пролёт балки $l = 6$ *м* (фиг. 269); высота балки $h = 42$ *см*; ширина $b = 30$ *см*; ширина шпонки $c = 12$ *см*, толщина шпонки $2d = 4$ *см*; расстояние между осями шпонок (шаг шпонок) $a = 22$ *см*. Допускаемые напряжения приведены на стр. 343.

Наибольшие нормальные напряжения от изгиба (13.15):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{0{,}8\,W} = \frac{ql^2 \cdot 6}{8 \cdot 0{,}8 \cdot bh^2} = \frac{3 \cdot 1{,}25 \cdot 6^2 \cdot 10^5}{3{,}2 \cdot 30 \cdot 42^2} = 79{,}8\ кг/см^2 < 80\ кг/см^2.$$

Сила взаимодействия между шпонкой и балкой (16.8):

$$N = \frac{QSa}{J} = \frac{qlbh^2a\,12}{2 \cdot 8 \cdot bh^3} = \frac{3 \cdot 1{,}25 \cdot 6 \cdot 22}{4 \cdot 42} = 2{,}95\ т.$$

Напряжения смятия проверяются для дуба поперёк волокон, так как для сосны вдоль волокон значение допускаемого напряжения на смятие значительно больше:

$$\sigma_{см_{90}} = \frac{N}{bd} = \frac{2950}{30 \cdot 2} = 49{,}2\ кг/см^2 < 50\ кг/см^2.$$

Напряжения скалывания [формулы (16.11) и (16.12)]:

$$\text{в балке: } \tau = \frac{N}{b(a-c)} = \frac{2950}{30 \cdot 10} = 9{,}8\ кг/см^2 < 12\ кг/см^2;$$

$$\text{в шпонке: } \tau_{90} = \frac{N}{bc} = \frac{2950}{30 \cdot 12} = 8{,}2 кг/см^2 < 10 кг/см^2.$$

Заданные размеры балки удовлетворяют всем условиям прочности.

ГЛАВА XVII. РАСЧЁТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК.

§ 105. Расчёт железобетонной балки по допускаемым напряжениям.

На практике довольно часто встречаются балки, составленные из разнородных материалов. Деревянную балку можно укрепить снизу стальным листом. В железобетонных балках в растянутую зону помещают стальную арматуру.

В этих случаях предполагается, что разнородные элементы, из которых изготовлена балка, соединены друг с другом так, что обеспечена их совместная работа. Считают, что поперечные сечения такой сложной балки при деформации остаются плоскими и поворачиваются вокруг нейтральных осей. Как следствие из этого положения вытекает линейный закон распределения удлинений и укорочений по высоте балки:

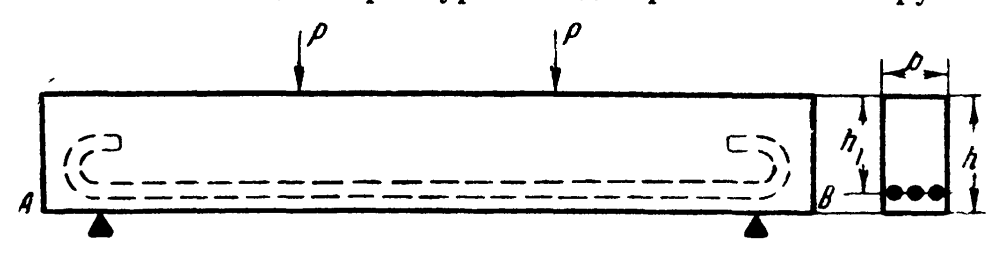
$$\varepsilon = \frac{z}{\rho}.$$

Формула для вычисления нормальных напряжений имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{z}{\rho};$$

при этом в расчётах, конечно, приходится учитывать разные значения модулей E для материалов такой сложной балки.

Схема железобетонной балки показана на фиг. 271. В нижней (растянутой) части балки помещена арматура в виде трёх стальных прутьев.



Фиг. 271.

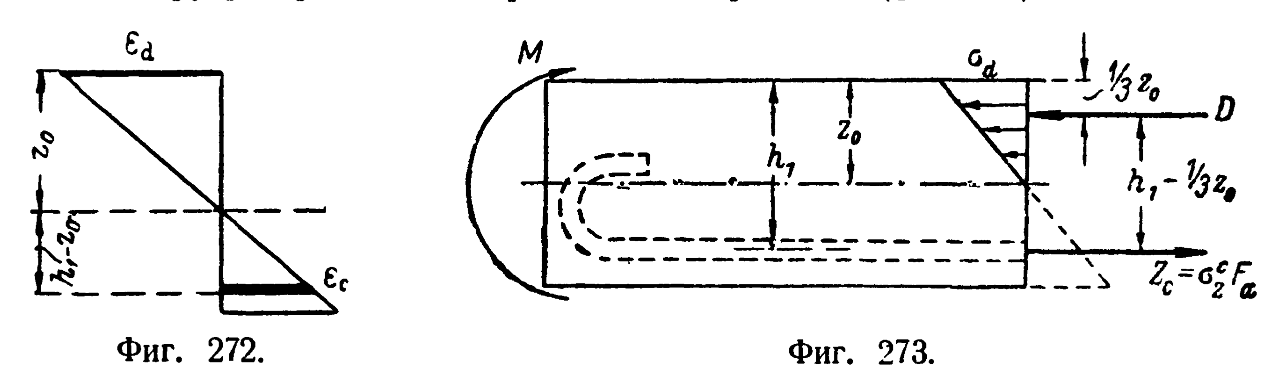
При расчёте такой балки принято считать, что:

1) бетон не берёт на себя растягивающих напряжений;

2) арматура благодаря крюкам и сцеплению с бетоном работает совместно с последним и воспринимает все растягивающие усилия;

3) сечения балки остаются плоскими.

В целях получения расчётных формул для рассматриваемой балки надо повторить в основном вывод, изложенный в §§ 78 и 79. Верхние волокна балки сжаты, нижние растянуты, нейтральный слой проходит на некотором расстоянии z_0 от верхнего края балки. Принимая, что сечения при изгибе остаются плоскими, получаем, что относительные удлинения и укорочения меняются по закону прямой линии (фиг. 272). Умножая относительную деформацию в каждой точке на модуль упругости соответствующего материала, получаем эпюру распределения нормальных напряжений (фиг. 273).



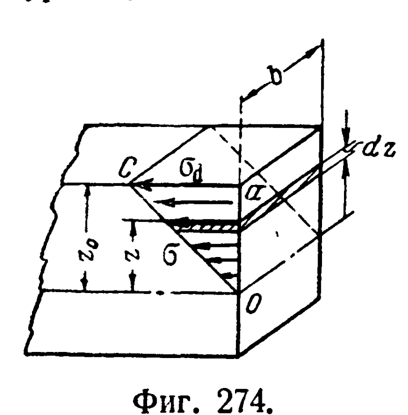
Фиг. 272. Фиг. 273.

Напряжения в стальной арматуре будут значительно больше, чем в бетоне, так как модуль упругости стали $E_с$ примерно в 10 ÷ 15 раз больше модуля упругости бетона $E_б$. Можно в среднем считать

$$E_с = 2\cdot 10^6\ кг/см^2;\ E_б = 140\,000 \div 200\,000\ кг/см^2.$$

Наибольшие сжимающие напряжения в бетоне обозначим σ_d. Растягивающие напряжения в стали можно считать одинаковыми по всей площади арматуры, так как её диаметр *мал* по сравнению с высотой сечения; эти напряжения обозначим σ_c.

Назовём расстояние от сжатого края сечения до центра тяжести арматуры h_1; площадь сечения арматуры F_a; высоту сечения h; ширину b; отношение модулей упругости $\frac{E_c}{E_б} = n = 10 \div 15$. Расстояние нейтральной оси от верха балки z_0 и величину напряжений определим из условия равновесия отсечённой части балки под действием нормальных напряжений и изгибающего момента.



Фиг. 274.

Эти условия приводятся к двум: 1) сумма сжимающих напряжений равна сумме растягивающих и 2) сумма моментов внутренних усилий относительно нейтральной оси O равна изгибающему моменту.

Сжимающее усилие D можно вычислить приёмом, аналогичным вычислению усилия N_1 в § 91. На площадку $b\,dz$ в расстоянии z от нейтральной оси (фиг. 274) действует сила $\sigma b\,dz$; вся сумма сжимающих усилий равна

$$D = \int_0^{z_0} \sigma b\,dz;$$

но по линейному закону для напряжений

$$\sigma = \sigma_d \frac{z}{z_0};$$

отсюда

$$D = \int_0^{z_0} \sigma_d \frac{z}{z_0} b\,dz = \frac{1}{2} \sigma_d z_0 b.$$

Растягивающее усилие в арматуре равно

$$Z_c = F_a \sigma_c.$$

Первое уравнение равновесия принимает вид (фиг. 273):

$$-D + Z_c = 0, \text{ или } D = Z_c,$$

или

$$-\frac{1}{2}\sigma_d z_0 \cdot b + F_a \sigma_c = 0. \tag{17.1}$$

Напряжение σ_c можно выразить через σ_d.

Из линейного закона для деформаций (фиг. 272) имеем:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_d \frac{h_1 - z_0}{z_0}.$$

Но

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_c \text{ и } \sigma_d = E_б \varepsilon_d,$$

следовательно,

$$\sigma_c = \sigma_d \frac{E_c}{E_б} \frac{h_1 - z_0}{z_0} = \sigma_d n \frac{h_1 - z_0}{z_0}.$$

Уравнение равновесия (17.1) принимает вид

$$-\frac{1}{2}\sigma_d z_0 b + F_a\sigma_d n\,\frac{h_1 - z_0}{z_0} = 0.$$

Преобразуя, получаем:

$$z_0^2 + \frac{2F_a n}{b}\,z_0 - \frac{2F_a n h_1}{b} = 0.$$

Из этого уравнения находим положение нейтрального слоя z_0:

$$z_0 = \frac{nF_a}{b}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2h_1 b}{nF_a}}\,\right]. \tag{17.2}$$

Зная z_0, можем составить второе уравнение равновесия. При этом следует учесть, что усилие D приложено в центре тяжести соответствующего треугольника; расстояние усилия D от верха балки равно $\frac{z_0}{3}$, а плечо пары усилий D и Z равно $h_1 - \frac{z_0}{3}$. Второе уравнение имеет вид:

$$M - D\left(h_1 - \frac{1}{3}\,z_0\right) = 0,$$

или

$$M - \frac{1}{2}\sigma_d z_0 b\left(h_1 - \frac{1}{3}\,z_0\right) = 0. \tag{17.3}$$

Отсюда получаем формулу напряжений в бетоне:

$$\sigma_d = \frac{2M}{bz_0\left(h_1 - \frac{1}{3}\,z_0\right)}. \tag{17.4}$$

Зная σ_d, находим и σ_c, т. е. напряжение в арматуре:

$$\sigma_c = \frac{Z_c}{F_a} = \frac{D}{F_a} = \frac{\sigma_d z_0 b}{2F_a} = \frac{M}{F_a\left(h_1 - \frac{1}{3}\,z_0\right)}. \tag{17.5}$$

Проверка прочности в этом случае должна быть произведена по формулам

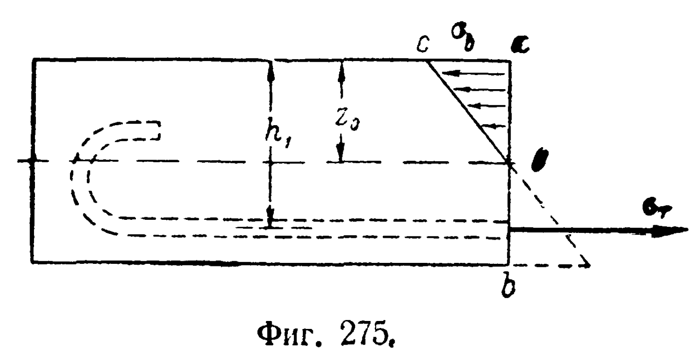
$$\max\sigma_d \leqslant [\sigma_{сж}] \quad\text{и}\quad \max\sigma_c \leqslant [\sigma],$$

где $[\sigma_{сж}]$ — допускаемое напряжение для бетона на сжатие, а $[\sigma]$ — для стали на растяжение.

§ 106. Расчёт железобетонной балки по допускаемым нагрузкам.

Описанный выше способ предполагает, что *опасным* состоянием балки будет такое, при котором либо наибольшие напряжения в бетоне дойдут до предела прочности $\sigma_в$, либо напряжения в арматуре — до предела текучести $\sigma_т$. Крайне редко может случиться, что оба эти обстоятельства наступят одновременно; обычно раньше наступает явление текучести в арматуре; бетон же имеет ещё некоторый запас по отношению к пределу прочности.

Опыты показывают, что при этом состоянии балки её грузоподъёмность ещё не исчерпана полностью. Хотя бетон и является, вообще говоря, хрупким материалом, но *железобетонная* балка ведёт себя как балка из своеобразного пластичного материала. После достижения напряжениями в арматуре предела текучести для увеличения деформации балки надо увеличивать нагрузку. Арматура продолжает течь при постоянном напряжении $\sigma_т$, а напряжения в бетоне у края балки возрастают, пока не дойдут до предела прочности на сжатие $\sigma_в$. Тогда бетон в сжатой зоне выкалывается, и балка в целом разрушается, теряя свою грузоподъёмность. Распределение нормальных напряжений в балке в этот момент показано на фиг. 275.



Фиг. 275.

Изгибающий момент при этой стадии работы балки и будет предельным, разрушающим; его величину $M_т^к$ можно вычислить как момент пары из сжимающего усилия D в бетоне и растягивающего $Z_с$ — в арматуре. Усилия D и $Z_с$ выражаются теперь так:

$$D=\frac{1}{2}\sigma_в z_0 b;\quad Z_с=\sigma_т F_а.$$

Расстояние z_0 найдётся опять из условия равновесия:

$$-D+Z_с=0;\ \frac{1}{2}\sigma_в z_0 b=\sigma_т F_а;\ z_0=\frac{2\sigma_т F_а}{\sigma_в b}.$$

Теперь

$$M_т^к=D\left(h_1-\frac{1}{3}z_0\right)=\frac{1}{2}\sigma_в b z_0\left(h_1-\frac{2\sigma_т F_а}{3\sigma_в b}\right)=$$

$$=\sigma_в b h_1^2\frac{\sigma_т F_а}{\sigma_в b h_1}\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_т F_а}{\sigma_в b h_1}\right).$$

Назовём величину $\frac{\sigma_т F_а}{\sigma_в b h_1}$ буквой α (отвлечённое число); тогда

$$M_т^к=\sigma_в b h_1^2\alpha(1-0{,}67\alpha). \qquad (17.6)$$

При проверке балки по допускаемым нагрузкам надо написать $M_{max}\leqslant M_{доп}$; величина же допускаемого момента будет равна: $M_{доп}=\frac{M_т^к}{k}$, где k — коэффициент запаса.

При выводе формулы (17.6) мы предположили, что в момент достижения балкой предельной грузоподъёмности эпюра распределения напряжений в бетоне будет треугольником с наибольшей ординатой $\sigma_в$. На самом деле предельная грузоподъёмность балки оказывается ещё выше.

Бетон в сжатой зоне обычно усилен хомутами и при сжатии испытывает своеобразное явление текучести, постепенно разрушаясь (как и в сжатой колонне, § 28). Таким образом, как крайний случай можно принять, что

предельная грузоподъёмность балки будет достигнута в тот момент, когда во всей сжатой зоне напряжения в бетоне дойдут до предела прочности $\sigma_в$. Эпюра напряжений получит вид, показанный на фиг. 276. Усилия (фиг. 277) будут равны

$$D = \sigma_в z_0 b = Z_c = \sigma_т F_а.$$

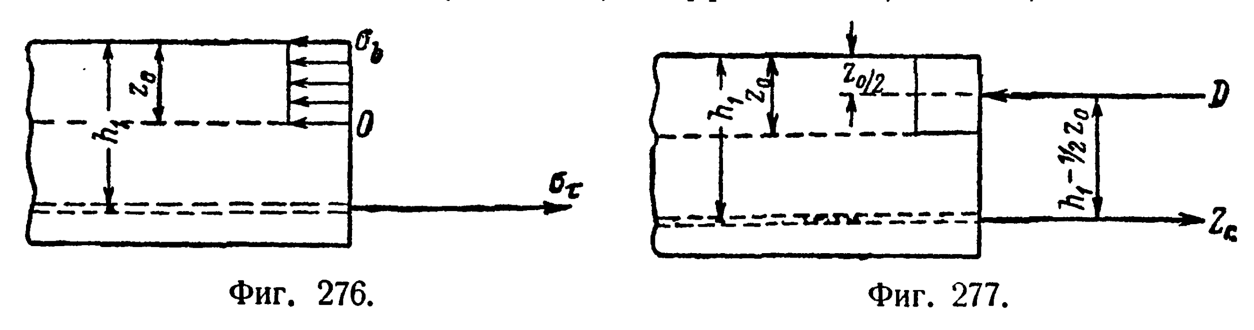
Расстояние z_0 будет равно

$$z_0 = \frac{\sigma_т F_а}{\sigma_в b}.$$

Разрушающий момент $M_т^к$ выразится формулой

$$M_т^к = D\left(h_1 - \frac{1}{2} z_0\right) = \sigma_в \frac{\sigma_т F_а}{\sigma_в b} b \left(h_1 - \frac{\sigma_т F_а}{2\sigma_в b}\right) = \sigma_в b h_1^2 \alpha (1 - 0{,}5\,\alpha). \quad (17.7)$$

Таким образом, два крайних предположения — треугольная и прямоугольная эпюры — дают при α (в скобках) коэффициенты 0,67 или 0,5. С опытами



Фиг. 276. Фиг. 277.

хорошо согласуется величина 0,53, которая вошла в окончательно принятую расчётную формулу:

$$M_т^к = \sigma_в b h_1^2 \alpha (1 - 0{,}53\,\alpha). \quad (17.8)$$

Изложенный метод расчёта железобетонных балок по допускаемым нагрузкам был впервые предложен в СССР проф. Лолейтом в 1932 г. Ряд опытов подтвердил правильность этого метода.

§ 107. Развитие теории изгиба.

Основные положения теории плоского изгиба, подтверждающиеся опытом и изложенные в §§ 78, 91, 93, кажутся нам теперь почти очевидными. Однако потребовалось много времени и труда, чтобы установить эти положения.

В 1638 г. в связи с задачами судостроения Галилей пытался связать величину разрушающего груза для балки, защемлённой одним концом и нагружённой на другом, с размерами её сечения. Галилей ошибочно считал при этом, что все волокна балки подвергаются растягивающим усилиям и не меняют своей длины.

В 1680 г. Мариотт произвёл опыты, которые привели его к заключению о том, что часть волокон балки растянута, а часть сжата. В 1705 г. Яков Бернулли высказал гипотезу плоских сечений, но сомневался в применимости закона Гука к сжатию. В 1776 г. Кулон дал теорию изгиба, уже близко стоящую к современной. К этому времени рядом опытов было уже доказано существование сжатой зоны в балке при изгибе. Потребовалось 138 лет, чтобы подойти к решению задачи, поставленной Галилеем.

Опыты последующих за этим лет отличались более тщательной постановкой, более точными измерениями деформаций. На помощь опыту Навье

привлёк уравнения теории упругости (1824 г.). Его продолжателем был Сен-Венан, развивший более точно теорию изгиба.

Многочисленные теоретические исследования, касающиеся действия поперечной силы и касательных напряжений, как уже указывалось, принадлежат Д. И. Журавскому. Им же подробно исследовалась работа связей при изгибе составных балок и даны расчётные формулы, сохранившие значение и по сие время. Работы Д. И. Журавского были опубликованы в 1855—1876 гг.

Теоретические исследования, касающиеся главных напряжений при изгибе («косых напряжений») и приводящие к современным расчётным формулам, впервые были приложены к расчёту мостовых балок Н. А. Белелюбским, опубликовавшим свои работы в 1870—1876 гг.

Исследования по изгибу тонких пластинок выполнялись в течение ряда лет, начиная с 1921 г., академиком Б. Г. Галеркиным. Глубокие теоретические исследования вопросов изгиба балок тонкостенного профиля принадлежат проф. В. З. Власову; они публикуются, начиная с 1939 г. Он же возглавил обширные опытные работы по изучению тонкостенных стержней.

Дальнейшее развитие строительной техники, появление новых материалов, новых представлений о работе материала в конструкции, расширение возможностей более точного опытного изучения материалов в связи с привлечением в лабораторную технику новых методов исследований требовали пересмотра и развития методов расчётов в области изгиба. Исторические ссылки по этим вопросам (железобетон, расчёт по допускаемым нагрузкам) приведены параллельно с их изложением в соответствующих разделах курса.

ОТДЕЛ VI.

ДЕФОРМАЦИИ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ.

ГЛАВА XVIII.

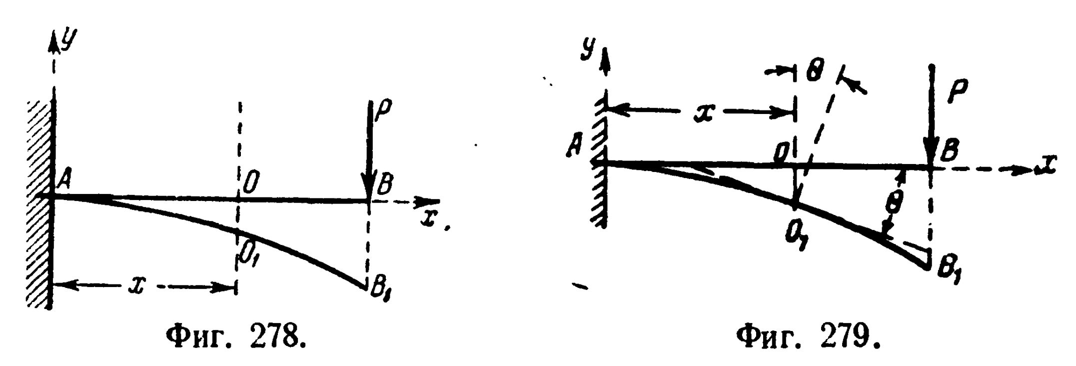
АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.

§ 108. Прогиб и поворот сечения балки.

При действии внешних сил, расположенных в одной из главных плоскостей инерции балки, наблюдается искривление её оси в *той же плоскости*, происходит так называемый плоский изгиб.

На фиг. 278 изображена в искажённом масштабе искривлённая ось балки, защемлённой одним концом и нагружённой на другом конце сосредоточенной силой. Центр тяжести O какого-либо сечения с абсциссой x перемещается в точку O_1.

Перемещение OO_1 центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки, называется прогибом балки в этом



Фиг. 278. Фиг. 279.

сечении или прогибом этого сечения балки. Прогиб будем обозначать буквой y.

Строго говоря, так как ось балки, лежащая в нейтральном слое, не меняет при изгибе своей длины, то точка O_1 сместится несколько в сторону от перпендикуляра к оси балки. Однако обычно прогибы y малы по сравнению с длиной балки, и указанное смещение в сторону является величиной уже 2-го порядка малости по отношению к длине балки, — им поэтому пренебрегают.

При деформации балки сечение, оставаясь плоским, поворачивается по отношению к своему прежнему положению. На фиг. 279 изображено сечение *1* до и после деформации. *Угол θ, на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения.* Для практических целей необходимо уметь вычислять прогибы и повороты для любого сечения балки.

Величина наибольшего прогиба может служить мерилом того, насколько искажается форма конструкции при действии внешних сил. Обычно с целью сохранения соединений частей балки от расшатывания и уменьшения колебаний под действием подвижной нагрузки ограничивают величину наибольшего прогиба балки под нагрузкой. Так, для стальных балок в зависимости от назначения их ставят условием, чтобы прогиб не превосходил $\frac{1}{1000} \div \frac{1}{250}$ доли пролёта.

Кроме того, знание деформаций балки нам потребуется при решении статически неопределимых задач, когда число опорных реакций превышает число уравнений статики. Дополнительные уравнения могут быть написаны лишь путём изучения деформаций конструкции. Для того чтобы полностью знать деформацию балки, необходимо уметь вычислить для каждого сечения его прогиб y и угол поворота θ. Оба они будут функциями от x — расстояния сечения от начала координат; между y и θ для каждого сечения имеется определённая зависимость.

Выберем систему координат, которой будем в дальнейшем пользоваться. Начало координат расположим в одной из точек первоначальной оси балки, которую всегда будем выбирать за ось x; ось y будем направлять перпендикулярно первоначальной оси балки вверх. При таких условиях уравнение

$$y = f(x) \tag{18.1}$$

представит собой уравнение кривой, по которой изогнётся ось балки под нагрузкой; это будет *уравнение изогнутой оси балки.*

Касательная к изогнутой оси балки (фиг. 279) в точке O_1 составит с осью x угол, равный θ, т. е. углу поворота поперечного сечения относительно первоначального положения. С другой стороны, тангенс угла, образованного касательной к кривой $y = f(x)$ с осью x, как известно, равен

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}. \tag{18.2}$$

Так как на практике прогибы балки обычно малы по сравнению с пролётом, то θ бывают очень малыми углами, обычно не больше 1°. Для таких углов можно считать, что тангенс угла равен углу, выраженному в радианах. Отсюда следует, что

$$\theta = \frac{dy}{dx}, \tag{18.3}$$

т. е. *угол поворота сечения равен первой производной по x от прогиба y в этом сечении.*

Таким образом, задача изучения деформации балки сводится к получению уравнения изогнутой оси $y = f(x)$; зная его, мы можем вычислить дифференцированием и угол поворота для любого сечения балки.

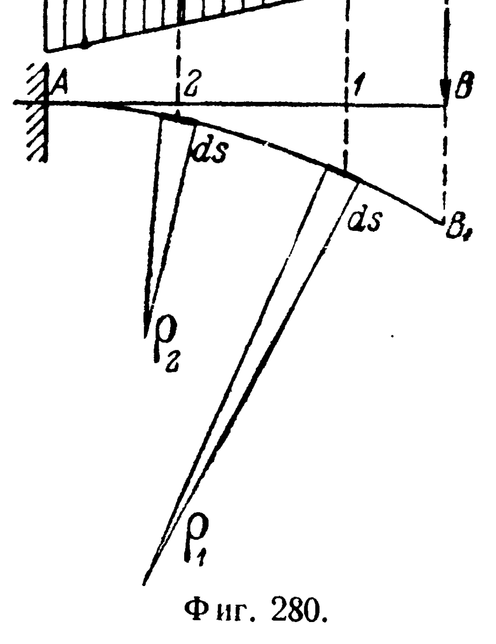
§ 109. Дифференциальное уравнение изогнутой оси.

Для того чтобы получить y как функцию от x, надо установить зависимость деформации балки от внешних сил, изгибающих её, от ее размеров и материала. Такая зависимость была нами получена уже раньше в § 78.

Используем формулу (13.10), полученную нами при рассмотрении чистого изгиба. Распространяя её на общий случай изгиба, то есть пренебрегая влиянием поперечной силы на деформации балки, можем написать

$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EJ},$$

где $\rho(x)$ — радиус кривизны участка изогнутой оси балки между двумя смежными сечениями на расстоянии x от начала координат; $M(x)$ — изгибающий момент в том же сечении; EJ — жёсткость балки. Влияние $Q(x)$ на деформации балки обычно невелико; метод его учёта дан в § 132.



Фиг. 280.

На фиг. 280 изображено изменение радиусов кривизны по мере изменения изгибающего момента. Для получения уравнения изогнутой оси необходимо использовать математическую зависимость между радиусом кривизны оси и координатами её точек x и y:

$$\frac{1}{\rho(x)}=\pm\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}. \qquad (18.4)$$

Подставляя это значение для кривизны $\frac{1}{\rho(x)}$ в формулу (13.10), получаем дифференциальное уравнение, связывающее y, x, $M(x)$ и EJ:

$$\pm\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}=\frac{M(x)}{EJ}. \qquad (18.5)$$

Это — так называемое *дифференциальное* уравнение изогнутой оси, или, как его часто называют, «дифференциальное уравнение упругой линии».

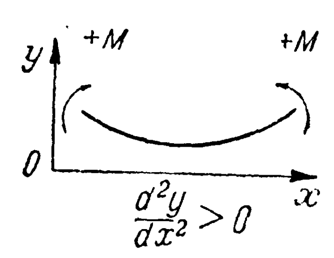
Для громадного большинства практически встречающихся задач величина $\frac{dy}{dx}$, представляющая собой угол поворота сечения балки,

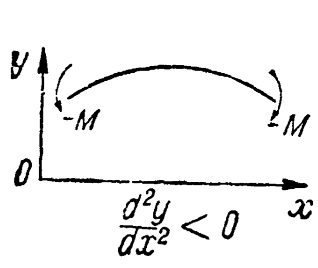
очень малая величина, квадратом которой можно пренебречь по сравнению с единицей; тогда уравнение (18.5) упрощается:

$$\pm\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EJ} \text{ или } \pm EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M(x). \qquad (18.6)$$

Это уравнение называется *приближённым дифференциальным* уравнением изогнутой оси балки.

Правило знаков для изгибающего момента установлено независимо от направления координатных осей, вторая же производная, как известно, положительна, если в сторону положительной оси y обращена *вогнутость* кривой, и отрицательна,— если *выпуклость* (фиг. 281). Таким образом, знак изгибающего момента $M(x)$ не зависит от расположения координатных осей; знак же второй производной — зависит.





Фиг. 281.

При направлении оси y вверх в уравнении (18.6) следует оставить знак $+$, а при направлении вниз знак $-$.

Условимся в дальнейшем всегда ось y направлять вверх и дифференциальное уравнение (18.6) писать в виде

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M(x). \qquad (18.7)$$

Знак изгибающего момента при этом будем ставить по прежним правилам.

Для получения из дифференциального уравнения изогнутой оси уравнения прогибов $y=f(x)$ необходимо произвести интегрирование уравнения (18.7). Выражение для $M(x)$ является функцией от x; поэтому, интегрируя, получаем:

$$EJ\frac{dy}{dx}=\int M(x)\,dx+C;$$

интегрируя второй раз, имеем

$$EJy=\int dx\int M(x)\,dx+Cx+D.$$

Таким образом, мы получили уравнение углов поворота:

$$\theta=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{EJ}\left[\int M(x)\,dx+C\right] \qquad (18.8)$$

и уравнение прогибов:

$$y=\frac{1}{EJ}\left[\int dx\int M(x)\,dx+Cx+D\right]. \qquad (18.9)$$

В эти уравнения входят постоянные интегрирования C и D. Порядок вычисления этих постоянных будет показан на примерах.

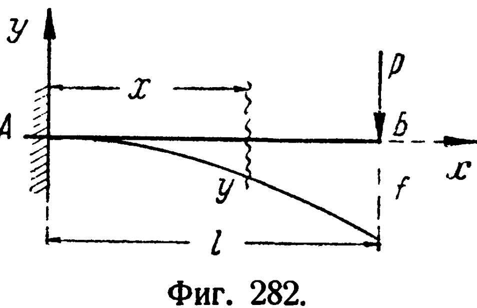
Прежде чем перейти к практическим примерам, необходимо ещё раз подчеркнуть, что уравнение (18.7) является *приближённым*; та ошибка, которую мы допустили, пренебрегая величиной $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ по сравнению с единицей, практически *мала* только в тех случаях, когда деформации балок малы по сравнению с их размерами. Если же это условие не соблюдено и углы поворота сечений балок таковы, что квадратом их величины нельзя пренебречь по сравнению с единицей, то приходится обращаться к интегрированию уже полного уравнения (18.5).

Такие случаи могут быть при изучении деформаций тонких пружин, тонкой фанеры, вообще при изгибе гибких балок.

§ 110. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки, защемлённой одним концом.

Пример 73. Рассмотреть балку, защемлённую концом A и нагружённую на другом конце силой P (фиг. 282); пролёт балки назовём l, жёсткость EJ. Начало координат назначим в точке A; ось y направим вверх, ось x — вправо. Напишем дифференциальное уравнение изогнутой оси (18.7):

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M(x);$$



Фиг. 282.

для вычисления изгибающего момента возьмём *произвольное* сечение на расстоянии x *от начала координат*; изгибающий момент в этом сечении равен $M(x)=-P(l-x)$. Тогда

$$EJy''=-P(l-x).$$

Это уравнение интегрируем два раза:

$$EJy'=-P\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+C. \quad (18.10)$$

$$EJy=-P\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+Cx+D. \quad (18.11)$$

Для определения C и D отыщем в балке сечения, для которых мы заранее знаем величины прогиба и угла поворота. Таким является опорное сечение A; для него при $x=0$

$$y=0;\ \theta=\frac{dy}{dx}=y'=0.$$

Подставляя эти значения сначала в уравнение (18.10), а затем в (18.11), получаем:

$$C=0 \text{ и } D=0.$$

Как видно из уравнений углов поворота и прогибов, произвольные постоянные C и D, делённые на жёсткость балки EJ, дают значения соответственного угла поворота и прогиба сечения балки в начале координат. Постоянные C и D — *именованные числа*, с размерностью: C — [сила $\times$ длина^2] и D — [сила $\times$ длина^3].

Постоянные интегрирования обратились в нуль, что является следствием выбора начала координат в защемлённом сечении балки. При построении эпюр мы отсчитывали абсциссу x от нагружённого конца балки; здесь оказывается более выгодным для уменьшения вычислений при определении C и D отсчитывать x от защемлённого конца, что несколько усложняет выражение для изгибающего момента, но облегчает нахождение деформаций.

Определив постоянные C и D, мы можем преобразовать выражения для y и θ таким образом, чтобы в скобках остались лишь отвлечённые числа, это упрощает в дальнейшем вычисления прогибов и углов поворота. Производим преобразования:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{Plx}{2EJ}\left[2 - \frac{x}{l}\right], \tag{18.12}$$

$$y = -\frac{Plx^2}{6EJ}\left[3 - \frac{x}{l}\right]. \tag{18.13}$$

Пользуясь этими выражениями, найдём наибольшие значения для y и θ; так как инженера интересует наибольшее по *абсолютной* величине значение прогиба, то следует отыскивать как аналитический *максимум* функции y при $\theta = \frac{dy}{dx} = 0$, так и *наибольшее* её значение на границе участка. В нашем примере наибольшего по абсолютной величине значения y достигает в точке B, где θ не равно нулю.

Прогибы, вычисляемые в отдельных точках, будем обозначать буквой f с индексом, указывающим место прогиба. Для рассматриваемого случая в точке B при $x = l$

$$f_B = -\frac{Pl^3}{3EJ}. \tag{18.14}$$

Знак минус означает, что прогиб направлен вниз. Наибольший угол поворота будет, очевидно, в том же сечении; он равен

$$\theta_B = -\frac{Pl^2}{2EJ}. \tag{18.15}$$

Знак минус означает, что сечение повернулось по часовой стрелке.

Для того чтобы оценить числовую величину деформаций балки, возьмём $P = 2$ *т*, $l = 2$ *м*, допускаемое напряжение $[\sigma] = 1400$ *кг/см*^{2} и подберём сечение двутавровой балки по сортаменту. Условие прочности имеет вид:

$$W \geqslant \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{1400} = 286 \text{ см}^3.$$

Возьмём балку № 24; для неё $W = 289$ *см*^{3} и $J = 3460$ *см*^{4}; принимая $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, получаем:

$$f_B = -\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 2^3 \cdot 10^6}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3460} = -0{,}77 \text{ см},$$

$$\theta_B = -\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 2^2 \cdot 10^4}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3460} = -\frac{1}{173} \text{ радиана} \approx \frac{1^\circ}{3}.$$

Из этого подсчета видно, что действительно деформации обычных балок малы; наибольший прогиб составляет

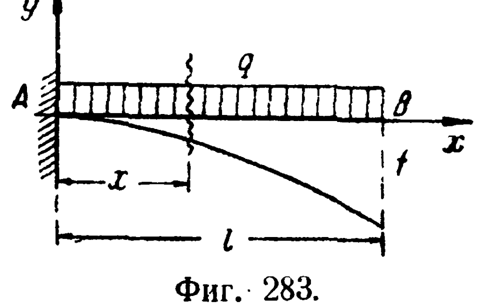
$$\frac{0{,}78}{200} = \frac{1}{260} \text{ долю пролета;}$$

квадрат же величины *наибольшего* угла поворота равен

$$\frac{1}{(173)^2} \approx \frac{1}{30\,000}.$$

Этой величиной, конечно, можно пренебречь по сравнению с единицей (см. формулу (18.5)).

Пример 74. Рассмотреть балку, защемлённую концом, нагружённую сплошной нагрузкой q *т/м* (фиг. 283).



Фиг. 283.

Повторяя ход вычислений, имеем:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x), \quad M(x) = -q\frac{(l-x)^2}{2};$$

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{2}(l-x)^2.$$

Возведя $(l-x)$ в квадрат и интегрируя трёхчлен почленно, как и в предыдущем примере, мы получили бы для произвольных постоянных нулевые значения. Рекомендуя это проделать самим учащимся, применим здесь другой приём интегрирования, представляющий особый интерес при решении задач с более сложной нагрузкой на балке. Так как $dx = -d(l-x)$, то, не раскрывая выражения $(l-x)^2$ и интегрируя первый раз по $[-d(l-x)]$, получаем:

$$EJ\frac{dy}{dx} = +\frac{q}{2}\int (l-x)^2\, d(l-x) + C,$$

или

$$EJ\frac{dy}{dx} = \frac{q}{6}(l-x)^3 + C.$$

Интегрируя первое слагаемое правой части по $[-d(l-x)]$, а второе по dx, находим:

$$EJy = -\frac{q}{24}(l-x)^4 + Cx + D.$$

При таком методе интегрирования постоянные C и D не определяют непосредственно угла и прогиба в начале координат и в нуль не обращаются.

Вычисляем произвольные постоянные:

$$\text{при } x=0 \quad \theta=\frac{dy}{dx}=0; \quad C=-\frac{ql^3}{6};$$

$$\text{при } x=0 \quad y=0; \quad D=\frac{ql^4}{24}.$$

Окончательные уравнения углов поворота и прогибов будут:

$$EJ\frac{dy}{dx}=\frac{q}{6}(l-x)^3-\frac{ql^3}{6}=-\frac{ql^2x}{6}\left[3-3\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right]. \quad (18.16)$$

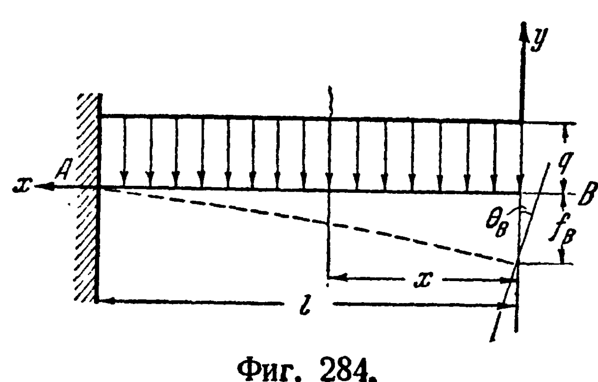
$$EJy=-\frac{q}{24}(l-x)^4-\frac{ql^3}{6}x+\frac{ql^4}{24}=-\frac{ql^2x^2}{24}\left[6-4\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right]. \quad (18.17)$$

Наибольшие деформации на правом конце балки при $x=l$ соответственно равны:

$$\theta_{max}=-\frac{ql^3}{6EJ}, \quad (18.18)$$

$$f_{max}=-\frac{ql^4}{8EJ}. \quad (18.19)$$

Для пояснения действий при ином расположении начала координат и ином направлении координатных осей рассмотрим эту же балку с той же нагрузкой q, $т/м$; однако начало координат возьмём в правом свободном конце. Ось x направим влево, ось y — попрежнему вверх (фиг. 284). Дифференциальное уравнение и его интегралы:



Фиг. 284.

$$EJy''=M(x)=-\frac{qx^2}{2},$$

$$EJy'=-\frac{qx^3}{6}+C, \quad (18.20)$$

$$EJy=-\frac{qx^4}{24}+Cx+D. \quad (18.21)$$

В сечении A угол поворота и прогиб равны нулю, т. е.

$$\text{при } x=l \quad y'=\theta=0;$$

$$\text{при } x=l \quad y=0.$$

Отсюда следует, что

$$C=\frac{ql^3}{6}; \quad D=-\frac{ql^4}{8}.$$

Окончательные уравнения углов поворота и прогибов примут следующий вид:

$$EJy'=-\frac{qx^3}{6}+\frac{ql^3}{6}; \quad (18.22)$$

$$EJy=-\frac{qx^4}{24}+\frac{ql^3x}{6}-\frac{ql^4}{8}. \quad (18.23)$$

Задавшись значением $x=0$ и вычисляя *наибольшие* значения θ_{max} и f_{max} в сечении B, получим:

$$\theta_{max}=\theta_B=\frac{ql^3}{6EJ}, \quad (18.18)$$

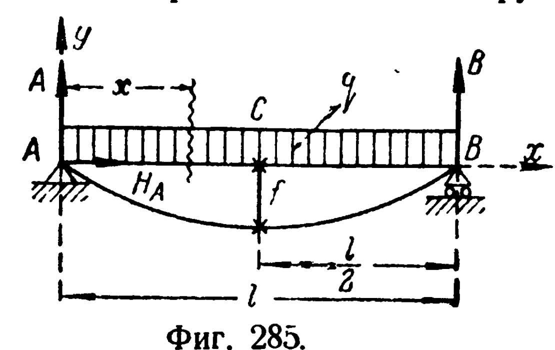
$$f_{max}=f_B=-\frac{ql^4}{8EJ}. \quad (18.19)$$

Как видно, и в этом случае постоянные C и D, делённые на жёсткость балки EJ, дают значения угла поворота и прогиба балки в начале координат.

В выбранной системе координат угол θ_B имеет положительное значение. В системе же координат, принятой ранее (фиг. 283), этот же угол имел отрицательное значение. На знаке f_B изменение в направлении оси x не отразилось.

§ 111. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки на двух опорах.

Пример 75. Разберём вычисление деформаций для балки, свободно лежащей на двух опорах и загружённой на всём пролёте сплошной нагрузкой q (фиг. 285). Начало координат выберем в левом опорном сечении, ось x направим вправо. В этой задаче, в отличие от двух предыдущих, для составления выражения $M(x)$ надо найти опорные реакции.



Фиг. 285.

По симметрии $A=B=\frac{ql}{2}$, а $H_A=0$.

Последовательно вычисляем:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M(x);\quad M(x)=+\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}=+\frac{q}{2}(lx-x^2);$$

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{2}(lx-x^2);$$

$$EJ\frac{dy}{dx}=\frac{q}{2}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+C; \tag{18.24}$$

$$EJy=\frac{q}{2}\left[\frac{lx^3}{6}-\frac{x^4}{12}\right]+Cx+D. \tag{18.25}$$

Нам известны следующие значения прогибов:

на опоре A, то есть при $x=0$ прогиб $y=0$
» » B, » » » $x=l$ » $y=0$.

Применяя формулу (18.25) сначала к сечению A, имеем:

$$D=0;$$

применяя же её к сечению B, получаем следующее уравнение:

$$0=\frac{q}{2}\left[\frac{l^4}{6}-\frac{l^4}{12}\right]+Cl, \tag{18.26}$$

откуда

$$C=-\frac{ql^3}{24}.$$

Формулы для y и $\frac{dy}{dx}$ принимают теперь вид:

$$EJ\frac{dy}{dx}=\frac{q}{2}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{ql^3}{24}=-\frac{ql^3}{24}\left[1-6\frac{x^2}{l^2}+4\frac{x^3}{l^3}\right], \tag{18.27}$$

$$EJy=\frac{q}{2}\left(\frac{lx^3}{6}-\frac{x^4}{12}\right)-\frac{ql^3}{24}x=-\frac{ql^3x}{24}\left[1-2\frac{x^2}{l^2}+\frac{x^3}{l^3}\right]. \tag{18.28}$$

Для отыскания наибольшего значения прогиба надо найти сечение, в котором $\theta = 0$; по симметрии это будет среднее сечение; при подстановке в формулу (18.27) значения $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}$ угол $\theta = \frac{dy}{dx}$ обращается в нуль; при этом

$$f_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EJ}. \qquad (18.29)$$

Наибольшие значения θ получаются для опорных сечений при $x = 0$ и $x = l$:

$$\theta_{\max} = \mp \frac{ql^3}{24EJ}. \qquad (18.30)$$

И в этом примере при определении произвольных постоянных интегрирования мы устанавливаем, что $\frac{D}{EJ}$ есть прогиб балки в начале координат, а $\frac{C}{EJ}$ — угол поворота опорного сечения A, совпадающего с началом координат.

Подберём сечение прокатной балки и определим величину её деформаций при следующих условиях: $q = 2$ *т/пог. м*; $l = 4$ *м*; $[\sigma] = 1400$ *кг/см*²; сечение — двутавровое; $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*². Так как наибольший изгибающий момент равен

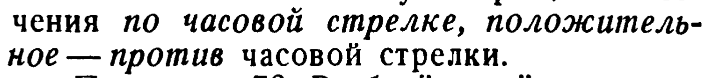
$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \cdot 4^2}{8} = 4 \text{ тм},$$

как и в примере § 110, то опять пригодна балка № 24; для неё $W = 289$ *см*³ и $J = 3460$ *см*⁴;

$$f_{\max} = -\frac{5 \cdot 20 \cdot 4^4 \cdot 10^8}{384 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3460} = -0{,}96 \text{ см},$$

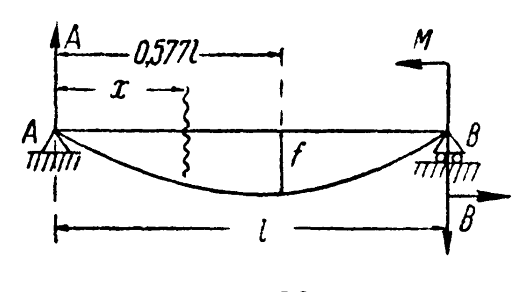
$$\theta_{\max} = \mp \frac{20 \cdot 4^3 \cdot 10^6}{24 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3460} = \mp \frac{1}{130} \text{ радиана}.$$

Во всех рассмотренных примерах, если мы направляем ось y вверх, а ось x вправо, то *отрицательное* значение θ соответствует вращению сечения *по часовой стрелке, положительное* — *против* часовой стрелки.



Пример 76. Разберём ещё один случай вычисления деформаций для балки, свободно лежащей на двух опорах с пролётом l. Нагрузим эту балку парой сил M, приложенной к правому опорному сечению (фиг. 286). Реакции A и B образуют пару с моментом M и равны

$$A = B = \frac{M}{l}.$$



Фиг. 286.

Расположим начало координат на левой опоре; тогда получим

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = +Ax = +\frac{M}{l}x,$$

$$EJ\frac{dy}{dx} = \frac{Mx^2}{l \cdot 2} + C,$$

$$EJy = \frac{Mx^3}{l \cdot 6} + Cx + D.$$

Постоянные интегрирования определяются из условий, выражающих равенство нулю прогибов на опорах A и B:

при $x=0$ прогиб $y=0$, откуда $D=0$;

» $x=l$ » $y=0$, откуда $C=-\frac{Ml}{6}$.

Таким образом,

$$\theta=\frac{dy}{dx}=-\frac{Ml}{6EJ}\left[1-3\frac{x^2}{l^2}\right],$$

$$y=-\frac{Mlx}{6EJ}\left[1-\frac{x^2}{l^2}\right].$$

Сечению с наибольшим прогибом соответствует $\frac{dy}{dx}=0$, поэтому

$$1-3\frac{x_0^2}{l^2}=0;$$

абсцисса этого сечения x_0 равна

$$x_0=\frac{l}{\sqrt{3}}=0{,}577l.$$

Наибольший прогиб равен

$$f=-\frac{Ml\cdot l}{6\sqrt{3}EJ}\left[1-\frac{l^2}{3l^2}\right]=-\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EJ}=-\frac{Ml^2}{15{,}6EJ},$$

прогиб же посредине пролёта равен

$$f_{\frac{l}{2}}=-\frac{Ml^2}{12EJ}\left[1-\frac{l^2}{4l^2}\right]=-\frac{Ml^2}{16EJ}.$$

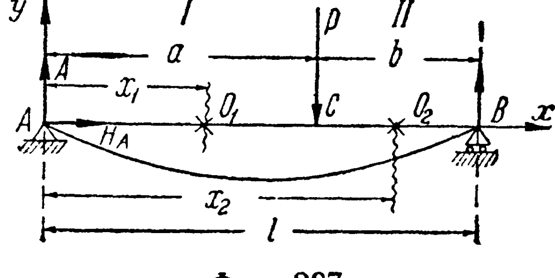
Разница с наибольшим прогибом составляет всего 2,5%; таким образом, даже при таком резко несимметричном случае нагрузки за наибольший прогиб *для балки на двух опорах можно* с достаточной *точностью принимать прогиб посредине пролёта.*

§ 112. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки при двух участках.

Если изгибающий момент на различных участках балки выражается различными формулами, приходится составлять столько дифференциальных уравнений, сколько участков на балке.

Возьмём балку на двух опорах пролётом l, нагружённой силой P на расстоянии a от левого и b от правого конца; пусть $a>b$ (фиг. 287). Опорные реакции балки равны

$$H_A=0,\ A=\frac{Pb}{l};\ B=\frac{Pa}{l}.$$



Фиг. 287.

Начало координат возьмём на левой опоре и ось x направим вправо.

Изгибающие моменты на первом и втором участках будут выражаться *различными формулами*; поэтому придётся взять два произвольных сечения с абсциссами x_1 и x_2 и написать два дифференциальных

уравнения. Величины y, M, C, D и абсциссу сечения будем помечать индексом 1 для первого участка и индексом 2 для второго.

При составлении выражения моментов для обоих участков будем рассматривать *левую* часть балки; тогда для сечения O_1 на первом участке:

$$M_1 = Ax_1 = \frac{Pb}{l} x_1;$$

для второго же участка (сечение O_2):

$$M_2 = Ax_2 - P(x_2 - a) = \frac{Pb}{l} x_2 - P(x_2 - a).$$

Интегрирование слагаемых вида $P(x_2 - a)$ будет производить, не раскрывая скобок, как это сделано в примере 74. При этих условиях вычисления располагаются следующим образом:

Первый участок	Второй участок
$EJy_1'' = M_1 = Ax_1;$	$EJy_2'' = M_2 = Ax_2 - P(x_2 - a);$
$EJy_1'' = \frac{Pb}{l} x_1;$	$EJy_2'' = \frac{Pb}{l} x_2 - P(x_2 - a);$
$EJy_1' = \frac{Pb}{l} \frac{x_1^2}{2} + C_1;$ (18.31)	$EJy_2' = \frac{Pb}{l} \frac{x_2^2}{2} - P\frac{(x_2 - a)^2}{2} + C_2;$ (18.33)
$EJy_1 = \frac{Pb}{l} \frac{x_1^3}{6} + C_1x_1 + D_1.$ (18.32)	$EJy_2 = \frac{Pb}{l} \frac{x_2^3}{6} - P\frac{(x_2 - a)^3}{6} + C_2x_2 + D_2.$ (18.34)

В выражения для прогибов и углов поворота вошли четыре постоянных интегрирования, ***вдвое больше,*** чем число участков. Для определения этих постоянных надо написать четыре уравнения. Эти уравнения всегда можно составить, как и в предыдущих случаях, рассматривая сечения балки, для которых нам что-либо известно о прогибе и угле поворота. Такими сечениями в рассматриваемой задаче являются: сечение раздела между первым и вторым участками — сечение C и опорные сечения A и B.

Сечение C, расположенное на границе двух участков, может быть отнесено как к первому, так и ко второму из них. Поэтому величину прогиба и угла поворота сечения C можно вычислить как из формул для первого участка, так и из формул для второго:

$$\text{т. е. при } x_1 = x_2 = a;$$

полученные величины для y и θ должны быть одинаковы, т. е. $y_1 = y_2$ и $\theta_1 = \theta_2$ или

$$EJy_1' = EJy_2'; \qquad (a)$$

$$EJy_1 = EJy_2. \qquad (b)$$

Таким образом, точка раздела участков всегда даёт нам два уравнения. Два других условия получим по данным на опорах:

В сечении A при $x_1 = 0$ прогиб $y_1 = 0$, (c)

» » B » $x_2 = l$ » $y_2 = 0$. (d)

Подставляя в формулы (18.31) и (18.33) вместо x_1 и x_2 величину a и приравнивая правые части, получаем по условию (a):

$$\frac{Pb}{l}\frac{a^2}{2} + C_1 = \frac{Pb}{l}\frac{a^2}{2} - P\frac{(a-a)^2}{2} + C_2,$$

откуда

$$C_1 = C_2. \qquad (18.35)$$

Подобным же образом из формул (18.32) и (18.34) получаем по условию (b):

$$\frac{Pb}{l}\cdot\frac{a^3}{6} + C_1 a + D_1 = \frac{Pb}{l}\frac{a^3}{6} - P\frac{(a-a)^3}{6} + C_2 a + D_2,$$

откуда

$$D_1 = D_2. \qquad (18.36)$$

Таким образом, постоянные интегрирования для обеих участков оказались одинаковыми. Это произошло благодаря принятому методу составления и интегрирования дифференциальных уравнений.

Применяя формулу (18.32) к опорному сечению A, получим на основании (c) $D_1 = 0$, а следовательно, и $D_2 = 0$. Применяя же формулу (18.34) к опорному сечению B, на основании (d) получаем

$$0 = \frac{Pb}{l}\cdot\frac{l^3}{6} - P\frac{(l-a)^3}{6} + C_2 l;$$

$$C_2 = -\frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2) = C_1.$$

Теперь формулы для y и θ получают вид:

Первый участок

$$\theta_1 = \frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{Pb}{l}\frac{x_1^2}{2} - \frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2)\right],$$

$$y_1 = \frac{1}{EJ}\left[\frac{Pbx_1^3}{6l} - \frac{Pbx_1}{6l}(l^2 - b^2)\right].$$

Второй участок

$$\theta_2 = \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{Pb}{2}\frac{x_2^2}{l} - P\frac{(x_2-a)^2}{2} - \frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2)\right],$$

$$y_2 = \frac{1}{EJ}\left[\frac{Pbx_2^3}{6l} - P\frac{(x_2-a)^3}{6} - \frac{Pbx_2}{6l}(l^2 - b^2)\right].$$

Выясним величину наибольшего прогиба f. Он будет в сечении, для которого $\theta = 0$. Из формулы для θ_1 видим, что при $x_1 = 0$, т. е. в сечении A,

$$\theta_1 = -\frac{Pbl}{6EJ}\left[1 - \frac{b^2}{l^2}\right] < 0;$$

в сечении же C при $x_1 = a$

$$\theta_1 = \frac{Pb}{6EJl}(3a^2 - l^2 + b^2) = \frac{Pab}{3EJl}(a - b);$$

так как $b < a$, то величина $\theta_1 > 0$.

Таким образом, θ_1 между точками A и C меняет знак, т. е. переходит через нуль. Значит, наибольший прогиб будет на первом участке. Чтобы найти абсциссу x_1^0 соответствующего сечения, подставим это значение x_1^0 в выражение для θ_1 и приравняем его нулю:

$$\frac{1}{EJ}\left[\frac{Pb}{l}\cdot\frac{(x_1^0)^2}{2} - \frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2)\right] = 0; \text{ отсюда } x_1^0 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}.$$

Подставляя в формулу для y_1, получаем:

$$f_{max} = -\frac{Pb(l^2 - b^2)\sqrt{3(l^2 - b^2)}}{27EJl} = -\frac{Pbl^2\sqrt{3}}{27EJ}\sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right)^3}. \quad (18.37)$$

Расстояние сечения с наибольшим прогибом от левой опоры будет меняться с изменением положения груза. Если сила P находится посредине пролёта, то

$$b = \frac{l}{2};\quad x_0 = \frac{l}{2};\quad f_{max} = -\frac{Pl^3}{48EJ}; \quad (18.38)$$

если же мы будем отодвигать силу P к правой опоре и приближать в пределе расстояние b к нулю, то

$$\text{при } b \to 0;\quad x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}577l.$$

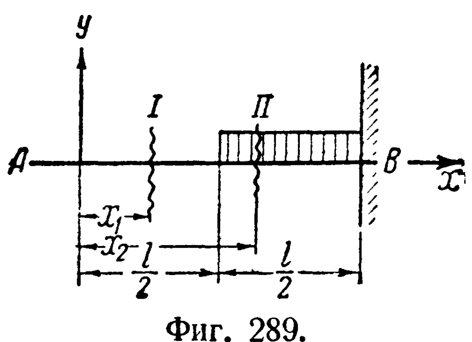
Фиг. 288.

Таким образом, при перемещении P от середины пролёта до опоры между точками D и B (фиг. 288) абсцисса точки с наибольшим прогибом меняется всего от $0{,}5l$ до $0{,}577l$ между точками D и F. Практически часто условно считают, что при действии любых нагрузок, изгибающих балку в одну сторону, наибольший прогиб для балки на двух опорах будет посредине пролёта. В частности, при расположении груза по фиг. 287 прогиб посредине пролёта равен

$$f_{\frac{l}{2}} = -\frac{Pb}{48EJ}[3l^2 - 4b^2]. \quad (18.39)$$

Числовыми подсчётами легко убедиться в малой разнице между f_{max} и $f_{\frac{l}{2}}$.

Пример 77. Подобрать сечение стальной двутавровой балки, нагружённой сплошной нагрузкой $q = 4$ *т/м* на полупролёте (фиг. 289), если допускаемое напряжение $[\sigma] = 1000$ *кг/см²*, а допускаемый прогиб не должен превышать $\frac{1}{1000}$ пролёта, равного $l = 2{,}0$ *м*.



Фиг. 289.

Поместим начало координат в точке A, ось x направим вправо, ось y — вверх. Нумерация участков показана на чертеже. Составляем дифференциальные уравнения изогнутой оси, отсчитывая x на обоих участках от точки A, и интегрируем.

Первый участок	Второй участок
$EJ\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = M_1,$	$EJ\frac{d^2y_2}{dx_2^2} = M_2,$
$EJ\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0,$	$EJ\frac{d^2y_2}{dx_2^2} = -\frac{q}{2}\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^2,$
$EJ\frac{dy_1}{dx_1} = C_1,$	$EJ\frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{q}{6}\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^3 + C_2,$
$EJy_1 = C_1x_1 + D_1.$	$EJy_2 = -\frac{q}{24}\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^4 + C_2x_2 + D_2.$

Постоянные интегрирования определяются из условий:

При $x_2 = l$	должно быть	$\frac{dy_2}{dx_2} = 0,$
» $x_2 = l$	» »	$y_2 = 0,$
» $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$	» »	$EJ\frac{dy_1}{dx_1} = EJ\frac{dy_2}{dx_2},$
» $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$	» »	$EJy_1 = EJy_2.$

Первые два условия дают:

$$C_2 = +\frac{ql^3}{48}, \quad D_2 = -\frac{7ql^4}{16\cdot 24} = -\frac{7ql^4}{384}.$$

Из третьего и четвёртого условий следует:

$$C_1 = C_2 = +\frac{ql^3}{48}, \quad D_1 = D_2 = -\frac{7ql^4}{384}.$$

Так как наибольший прогиб будет на конце балки, напишем в окончательном виде уравнение прогибов лишь для первого участка:

$$y_1 = \frac{1}{EJ}\left[+\frac{ql^3}{48}x_1 - \frac{7ql^4}{384}\right] = -\frac{ql^4}{384EJ}\left[-8\frac{x_1}{l} + 7\right].$$

Наибольший прогиб равен (при $x = 0$) $f = -\frac{7ql^4}{384EJ}$.

Теперь из условия жёсткости мы можем определить J:

$$\frac{f}{l} = \frac{7ql^3}{384\,EJ}; \quad J = \frac{7ql^3}{384E\left(\frac{f}{l}\right)} = \frac{7\cdot 40\cdot 8\cdot 10^6\cdot 10^3}{384\cdot 2\cdot 10^6} = 2910 \text{ см}^4.$$

Необходимо поставить двутавр № 24 с моментом инерции $J = 3460$ *см⁴*.

Определим момент сопротивления из условия прочности:

$$W \geqslant \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{q\frac{l^2}{8}}{[\sigma]} = \frac{40\cdot 4\cdot 10^4}{8\cdot 10^3} = 200 \text{ см}^3.$$

Достаточно было бы поставить двутавр № 20а с $W = 203$ *см*^{3}. Следовательно, сечение определяется из условия жёсткости.

§ 113. Приёмы составления и интегрирования дифференциального уравнения при нескольких участках.

А. *Метод уравнивания произвольных постоянных.* Разобранные в § 112 примеры показывают, что при определённом порядке составления и интегрирования дифференциальных уравнений изогнутой оси балки можно достигнуть сокращения числа произвольных постоянных до двух: C и D.

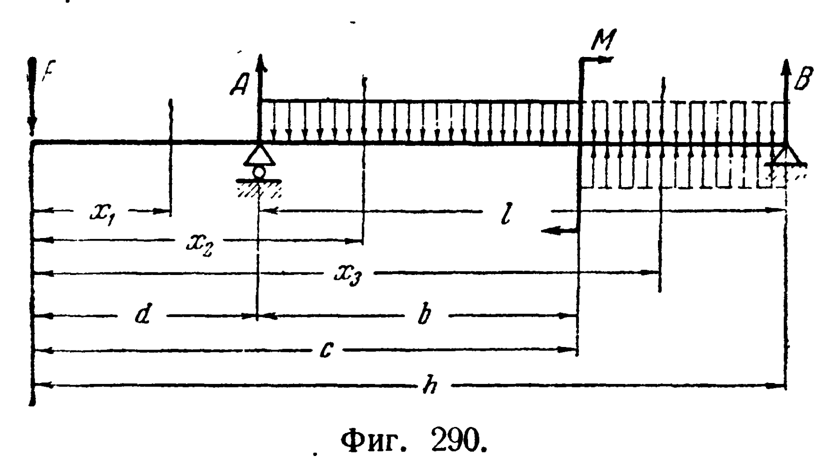
При большом числе участков загружения балки такое сокращение значительно упрощает подсчёты. Равенство между собой произвольных постоянных ($C_1 = C_2 = \ldots = C$ и $D_1 = D_2 = \ldots = D$) возможно при соблюдении следующих условий:

а) отсчёт абсцисс всех участков должен вестись от одного начала координат — крайней левой (или правой) точки оси балки;

б) все составляющие выражения изгибающего момента предыдущего участка должны сохраняться неизменными в выражении изгибающего момента последующего участка балки: это условие может быть соблюдено, если при вычислении моментов будет рассматриваться та часть балки, которая содержит начало координат;

в) все вновь вводимые в последующих участках составляющие выражения изгибающего момента должны содержать множитель — скобку $(x - a)$, где a — сумма длин всех предыдущих участков;

г) интегрирование дифференциального уравнения должно вестись без раскрытия скобок.



Фиг. 290.

При наличии распределённой нагрузки для выполнения условия б) нагрузка не должна обрываться: если по условию задачи распределённая нагрузка оканчивается (фиг. 290, конец второго участка), — её следует продолжить до конца балки, добавив одновременно той же интенсивности нагрузку другого знака (см. третий участок).

При наличии сосредоточенного момента M (фиг. 290) условие в) окажется выполненным, если в выражении $M(x)$ величина M будет

умножена на величину $(x-c)^0$, где c — часть длины балки от начала координат до сечения, где приложен момент M.

Поясним выполнение перечисленных условий на примере фиг. 290.

Первый участок

$$EJ\frac{d^2y_1}{dx^2}=-Px_1,$$

$$EJ\frac{dy_1}{dx_1}=-P\frac{x_1^2}{2}+C_1,$$

$$EJy_1=-P\frac{x_1^3}{6}+C_1x_1+D_1.$$

Второй участок

$$EJ\frac{d^2y_2}{dx_2^2}=-Px_2+A(x_2-d)-q\frac{(x_2-d)^2}{2},$$

$$EJ\frac{dy_2}{dx_2}=-P\frac{x_2^2}{2}+A\frac{(x_2-d)^2}{2}-q\frac{(x_2-d)^3}{6}+C_2,$$

$$EJy_2=-P\frac{x_2^3}{6}+A\frac{(x_2-d)^3}{6}-q\frac{(x_2-d)^4}{24}+C_2x_2+D_2.$$

Третий участок

$$EJ\frac{d^2y_3}{dx_3^2}=-Px_3+A(x_3-d)-q\frac{(x_3-d)^2}{2}+q\frac{(x_3-c)^2}{2}+M(x_3-c)^0,$$

$$EJ\frac{dy_3}{dx_3}=-P\frac{x_3^2}{2}+A\frac{(x_3-d)^2}{2}-q\frac{(x_3-d)^3}{6}+q\frac{(x_3-c)^3}{6}+ \\ +M(x_3-c)+C_3,$$

$$EJy_3=-P\frac{x_3^3}{6}+A\frac{(x_3-d)^3}{6}-q\frac{(x_3-d)^4}{24}+q\frac{(x_3-c)^4}{24}+ \\ +M\frac{(x_3-c)^2}{2}+C_3x_3+D_3.$$

Определяем произвольные постоянные

$$\left.\begin{array}{llll} \text{при } x_1=d=x_2 & \dfrac{dy_1}{dx_1}=\dfrac{dy_2}{dx_2}; & C_1=C_2 \\ \quad » \quad » & y_1=y_2; & D_1=D_2 \\ \text{при } x_2=c=x_3 & \dfrac{dy_2}{dx_2}=\dfrac{dy_3}{dx_3}; & C_2=C_3 \\ \quad » \quad » & y_2=y_3; & D_2=D_3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C_1=C_2=C_3=C, \\ D_1=D_2=D_3=D. \end{array}$$

при $x_1=d$ $\quad y_1=0; \quad -P\frac{d^3}{6}+Cd+D=0,$

при $x_3=h$ $\quad y_3=0; \quad -P\frac{h^3}{6}+A\frac{l^3}{6}-q\frac{l^4}{24}+q\frac{(h-c)^4}{24}+$

$$+M_0\frac{(h-c)^2}{2}+Ch+D=0.$$

Произвольные постоянные C и D определяются из этих двух выражений. Дальнейшее решение примера трудностей не представляет.

Б. *Метод начальных параметров*. Рассматривая уравнения (§§ 110—112) и сопровождающие их пояснения, нетрудно подметить, что эти уравнения могут быть видоизменены так, что смогут служить для решения задач при любом из рассмотренных здесь видов загружения.

Сосредоточенные силы P_1, P_2, ... , расположенные в расстояниях l_1, l_2 ... от начала координат, дадут в уравнение прогибов (18.9) члены

$$P_1\frac{(x-l_1)^3}{6};\quad P_2\frac{(x-l_2)^3}{6};\ \ldots$$

Сосредоточенные моменты M_1, M_2, ... с теми же расстояниями от начала координат дадут в уравнение (18.9) слагаемые

$$M_1\frac{(x-l_1)^2}{2};\quad M_2\frac{(x-l_2)^2}{2};\ \ldots$$

Равномерно распределённая нагрузка q_1, q_2, ... , начинающаяся в расстояниях l_1, l_2, ... , от начала координат и расположенная далее непрерывно, даст выражения:

$$\frac{q_1(x_1-l_1)^4}{24};\quad \frac{q_2(x-l_2)^4}{24};\ \ldots$$

Произвольные постоянные при принятом выше порядке составления выражений $M(x)$ и порядке интегрирования будут на всех участках одинаковы и могут быть заменены через увеличенные в EJ раз прогиб y_0 и угол поворота θ_0 в начале координат.

Рассмотрев, наконец, значения коэффициентов в знаменателях, можно подметить, что они раскладываются на следующие первоначальные множители:

$$\begin{aligned} 24 &= 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 4!\\ 6 &= 1\cdot2\cdot3 \quad = 3!\\ 2 &= 1\cdot2 \qquad = 2!\\ 1 &= 1 \qquad\quad = 1! \end{aligned}$$

Располагая члены уравнения (18.9) по восходящим степеням x, заменяя l_1, l_2, ... через l_0 и суммируя все однотипные члены, можем составить следующие *общие* уравнения упругой линии.

Уравнение углов поворота:

$$EJy' = EJ\theta_0 + \sum\frac{M(x-l_0)}{1!} + \sum\frac{P(x-l_0)^2}{2!} + \sum\frac{q(x-l_0)^3}{3!}. \qquad [18.8']$$

Уравнение прогибов:

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 \cdot \frac{x}{1!} + \sum \frac{M(x-l_0)^2}{2!} + \sum \frac{P(x-l_0)^3}{3!} + \sum \frac{q(x-l_0)^4}{4!}. \qquad [18.9']$$

Применим эти уравнения к нахождению прогиба и угла поворота балки, защемлённой одним концом и загружённой силой P на другом конце (фиг. 282). Учитывая, что $y_0 = 0$; $\theta_0 = 0$; $q = 0$ и рассматривая силы, расположенные слева, т. е. опорный момент $M = -Pl$ и реакцию $A = P$, получим вместо уравнений (18.10) и (18.11)

$$EJy' = -\frac{Plx}{1!} + \frac{Px^2}{2!} = -Px\left(l - \frac{x}{2}\right); \qquad [18.10']$$

$$EJy = -\frac{Plx^2}{2!} + \frac{Px^3}{3!} = -\frac{Px^2}{2}\left(l - \frac{x}{3}\right). \qquad [18.11']$$

Деформации на конце балки под силой P при $x = l$

$$y_p = -\frac{Pl^3}{3EJ}; \quad \theta_p = -\frac{Pl^2}{2EJ}.$$

Рассмотрим балку на двух опорах, загружённую сплошь равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q (фиг. 285). В этом случае $y_0 = 0$, а θ_0 определится из условия, что при $x = l$ $y = 0$. Уравнение прогибов будет:

$$EJy = EJ\theta_0 \frac{x}{1!} + \frac{ql}{2} \cdot \frac{x^3}{3!} - \frac{qx^4}{4!},$$

откуда при $x = l$

$$EJ \cdot 0 = EJ \cdot \theta_0 \cdot l + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{ql^4}{24},$$

$$\theta_0 = -\frac{ql^3}{24EJ}.$$

Подставим полученное значение θ_0 в уравнение прогибов:

$$EJy = EJ\theta_0 \frac{x}{1!} + \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24};$$

$$EJy = EJ\left(-\frac{ql^3}{24EJ}\right)x + \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24}.$$

Найдём теперь прогиб f посредине пролёта $\left(\text{при } x = \frac{l}{2}\right)$:

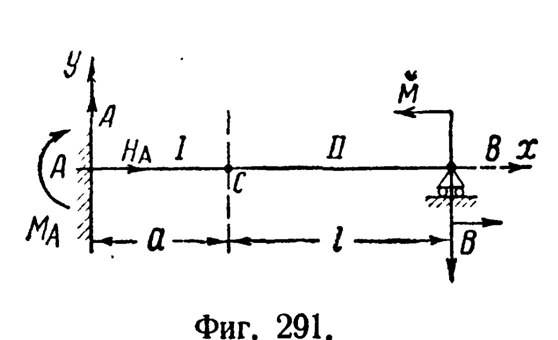
$$EJf = -\frac{ql^4}{48} + \frac{ql^4}{96} - \frac{ql^4}{384};$$

$$f = -\frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ}.$$

§ 114. Интегрирование дифференциального уравнения для случая балки с шарниром.

В предыдущих примерах участки при составлении уравнения изогнутой оси соответствовали участкам эпюры изгибающих моментов.

При нарушении *непрерывности оси балки шарниром* для интегрирования уравнения оси участок с шарниром придётся разделить на два, хотя выражение для изгибающего момента по обе стороны от шарнира будет одним и тем же. В шарнире должны быть равны между собой лишь *прогибы* соединяемых частей; углы же поворота сечений, примыкающих к шарниру, будут различны. Поэтому уравнение изогнутой оси будет различным для участков балки, разделённых шарниром.



Фиг. 291.

Рассмотрим балку, изображённую на фиг. 291; в сечении C помещён шарнир; для простоты вычислений нагрузим балку только парой сил M в сечении B. Реакцию B легко определить, приравняв нулю сумму моментов относительно шарнира C всех сил, расположенных справа от шарнира (т. е. сил B и M). Получим $B=\frac{M}{l}$.

Реакция A определится из суммы проекций на вертикаль всех сил, действующих на балку ACB (т. е. сил A и B). Получим $A=\frac{M}{l}$. Реактивный момент M_A равен сумме моментов относительно точки A сил M и B:

$$M_A=-M\frac{a}{l}.$$

Начало координат выберем в точке A. Изгибающий момент в *любом* сечении балки между A и B выражается формулой

$$M(x)=\frac{M}{l}x-\frac{M}{l}a=\frac{M}{l}(x-a).$$

Для получения же уравнения изогнутой оси надо рассмотреть два участка AC и CB. Дифференциальные уравнения и их интегралы имеют вид:

Первый участок	Второй участок
$EJ\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{M}{l}(x-a),$	$EJ\frac{d^2y_2}{dx^2}=\frac{M}{l}(x-a),$
$EJ\frac{dy_1}{dx}=\frac{M}{l}\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)+C_1,$	$EJ\frac{dy_2}{dx}=\frac{M}{l}\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)+C_2,$
$EJy_1=\frac{M}{l}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{ax^2}{2}\right)+$	$EJy_2=\frac{M}{l}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{ax^2}{2}\right)+$
$+C_1x+D_1.$	$+C_2x+D_2.$

Для определения постоянных интегрирования имеем четыре условия:

сечение A при $x=0$ величина $\frac{dy_1}{dx}=0$ и $y_1=0$,

» C » $x=a$ » $y_1=y_2$,

» B » $x=a+l$ » $y_2=0$.

Из первых двух получаем:

$$C_1=0; \quad D_1=0.$$

Из двух последних

$$\frac{M}{l}\left(\frac{a^3}{6}-\frac{a^3}{2}\right)=\frac{M}{l}\left(\frac{a^3}{6}-\frac{a^3}{2}\right)+C_2a+D_2,$$

$$\frac{M}{l}\left[\frac{(a+l)^3}{6}-\frac{a(a+l)^2}{2}\right]+C_2(a+l)+D_2=0.$$

Отсюда

$$C_2=-\frac{M(a+l)^2(l+2a)}{6l^2},$$

$$D_2=+\frac{M(a+l)^2(l-2a)a}{6l^2}.$$

При этих условиях прогибы обеих частей балки в шарнире одинаковы, углы же поворота отличаются на величину C_2.

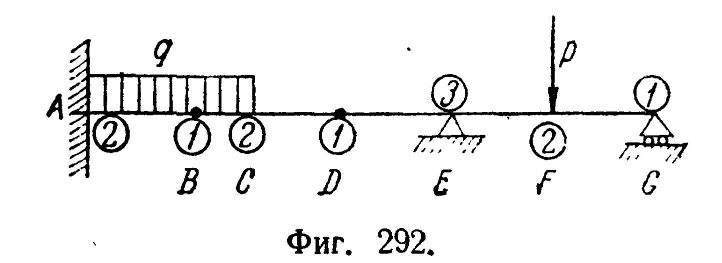
При решении этой задачи общим уравнением поступаем так. В начале координат $y_0=\theta_0=0$; $M_0=-M\frac{a}{l}$ и $Q_0=A=\frac{M}{l}$. В месте стыка I и II участков происходит разрыв непрерывности (скачок) для угла поворота, который обозначаем θ_C. Тогда по (18.9') для II участка получаем:

$$y_2=\frac{1}{EJ}\left[-\frac{M}{l}a\frac{x^2}{2}+\frac{M}{l}\frac{x^3}{6}\right]+\theta_C(x-a);$$

для y_1 следует отбросить последний член правой части. Назначая $x=l+a$ и $y_2=0$ (условие на правой опоре), получаем для θ_C выражение, совпадающее с C_2.

Пример 78. Для балки, показанной на фиг. 292, наметить решение задачи по определению прогибов.

Балка имеет шесть участков, и, следовательно, при решении задачи по определению деформаций мы получим 12 произвольных постоянных. Нетрудно проследить, что сечения раздела нагрузки, опоры и шарниры дадут нам необходимые 12 уравнений. Защемлённый конец A даёт два уравнения: прогиб равен нулю и угол поворота равен нулю. Шарнирно-опёртый конец G — одно уравнение: прогиб равен нулю. Шарниры B и D по одному уравнению: прогибы левого и правого участков в сечениях шарниров равны между собой.



Фиг. 292.

Сечения раздела нагрузки (сечение C, где обрывается распределённая нагрузка, и сечение F, где приложена сосредоточенная сила P) дадут по два уравнения: прогибы левого и правого участков в этих сечениях равны между собой, и углы поворота тех же участков равны между собой. Шарнирная

промежуточная опора E даёт три условия: равенство прогибов между собой, равенство углов поворота между собой и равенство любого из прогибов в этом сечении нулю.

На фиг. 292 в кружках указано количество уравнений в каждом рассмотренном сечении.

§ 115. Сложение действия сил.

Закон Гука справедлив не только для материала, но и для всей балки в целом; прогибы и углы поворота прямо пропорциональны нагрузкам. Это — следствие линейной зависимости изгибающего момента от нагрузок, а кривизны — от изгибающего момента. Для балки, защемлённой концом и нагружённой сплошной нагрузкой q и сосредоточенной силой P на свободном конце, изгибающий момент в сечении на расстоянии x от защемления выражается линейной *по отношению к нагрузкам* формулой

$$M(x) = -P(l-x) - q\frac{(l-x)^2}{2};$$

зависимость же кривизны от момента тоже линейна.

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = -\left[P(l-x) + q\frac{(l-x)^2}{2}\right];$$

поэтому после интегрирования по x получаем линейную зависимость прогиба от нагрузок:

$$y = -\frac{Plx^2}{6EJ}\left[3 - \frac{x}{l}\right] - \frac{ql^2x^2}{24EJ}\left[6 - 4\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right],$$

т. е. сумму ординат изогнутой оси балки от силы P и от нагрузки q отдельно (см. § 110, формулы (18.13) и (18.17)).

Это обстоятельство позволяет в случае *сложной нагрузки получать уравнение изогнутой оси как сумму ординат кривых, соответствующих частным нагрузкам.* Особенно упрощается в некоторых случаях вычисление наибольшего прогиба.

Фиг. 293.

Рассмотрим применение метода сложения действия сил для определения деформации конца консоли A однопролётной балки ABC (фиг. 293). Заменив влияние на участок балки BC нагрузки q, расположенной на консоли AB, моментом $M_0 = -\frac{qa^2}{2}$, мы можем, пользуясь формулой § 111 (фиг. 286), вычислить угол поворота сечения балки на опоре B:

$$\theta_B = \frac{M_0 l}{3EJ} = \frac{qa^2 l}{6EJ}.$$

Прямая ось консоли AB при повороте сечения B наклонится на

тот же угол θ_B, и величина прогиба конца консоли A составит:

$$f'_A = \overline{AA_1} = -\theta_B \cdot a = -\frac{M_0 la}{3EJ} = -\frac{qla^3}{6EJ}.$$

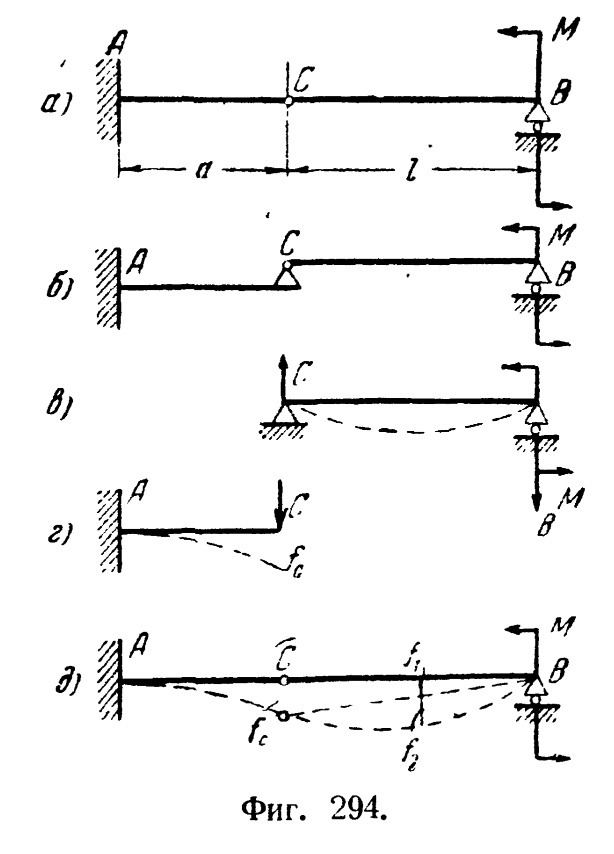
Консоль AB под действием нагрузки q не останется прямой, а изогнётся, заняв положение A_2B (не изменив, однако, угла поворота θ_B у точки B), и прогиб на конце консоли A при этом изгибе составит, как для балки, защемлённой одним концом (см. § 110, формула (18.19)):

$$f''_A = \overline{A_1A_2} = -\frac{qa^4}{8EJ}.$$

Полный прогиб конца консоли A будет:

$$f_A = f'_A + f''_A = -\frac{qla^3}{6EJ} - \frac{qa^4}{8EJ} = -\frac{qa^3}{24EJ}(4l + 3a).$$

Определение деформаций балок с шарнирами может быть проведено также с применением метода сложения действия сил. Для этого балку нужно расчленить на несколько составляющих её балок, рассмотреть их порознь и просуммировать вычисленные раздельно деформации.



Фиг. 294.

Так, например, схему балки § 114 (фиг. 294, *а*) можно заменить схемой фиг. 294, *б*. В этой схеме «подвесная» балка CB опирается левым концом C на правый конец C «основной» балки AC. Действие шарнира C может быть заменено силами C (фиг. 294, *в*, *г*).

Определение величины силы C нужно произвести, рассмотрев равновесие балки CB; для этой балки сила C является силой *пассивной* — реакцией балки AC. На балку AC будет действовать той же величины *активная* сила C — давление балки CB на балку AC.

Прогиб балки CB, показанной отдельно на фиг. 294, *в*, определится в любой точке по формулам примера 76 (см. стр. 361). Прогиб балки AC, показанной на фиг. 294, *г*, можно вычислить по формулам (18.13) и (18.14) (см. стр. 356).

Деформация заданной балки ACB показана на фиг. 294, *д*. Участок AC балки ACB имеет на всем протяжении те же прогибы,

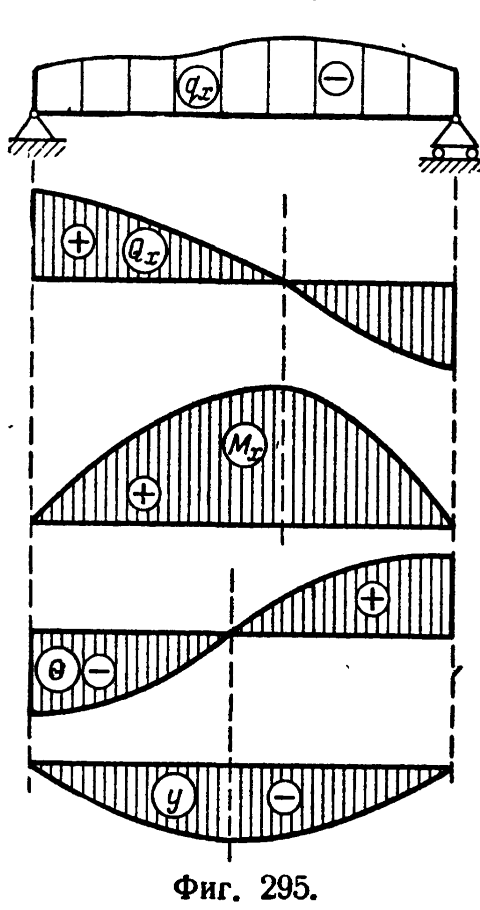
что и отдельно рассмотренная балка AC. Прогибы же участка CB балки ACB представят суммы двух прогибов: прогиба f_1, составляющего часть прогиба f_C (прямо пропорциональную удалению от точки B) и прогиба f_2, вычисленного для схемы балки CB (фиг. 294, *в*).

§ 116. Дифференциальные зависимости при изгибе.

В §§ 71 и 109 были получены дифференциальные зависимости для сплошной нагрузки $q(x)$, поперечной силы $Q(x)$, изгибающего момента $M(x)$, угла поворота сечения θ и прогиба y:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x); \quad \frac{dQ(x)}{dx} = q(x);$$

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M(x); \quad \frac{dy}{dx} = \theta.$$



Фиг. 295.

Эти зависимости, после некоторого преобразования, можно расположить последовательно:

$$\frac{d}{dx}(EJy) = EJ\theta,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(EJy) = \frac{d}{dx}(EJ\theta) = M(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(EJy) = \frac{d^2}{dx^2}(EJ\theta) = \frac{d}{dx}M(x) = Q(x),$$

$$\frac{d^4}{dx^4}(EJy) = \frac{d^3}{dx^3}(EJ\theta) = \frac{d^2}{dx^2}M(x) = \frac{d}{dx}Q(x) = q(x).$$

Из этих уравнений видно, что, зная нагрузку $q(x)$ и устройство опор балки, можно *последовательным интегрированием* получить величины $Q(x)$, $M(x)$, $EJ\theta$ и EJy; обратно, зная уравнение изогнутой оси, можно путём *последовательного дифференцирования* по x из функции EJy получить $EJ\theta$, $M(x)$, $Q(x)$ и $q(x)$. Для графического изображения этих зависимостей условимся положительные значения всех перечисленных величин откладывать вверх, а отрицательные — вниз; положительное направление оси x примем вправо, поворот сечения по часовой стрелке — отрицательным, а против — положительным. На рис. 295 в качестве примера изображены графики изменения всех величин, характеризующих изгиб, для балки шарнирно-опёртой и загружённой неравномерно распределённой нагрузкой $q(x)$ (отрицательной, направленной вниз).

ГЛАВА XIX.

ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ИЗГИБЕ.

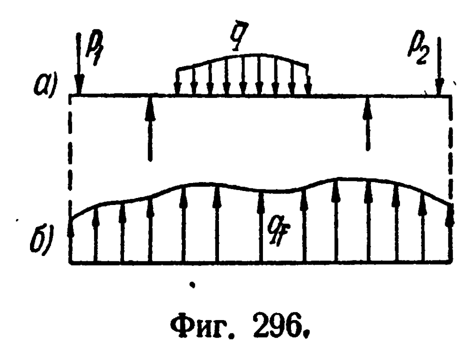
§ 117. Графо-аналитический метод.

Метод интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси даёт уравнения прогибов и уравнения углов поворота, при помощи которых можно вычислить прогиб и угол поворота в любом сечении балки.

Когда мы имеем дело с большим числом участков, а также в случае сложной нагрузки, вычисления при применении этого способа делаются достаточно громоздкими. В этих случаях наиболее удобным может оказаться *графический* способ.

С другой стороны, при решении целого ряда задач (статически неопределимые балки, вычисление наибольшего прогиба) достаточно уметь найти прогиб и угол поворота лишь для некоторых определённых сечений. В этих случаях уместно применение *графо-аналитического метода.* Этот способ основан на сходстве дифференциальных зависимостей, связывающих прогиб, изгибающий момент и интенсивность сплошной нагрузки.

Пусть мы имеем какую угодно балку с произвольной нагрузкой



Фиг. 296.

(фиг. 296). Дифференциальным уравнением изогнутой оси этой балки является (§ 109):

$$\frac{d^2(EJy)}{dx^2} = M(x). \tag{19.1}$$

Под нашей балкой изобразим вторую балку той же длины, нагружённую некоторой, пока неизвестной, сплошной нагрузкой q_f, положительное направление которой принято вверх; устройство опор этой балки тоже оставим пока неопределённым; отметим лишь, что опорные реакции будут уравновешивать нагрузку q_f. Эту вторую балку назовём воображаемой, фиктивной; все величины, относящиеся к ней, будем обозначать значком f. Для этой воображаемой балки вычислим величину изгибающего момента M_f в каждом сечении тоже путём интегрирования, пользуясь

дифференциальным уравнением, связывающим изгибающий момент и интенсивность сплошной нагрузки (§ 116):

$$\frac{d^2M_f}{dx^2} = q_f. \qquad (19.2)$$

Проведём сопоставление уравнений (19.1) и (19.2). Если принять

$$q_f = M(x),$$

т. е. загрузить фиктивную балку фиктивной нагрузкой, меняющейся по закону изгибающего момента действительной балки, то

$$\frac{d^2(EJy)}{dx^2} = \frac{d^2M_f}{dx^2}.$$

Если при интегрировании обеих сторон уравнения добиться равенства произвольных постоянных левой и правой частей уравнения, т. е. $C_л = C_п$ и $D_л = D_п$, то получим:

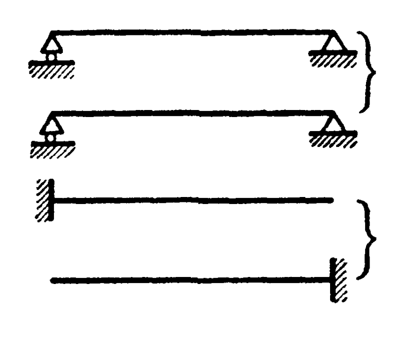
$$\frac{d(EJy)}{dx} = \frac{dM_f}{dx};$$

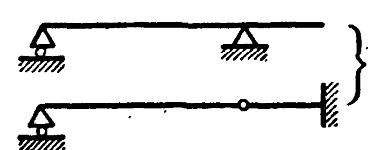
$$EJy = M_f.$$

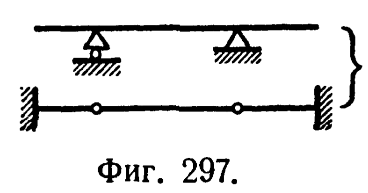
Учитывая, что $\frac{dM_f}{dx} = Q_f$ и решая эти выражения относительно y и θ, получим формулы:

$$y = \frac{M_f}{EJ}, \qquad (19.3)$$

$$\theta = \frac{Q_f}{EJ}. \qquad (19.4)$$







Фиг. 297.

Прогиб сечения действительной балки (от заданной нагрузки) *равен изгибающему моменту в том же сечении фиктивной балки* (от фиктивной нагрузки), *делённому на жёсткость действительной балки.*

Угол поворота действительной балки (от заданной нагрузки) *равен поперечной силе в том же сечении фиктивной балки* (от фиктивной нагрузки), *делённой на жёсткость действительной балки.*

В аналитическом способе определения деформаций произвольные постоянные находились по условиям на границах, т. е. по условиям равенства нулю прогибов в опорных сечениях и равенства деформаций между собой в сечениях, общих для двух смежных участков балки.

В рассматриваемом способе добиться равенства между собой произвольных постоянных при интегрировании уравнений (19.1) и (19.2) можно путём такого закрепления концов (или промежуточных сечений) фиктивной балки, которое удовлетворяло бы сле-

дующим условиям, непосредственно вытекающим из выражений (19.3) и (19.4):

1) если прогиб действительной балки f равен нулю, то в том же сечении фиктивной балки фиктивный изгибающий момент должен быть равен нулю;

2) если угол поворота действительной балки θ равен нулю, то в том же сечении фиктивной балки фиктивная поперечная сила должна быть равна нулю;

3) если прогиб или угол поворота действительной балки не равен нулю, то соответствующие им M_f или Q_f также не должны быть равны нулю.

В таблице 22 приводятся условия для всех случаев опирания действительной балки с указанием соответствующих этим условиям закреплений тех же сечений фиктивной балки. Действительная и фиктивная балки, связанные условиями этой таблицы, называются сопряжёнными. На фиг. 297 для наиболее распространённых стати-

Таблица 22. **Условия образования фиктивных балок.**

Действительная балка		Фиктивная балка	
Наименование опоры	Условия для y и θ	Требуемые условия для M_f и Q_f	Отвечающее этим условиям опирание фиктивной балки
Шарнирная концевая опора (прогиба нет; поворот сечения возможен)	$y=0$ $\theta\neq 0$	$M_f=0$ $Q_f\neq 0$	Шарнирная концевая опора (момента нет, возможна опорная реакция)
Защемлённый конец балки (нет прогиба и нет поворота)	$y=0$ $\theta=0$	$M_f=0$ $Q_f=0$	Свободный конец балки (отсутствуют и сосредоточенная сила и момент)
Свободный конец балки (возможны и прогиб и поворот сечения)	$y\neq 0$ $\theta\neq 0$	$M_f\neq 0$ $Q_f\neq 0$	Защемлённый конец балки (имеются момент защемления и реакция)
Промежуточная опора (прогиба нет; поворот сечения возможен)	$y=0$ $\theta\neq 0$	$M_f=0$ $Q_f\neq 0$	Промежуточный шарнир (момента нет; шарнир передаёт давление)
Промежуточный шарнир (возможны и прогиб и поворот сечения)	$y\neq 0$ $\theta\neq 0$	$M_f\neq 0$ $Q_f\neq 0$	Промежуточная опора (в опорном сечении возможны и момент и реакция)

чески определимых балок показаны сочетания действительных и фиктивных балок. В каждой паре сопряжённых балок любая может быть принята за действительную, тогда вторая из них будет фиктивной, что легко можно проверить, обратившись к таблице 22.

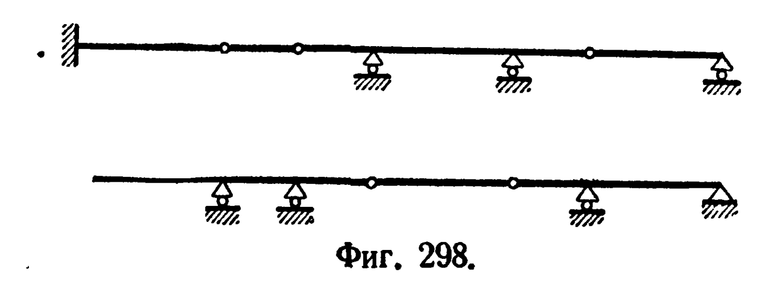
Для многопролётных балок с шарнирами выбор сопряжённой балки можно проследить по фиг. 298.

Следует заметить, что статически определимой действительной балке всегда соответствует статически определимая фиктивная балка.

Таким образом, для того чтобы найти прогиб y или угол θ поворота какого-либо сечения заданной (действительной) балки, нужно последовательно выполнить следующие операции:

а) вычертить схему заданной балки с заданной нагрузкой;

б) построить эпюру изгибающего момента $M(x)$;



Фиг. 298.

в) принять нулевую линию эпюры $M(x)$ за ось фиктивной балки, а эпюру $M(x)$ за фиктивную нагрузку q_f; при положительных значениях изгибающего момента ординаты нагрузки q_f направить вверх, при отрицательных — вниз.

г) показать опоры фиктивной балки в соответствии с условиями таблицы 22 и фиг. 297 или 298;

д) подсчитать величину опорных реакций фиктивной балки от фиктивной нагрузки (т. е. фиктивных опорных реакций); для балок, защемлённых одним концом, этого можно не делать;

е) подсчитать величину изгибающего момента M_f в сечении фиктивной балки с той же абсциссой, что и сечение, где отыскивается прогиб f;

ж) подсчитать величину поперечной силы Q_f в сечении фиктивной балки с той же абсциссой, что и сечение, где отыскивается угол поворота θ;

з) определить f и θ по формулам (19.3) и (19.4).

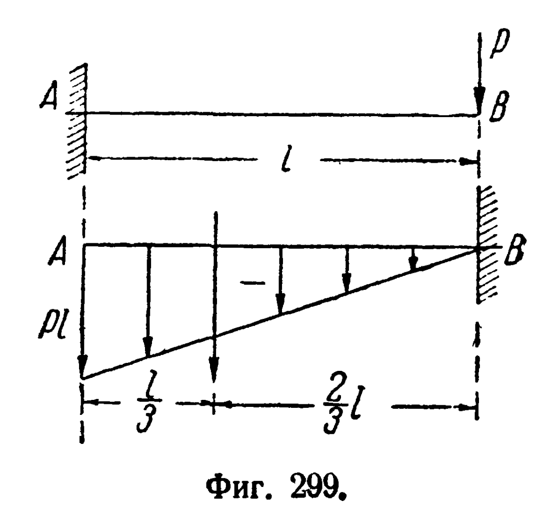
Графо-аналитический метод определения деформаций освобождает нас от необходимости нахождения произвольных постоянных в каждом частном случае, и сразу, при использовании данных табл. 22 и схем фиг. 297 или 298, даёт решение, согласованное с определёнными начальными условиями.

Фиктивные моменты имеют размерность [сила $\times$ длина^3]; фиктивные поперечные силы — [сила $\times$ длина^2]; интенсивность фиктивной нагрузки измеряется в единицах — [сила $\times$ длина].

§ 118. Примеры определения деформаций графо-аналитическим методом.

Пример 79. Найти прогиб точки B балки AB пролётом l, защемлённой концом A и нагружённой силой P на конце B (фиг. 299).

Эпюра моментов будет иметь вид треугольника с наибольшей ординатой под сечением A, равной — Pl. Ось абсцисс эпюры моментов примем за ось фиктивной балки; превратим эпюру в фиктивную нагрузку; для этого на ординатах поставим стрелки, направленные *вниз* (ординаты отрицательны).



Фиг. 299.

Следуя указаниям таблицы 22, покажем защемлённый конец в точке B фиктивной балки (фиг. 299) и свободный конец в точке A.

Далее надо вычислить изгибающий момент в сечении B фиктивной балки. Момент треугольной нагрузки относительно точки B равен произведению нагрузки на расстояние её центра тяжести до точки B:

$$M_{fB} = -\frac{1}{2}Pl\cdot l\cdot\frac{2}{3}l = -\frac{Pl^3}{3}.$$

Деля это выражение на EJ, получаем прогиб в точке B:

$$f_B = -\frac{Pl^3}{3EJ} \tag{18.14}$$

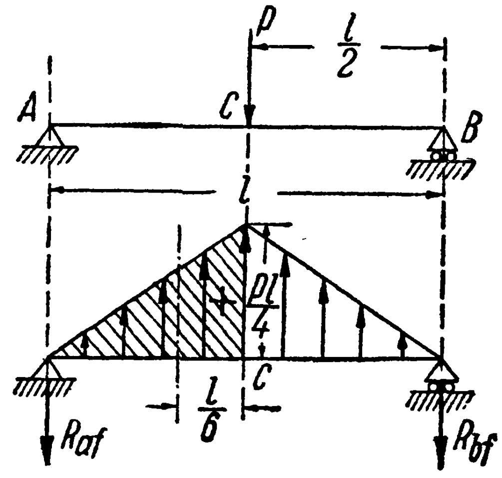
— формула, в точности, до знака включительно, совпадающая с результатом, полученным в § 110.

Поперечная сила в сечении B фиктивной балки численно равна площади всей треугольной нагрузки:

$$Q_f = -\frac{1}{2}Pl\cdot l = -\frac{Pl^2}{2},$$

а угол поворота сечения B действительной балки равен:

$$\theta_B = \frac{Q_f}{EJ} = -\frac{Pl^2}{2EJ}. \tag{18.15}$$



Фиг. 300.

Пример 80. Балка на двух опорах нагружена посредине пролёта силой P (фиг. 300). Найти прогиб в точке приложения силы.

Эпюра моментов для действительной балки изобразится треугольником с ординатой в точке приложения груза, равной $+\frac{Pl}{4}$; превращаем эпюру в фиктивную нагрузку, направляя стрелки в этом примере вверх, так как ординаты эпюры положительны.

Устройство опор фиктивной балки определим по данным табл. 22 из условий закрепления действительной балки. Реакции опор фиктивной балки по симметрии будут равны между собой, и каждая равна половине всей нагрузки:

$$R_{Af} = R_{Bf} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{4} l = \frac{Pl^2}{16}.$$

Изгибающий момент в сечении C равен моменту реакции (со знаком минус) плюс момент половины треугольной нагрузки $\left(\text{с плечом } \frac{l}{6}\right)$:

$$M_{fC} = -R_{Af}\frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\frac{Pl}{4} \cdot l \cdot \frac{l}{6} = -\frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{2} + \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{6} = -\frac{Pl^3}{48}.$$

Отсюда

$$f_C = -\frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Угол поворота сечения на левой опоре будет равен

$$\theta_A = \frac{Q_{fA}}{EJ} = -\frac{R_{Af}}{EJ} = -\frac{Pl^2}{16EJ},$$

так как поперечная сила в опорном сечении равна опорной реакции (в нашем случае со знаком минус, поскольку R_{Af} направлена вниз). Для опоры B:

$$\theta_B = +\frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Как видно из рассмотренных примеров, при выбранных условиях для знака фиктивных нагрузок, изгибающих моментов и поперечных сил знак минус в формуле для прогибов соответствует, как и раньше, направлению вниз, а в формуле для углов поворота — вращению по часовой стрелке; знак плюс соответствует обратным направлениям.

Фиг. 301.

Пример 81. Найти графо-аналитически угол поворота концов балки AB, изображённой на фиг. 301.

Фиктивная балка с нагрузкой моментной площадью показана на чертеже. Угол поворота для левой опоры θ_A равен:

$$\theta_A = -\frac{A_f}{EJ} = -\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} Ml}{EJ} = -\frac{Ml}{6EJ}.$$

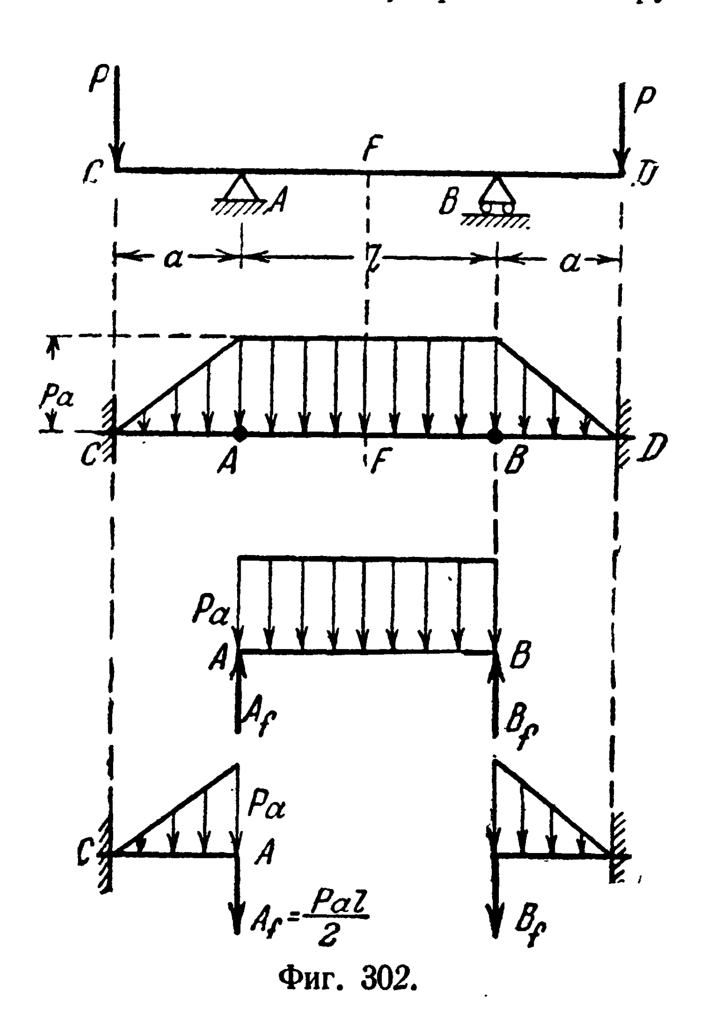
Для правой опоры:

$$\theta_B = \frac{B_f}{EJ} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} Ml}{EJ} = \frac{Ml}{3EJ}.$$

Пример 82. Найти графо-аналитически прогиб посредине пролёта и на концах консолей для балки (фиг. 302).

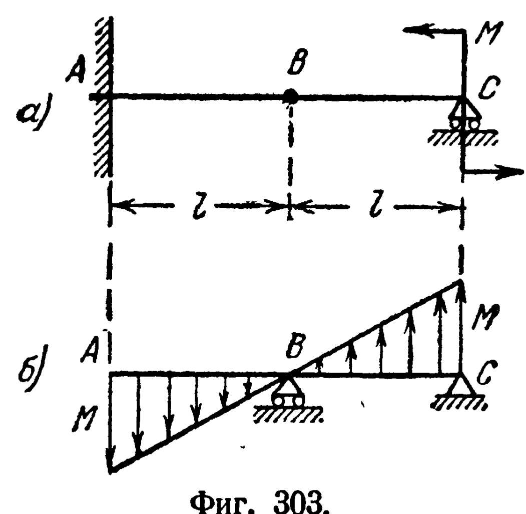
Эпюра изгибающих моментов имеет вид трапеции с наибольшими ординатами $M = -Pa$. Превращаем эпюру в грузовую площадь, направляя нагрузку вниз. Фиктивная балка будет состоять из двух балочек, защемлённых концом и поддерживающих подвесную балку AB. Прогиб посредине пролёта (точка F) равен фиктивному моменту в этой точке от равномерно распределённой нагрузки, делённому на жёсткость:

$$f_F = \frac{q_f l^2}{8EJ} = \frac{Pal^2}{8EJ}.$$



Фиг. 302.

Прогиб в точке C найдём, вычисляя фиктивный момент в этом



Фиг. 303.

сечении; он будет вызываться треугольной нагрузкой, расположенной на балке CA, и реакцией подвесной балки $A_f = \frac{Pal}{2}$ (фиг. 302):

$$M_{fC} = -A_f a - \frac{Pa \cdot a}{2} \frac{2}{3} a = -\frac{Pa^2 l}{2} - \frac{Pa^3}{3}.$$

Отсюда прогиб сечения C

$$f_C = \frac{M_{fC}}{EJ} = -\frac{Pa^2}{6EJ}[3l + 2a].$$

Пример 83. Для балки, изображённой на фиг. 303, найти графо-аналитически прогиб сечения B.

Построим эпюру изгибающих моментов. В сечении C момент равен $+M$; в точке B он равен нулю. На всём протяжении балки момент меняется по закону прямой. Превращаем эпюру M в фиктивную нагрузку и устраиваем фиктивную балку в соответствии с таблицей 22. Рассматривая консоль AB, находим фиктивный момент в точке B:

$$M_{fB} = -\frac{1}{2} Ml \cdot \frac{2}{3} l = -\frac{Ml^2}{3};$$

соответствующий прогиб равен:

$$f_B = -\frac{Ml^2}{3EJ}.$$

§ 119. Графо-аналитический метод при криволинейных эпюрах изгибающего момента.

Пример 84. Найти величину прогиба посредине балки, загружённой сплошной нагрузкой и показанной на фиг. 304.

Площадь эпюры изгибающих моментов определится выражением

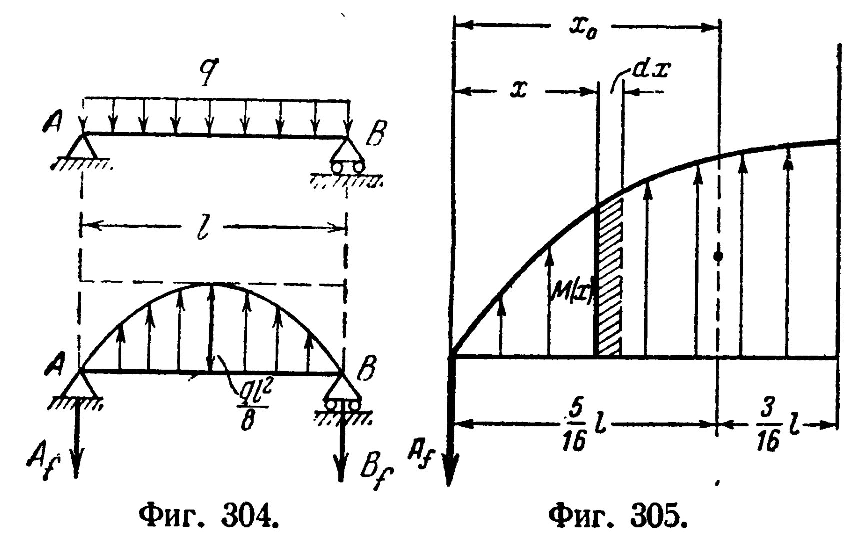
$$\omega = \int_0^l M(x)\,dx = \int_0^l \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)dx = \frac{ql^3}{12}.$$

Следовательно, площадь данной квадратной параболы составляет 2/3 площади описанного прямоугольника

$$\omega = \frac{2}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot l = \frac{ql^3}{12}.$$

Фиктивные опорные реакции будут:

$$A_f = B_f = \frac{\omega}{2} = \frac{ql^3}{24}.$$



Фиг. 304. Фиг. 305.

Фиктивный изгибающий момент в середине пролёта равен сумме статических моментов фиктивных сил, расположенных по одну сторону от среднего сечения балки, допустим, по левую сторону; слева располагаются фиктивные силы: A_f и левая половина площади параболы. Плечо A_f равно половине пролёта; плечо же половины площади параболы $\left(\frac{l}{2} - x_0\right)$ определится следующим выражением (фиг. 305):

$$x_0 = \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} M(x)\cdot dx\cdot x}{\frac{\omega}{2}} = \frac{\frac{5}{384}ql^4}{\frac{1}{24}ql^3} = \frac{5}{16}l,$$

т. е. центр тяжести половины данной квадратной параболы находится в расстоянии $\frac{5}{16}l$ от опоры балки и в $\frac{3}{16}l$ от середины пролёта балки. Следовательно, в середине пролёта

$$M_f = -A_f\cdot\frac{l}{2} + \frac{\omega}{2}\cdot\frac{3}{16}l = -\frac{ql^3}{24}\cdot\frac{l}{2} + \frac{ql^3}{24}\cdot\frac{3}{16}l = -\frac{5}{384}ql^4,$$

а прогиб посредине пролёта равен:

$$f_{\frac{l}{2}} = -\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}.$$

Пример 85. Рассмотреть балку, защемлённую одним концом и загружённую равномерно распределённой нагрузкой (фиг. 306, *а*). Определить величину прогиба свободного конца. Эпюра действительных изгибающих моментов и схема фиктивной балки показаны на фиг. 306, *б*.

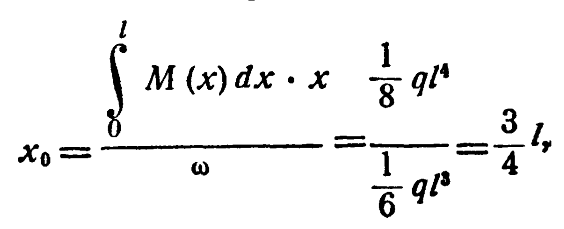
Изгибающий момент в защемлении *A* фиктивной балки равен произведению площади ω всей эпюры на расстояние до её центра тяжести. Площадь эпюры равна

$$\omega=\int_0^l M(x)\,dx=\int_0^l \frac{qx^2}{2}\,dx=\frac{ql^3}{6},$$

т. е. одной трети площади описанного прямоугольника

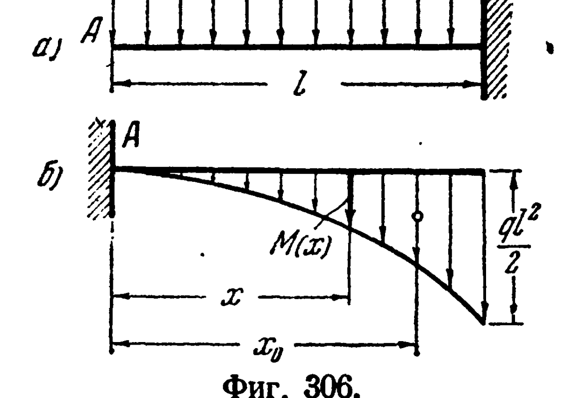
$$\omega=\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l=\frac{ql^3}{6}.$$

Абсцисса центра тяжести равна:

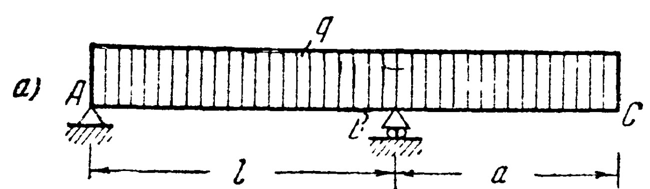


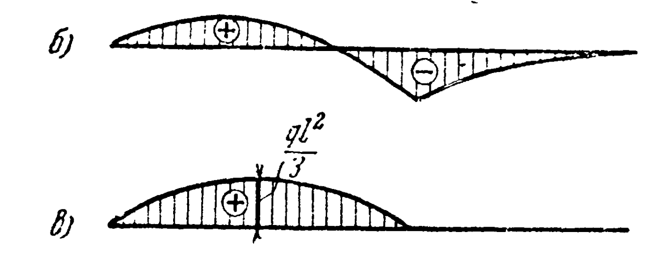
$$x_0=\frac{\int_0^l M(x)\,dx\cdot x}{\omega}=\frac{\frac{1}{8}ql^4}{\frac{1}{6}ql^3}=\frac{3}{4}l,$$

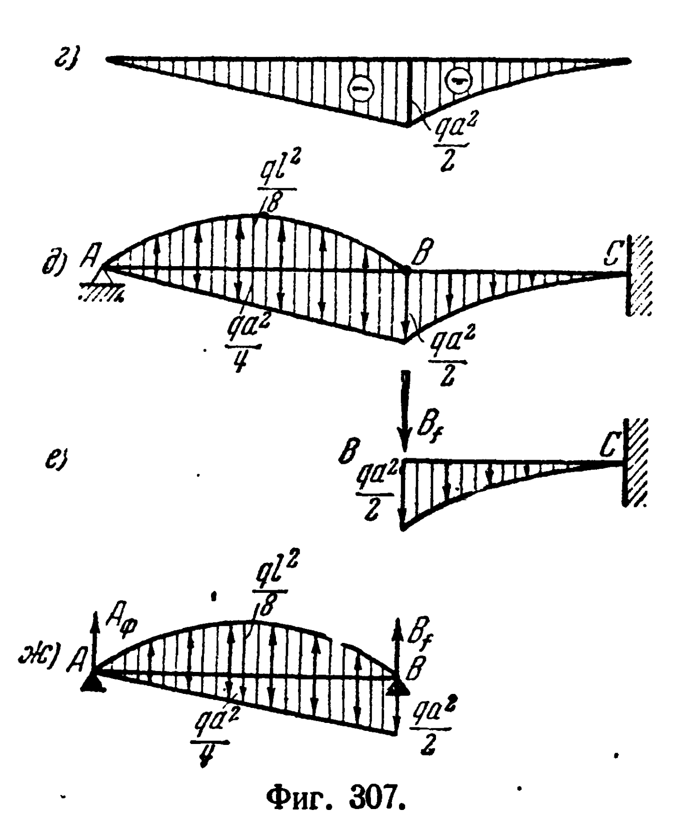
т. е. центр тяжести данной квадратной параболы расположен в $3\,l/4$



Фиг. 306.







Фиг. 307.

от свободного конца действительной балки и в $l/4$ от места её защемления. Фиктивный изгибающий момент в сечении *A* будет:

$$M_f=\omega\cdot x_0=\frac{ql^3}{6}\cdot\frac{3}{4}l=-\frac{ql^4}{8},$$

а прогиб сечения *A* действительной балки равен:

$$f_A=-\frac{ql^4}{8EJ}.$$

Пример 86. Применяя приём расчленения эпюр и метод сложения результатов действия сил, определить прогиб и угол поворота в сечении *C* балки *ABC*, лежащей на двух опорах, с консолью *BC* (фиг. 307, *а*). Равно-

мерно распределённая нагрузка лежит по всей длине балки. Возможный вид эпюры изгибающих моментов показан на фиг. 307, *б*. Заменяем эту эпюру её составляющими: от нагрузки q на пролёте l (фиг. 307, *в*) и от нагрузки q на консоли a (фиг. 307, *г*). Ординаты двух последних эпюр могут быть легко подсчитаны или взяты из ранее решённых задач или из справочника. Характерные ординаты надписаны на фиг. 307, *в*, *г*. На фиг. 307, *д* показана фиктивная балка. Выделим фиктивную балку BC: на неё действуют давление B_f от подвесной балки AB и нагрузка параболой с наибольшей ординатой $\frac{qa^2}{2}$ (фиг. 307, *е*).

Из рассмотрения фиктивной балки AB, взяв сумму моментов всех фиктивных сил относительно опоры A, находим (фиг. 307, *ж*), что

$$B_f = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{qa^2}{2}\,l - \frac{1}{2}\,\frac{ql^3}{12} = \frac{1}{6}\,qa^2l - \frac{ql^3}{24}.$$

Возвращаясь к схеме фиг. 307, *е*, вычисляем:

$$Q_{fC} = -B_f - \frac{1}{3}\cdot\frac{qa^2}{2}\cdot a = -\frac{1}{6}\,qa^2l + \frac{ql^3}{24} - \frac{qa^3}{6},$$

$$M_{fC} = -B_f\cdot a - \frac{1}{3}\cdot\frac{qa^2}{2}\cdot a\cdot\frac{3}{4}\,a = -\frac{1}{6}\,qa^3l + \frac{qal^3}{24} - \frac{qa^4}{8}.$$

Искомые деформации в сечении C будут:

$$\theta_C = \frac{Q_{fC}}{EJ} = -\frac{q}{24EJ}\,(4a^2l - l^3 + 4a^3),$$

$$f_C = \frac{M_{fC}}{EJ} = -\frac{qa}{24EJ}\,(4a^2l - l^3 + 3a^3).$$

§ 120. Графический метод построения изогнутой оси балки.

В предыдущем параграфе мы получили зависимость (19.3):

$$y = \frac{M_f}{EJ},$$

из которой следует, что ординаты *изогнутой оси основной балки* пропорциональны ординатам *эпюры моментов фиктивной балки;* эта эпюра непосредственно представляет в *некотором масштабе изогнутую ось.* Таким образом, задача определения прогибов основной балки может быть сведена к построению эпюры изгибающего момента фиктивной балки, т. е. к графическому решению.

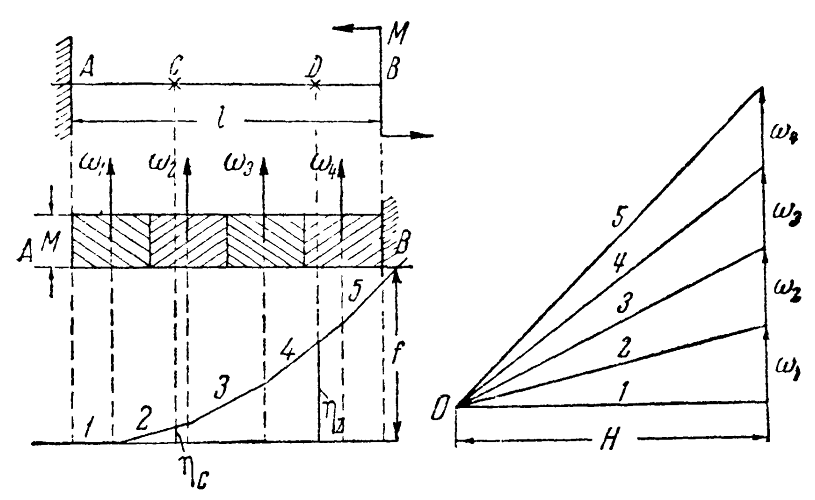
Возьмём балку AB (фиг. 308) пролётом l, защемлённую концом и нагружённую на другом парой сил M. Вычертим её с соблюдением линейного масштаба: в 1 *см* чертежа n *см* балки.

Эпюра изгибающего момента изобразится в виде прямоугольника с положительной ординатой M; принимаем эпюру за фиктивную нагрузку. Фиктивная балка будет иметь в точке A свободный конец и в точке B — защемлённый.

Для графического построения *эпюры фиктивного момента* заменяем равномерно распределённую нагрузку фиктивной балки

четырьмя равными сосредоточенными фиктивными силами, приложенными в центрах тяжести соответствующих грузовых площадей. Все эти силы ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 будут равны $\frac{Ml}{4}$ [$тм^2$] каждая.

Выбрав, как будет указано ниже, полюс O, построим многоугольник сил и верёвочный многоугольник (фиг. 308).



Фиг. 308.

Ранее (§ 76) было доказано, что $M = H \cdot \eta$, где H — полюсное расстояние, отложенное в масштабе сил, а η — ордината верёвочного многоугольника, измеренная в масштабе балки (в масштабе длин).

Так как это справедливо и для балки, загружённой фиктивной нагрузкой, то, сохраняя приведённые только что обозначения, имеем

$$M_f = H \cdot \eta.$$

С другой стороны, нам известно, что

$$M_f = EJ \cdot f.$$

Отсюда — если бы можно было в масштабе фиктивных сил отложить $H = EJ$, то прогиб действительной балки f равнялся бы ординате верёвочного многоугольника η, измеренной в масштабе балки.

Но так как EJ обычно велико по сравнению с фиктивными силами, то выполнить построение многоугольника сил в одинаковом масштабе по вертикали (где отложены ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$) и по горизонтали (где откладываем H) нельзя. Полюс оказался бы очень удалённым от линии сил ω и прогибы вышли бы на чертеже очень малыми. Поэтому принимают $H = \frac{EJ}{k}$, где k — любое положительное целое число, выбираемое по только что указанным соображениям удобства построения. Отсюда следует, что $M_f = \frac{EJ}{k} \cdot \eta$, а прогиб $f = \frac{\eta}{k}$.

Следовательно, если отложить $\frac{EJ}{k}$ в том же масштабе, в каком отложены ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$, то ордината верёвочного многоугольника η, измеренная в масштабе балки, даст увеличенную в k раз величину прогиба f.

Если же принять $n = k$, то прогибы изобразятся в натуральную величину.

В приведённом на фиг. 308 построении видим, что многоугольник сил замкнут, верёвочный же многоугольник не замкнут; это

означает, что заданные силы ω_1, ω_2, ... уравновешиваются фиктивной опорной реакцией в защемлении B (причём $R_f^B = \sum\omega$) и фиктивным опорным моментом. Первый луч построения, проведённый до пересечения с линией действия ω_1, является замыкающим лучом: он пересекается также и с линией действия силы R_f^B и представляет прямую ось балки, а крайний левый его участок и лучи *2, 3, 4, 5* дают верёвочную ломаную линию, стремящуюся при дроблении сил ω в пределе к изогнутой оси балки.

Предположим, что $l = 4$ *м*, $M = 4$ *тм*, $[\sigma] = 1400$ *кг см*^{2}, $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}. Необходимый момент сопротивления будет

$$W = \frac{400\,000}{1400} = 286 \text{ см}^3;$$

примем для расчёта двутавр № 24: $J = 3460$ *см*^{4}, $W = 289$ *см*^{3}.

При делении балки на четыре равные части получаем (фиг. 308):

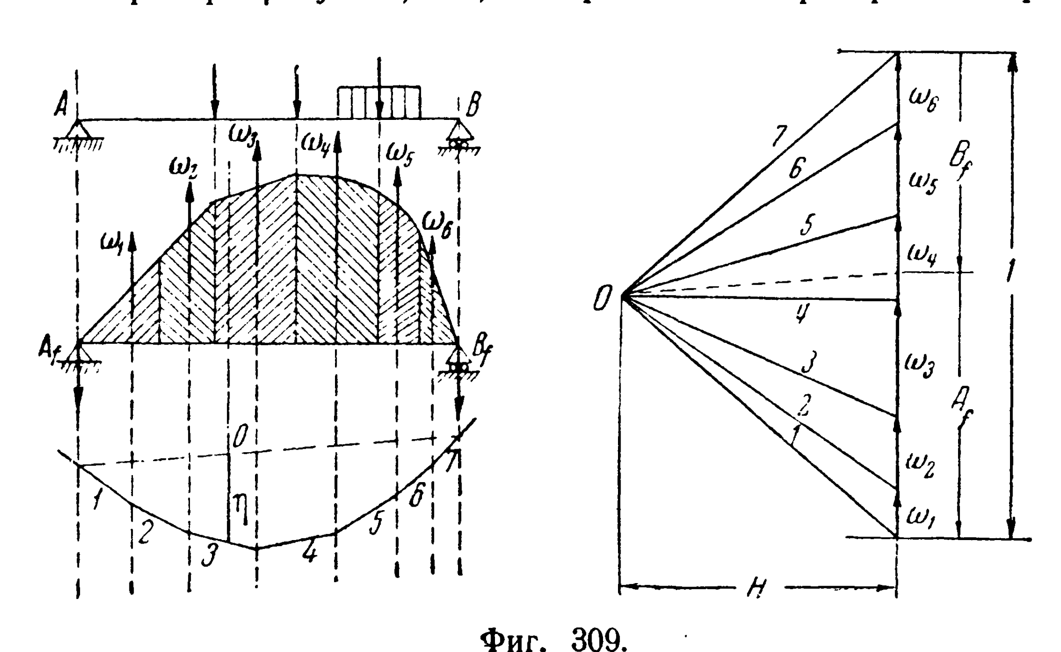
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 4 \text{ тм}^2.$$

Вычертим балку в масштабе $1:n = 1:100$; длина балки изобразится отрезком в 4 *см*; k примем равным 100:

$$\frac{EJ}{k} = 6{,}92 \text{ тм}^2.$$

Для изображения многоугольника сил $\left(\omega \text{ и } \frac{EJ}{k}\right)$ выберем масштаб в 1 *см* — 2 *тм*^{2}.

Каждая сила ω изобразится отрезком в 2 *см*, а полюсное расстояние $H = \frac{EJ}{k}$ — отрезком 3,46 *см*. После построения верёвочного многоугольника ордината η, измеренная в сечении B, даёт прогиб f в натуральную величину (в данном примере $\eta = f = 4{,}6$ *см*, что предлагается проверить построением).



Фиг. 309.

Рассмотрим в качестве второго примера балку на двух опорах A и B с произвольной нагрузкой (фиг. 309).

Фиктивная балка тоже будет шарнирно-опёртой на две опоры; деля площадь фиктивной нагрузки на несколько частей, строим верёвочный многоугольник и проводим замыкающий луч O.

Ординаты верёвочного многоугольника, измеренные от замыкающей, будут пропорциональны изгибающим моментам для фиктивной балки, а следовательно, прогибам основной балки.

Изложенный выше способ решения задачи должен быть упрощён; *нет необходимости изображать фиктивную балку и решать вопрос об её конструкции.*

Для изогнутой оси балки осью абсцисс служит первоначальная прямая ось; следовательно, в рассмотренных примерах верёвочный многоугольник изображал изогнутую ось, а та сторона, от которой шёл отсчёт ординат,— первоначальную ось балки.

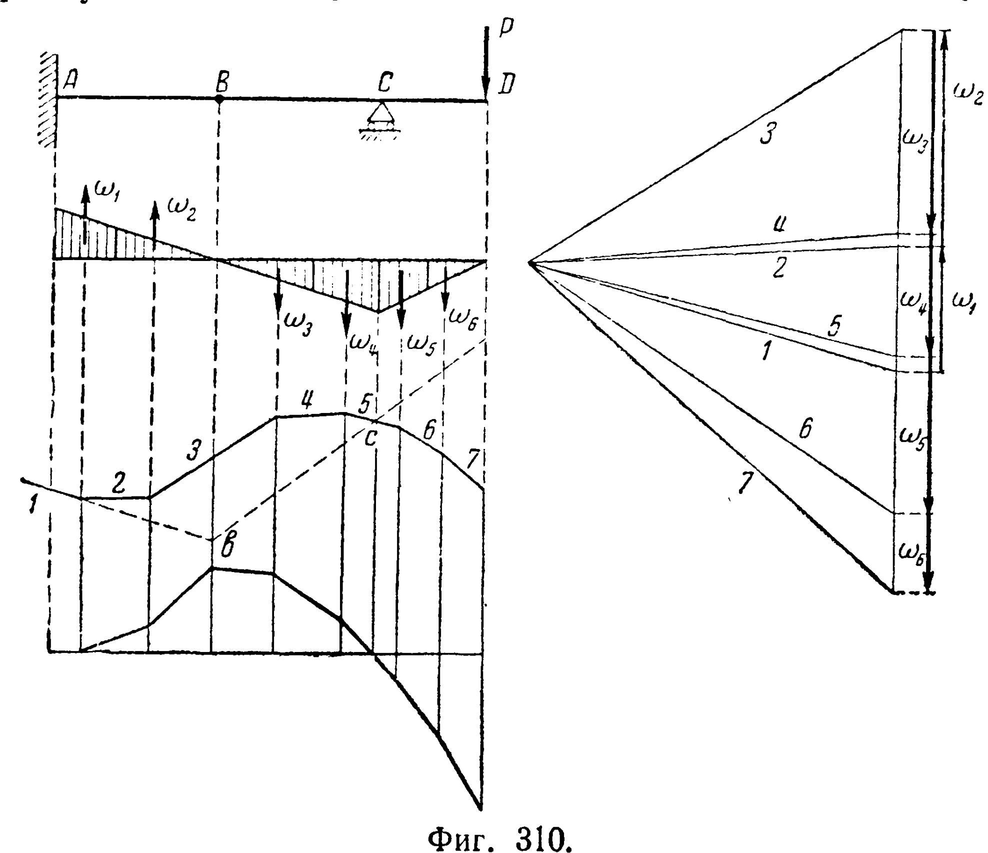
Поэтому *достаточно построить эпюру моментов для основной балки, не определяя условий опирания фиктивной балки, заменить эпюру распределённой фиктивной нагрузки (эпюру q_f) фиктивными сосредоточенными силами, построить для них верёвочный многоугольник при соответственно выбранном полюсном расстоянии, а затем так провести ось абсцисс, чтобы она заняла относительно верёвочного многоугольника такое же положение, какое первоначальная ось балки занимает относительно изогнутой.*

В первом примере (фиг. 308) первоначальная ось балки касалась изогнутой под сечением A, поэтому и ось абсцисс должна касаться верёвочного многоугольника в том же сечении, т. е. совпадать с продолжением его первой стороны; во втором примере (фиг. 309) прогибы балки в точках A и B должны быть равны нулю, поэтому ось абсцисс (замыкающая) пересекает верёвочный многоугольник под точками A и B.

Покажем применение графического способа ещё на одном примере. Возьмём балку, защемлённую концом, поддерживающую подвесную балку с консолью (фиг. 310).

Проведём ось абсцисс и построим эпюру моментов. Заменим эпюру $M(x)$, как нагрузку q_f, силами и построим силовой и верёвочный многоугольники, не забывая о знаках фиктивных сил. Так как конец A защемлён, то ось абсцисс для балки AB надо провести так, чтобы она коснулась верёвочного многоугольника под этим сечением, т. е. являлась бы продолжением первой стороны; ось абсцисс для второй балки BD определится тем, что в точке C прогиб равен нулю, а в шарнире B обе балки имеют один и тот же прогиб; поэтому ось абсцисс второй балки пройдёт через точку c пересечения верёвочного многоугольника с вертикалью опоры C и через точку b — точку пересечения первой оси абсцисс с вертикалью шарнира B. В нижней части фиг. 310 ординаты прогибов отложены от общей горизонтальной оси абсцисс.

Описанный в настоящем параграфе графический метод имеет ряд преимуществ: он приложим при любой системе нагрузок; по-



Фиг. 310.

строения при сложной системе грузов требуют почти столько же времени, что и при простой; легче заметить ошибку; точность этого способа для практических целей почти всегда достаточна.

ГЛАВА XX.

БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ.

§ 121. Подбор сечений балок равного сопротивления.

Все предыдущие расчёты относились к балкам постоянного сечения. На практике мы имеем часто дело с балками, поперечные размеры которых меняются по длине либо постепенно, либо резко.

Ниже рассмотрено несколько примеров подбора сечения и определения деформаций балок переменного профиля.

Так как изгибающие моменты обычно меняются по длине балки, то, подбирая её сечение по наибольшему изгибающему моменту, мы получаем излишний запас материала во всех сечениях балки, кроме того, которому соответствует M_{max}. Для экономии материала, а также для увеличения в нужных случаях гибкости балок применяют *балки равного сопротивления.* Под этим названием подразумевают балки, у которых во всех сечениях *наибольшее* нормальное напряжение одинаково и равно *допускаемому* (или не превышает его).

Условие, определяющее форму такой балки, имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma] \tag{20.1}$$

и

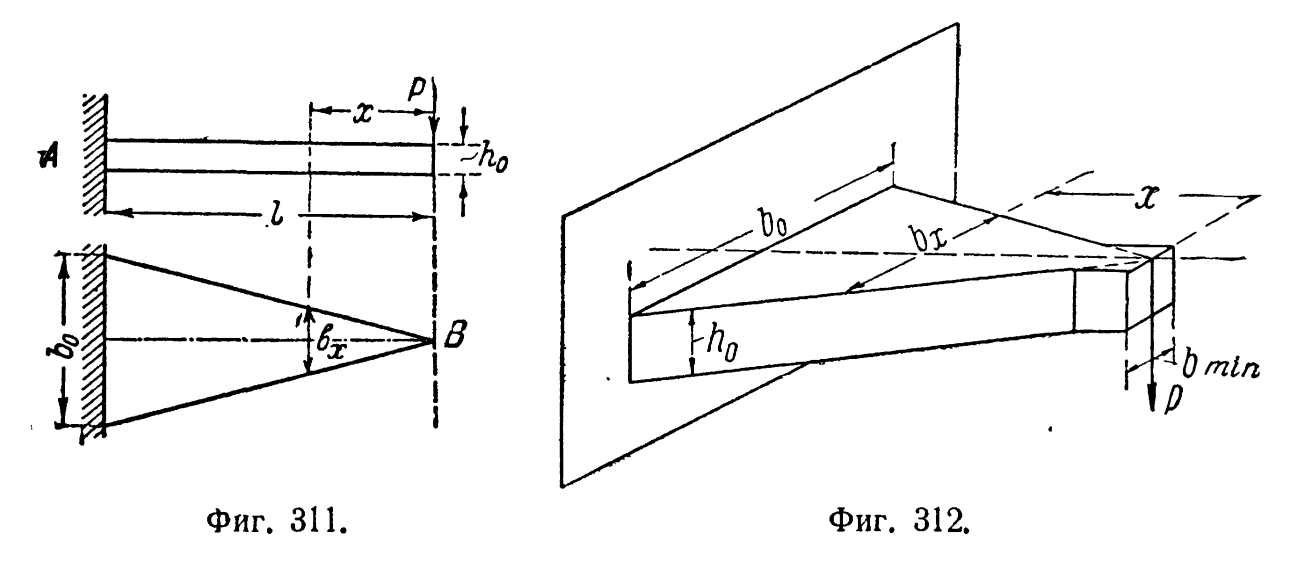
$$W(x) = \frac{M(x)}{[\sigma]}. \tag{20.2}$$

Здесь $M(x)$ и $W(x)$ — изгибающий момент и момент сопротивления в любом сечении балки; $W(x)$ для каждого сечения балки должен меняться пропорционально изгибающему моменту.

Условия (20.1) и (20.2) справедливы и для сечения с наибольшим изгибающим моментом; если обозначить W_0 — момент сопротивления балки в сечении с наибольшим изгибающим моментом M_{max}, то можно написать:

$$\frac{M_{max}}{W_0} = \frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma]. \tag{20.3}$$

Покажем ход вычислений на примере. Рассмотрим балку пролётом l, защемлённую концом A и нагружённую на другом конце силой P (фиг. 311 и 312). Выберем сечение этой балки в виде



Фиг. 311. Фиг. 312.

прямоугольника; задачу о надлежащем изменении момента сопротивления можно решать, меняя высоту или ширину балки или тот и другой размер вместе.

Пусть высота балки будет постоянной $h = h_0$, а ширина переменной — $b(x)$. Момент сопротивления в сечении на расстоянии x от свободного конца будет $W(x) = \frac{b(x)h^2}{6}$, а изгибающий момент $M = -Px$; момент сопротивления опорного сечения $W_0 = \frac{b_0h^2}{6}$, а наибольший изгибающий момент в опорном сечении $M_{max} = |Pl|$. В расчёте имеют значения лишь абсолютные величины $M(x)$ и M_{max}. По формуле (20.3) получаем:

$$\frac{Pl \cdot 6}{b_0h^2} = \frac{Px \cdot 6}{b(x)h^2}, \quad \text{откуда} \quad b(x) = b_0\frac{x}{l}, \tag{20.4}$$

т. е. ширина меняется по линейному закону в зависимости от x. При $x=l$ ширина равна b_0.

Вид балки в фасаде и плане показан на фиг. 311. Такое очертание балки получается, если учитывать её прочность только по отношению к нормальным напряжениям; ширина $b(x)$ в сечении B обращается в нуль.

Однако необходимо обеспечить прочность и по отношению к касательным напряжениям. Наименьшая ширина балки, требуемая этим условием, определится из уравнения

$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\cdot\frac{Q_{max}}{hb_{min}}=[\tau]$$

или, так как $Q_{max}=P$,

$$b_{min}=\frac{3P}{2h[\tau]}.$$

Исправленное очертание балки показано на фиг. 312.

§ 122. Практические примеры балок равного сопротивления.

Только что рассмотренный пример имеет применение на практике при проектировании рессор. Рессору, пренебрегая её достаточно слабой кривизной, можно рассматривать как балку на двух опорах (фиг. 313, *а*), нагружённую силой P посредине пролёта и реакциями $\frac{P}{2}$ по концам.

Запроектируем этот стержень как балку равного сопротивления с постоянной высотой h_0 и переменной шириной b_x; по симметрии достаточно ограничиться рассмотрением одной половины пролёта.

Моменты сопротивления $W(x)$ и W_0 будут выражаться также, как и в первом примере. Наибольший изгибающий момент — посредине пролёта — равен

$$M_{max}=\frac{Pl}{4}.$$

Изгибающий момент в любом сечении

$$M(x)=\frac{Px}{2}.$$

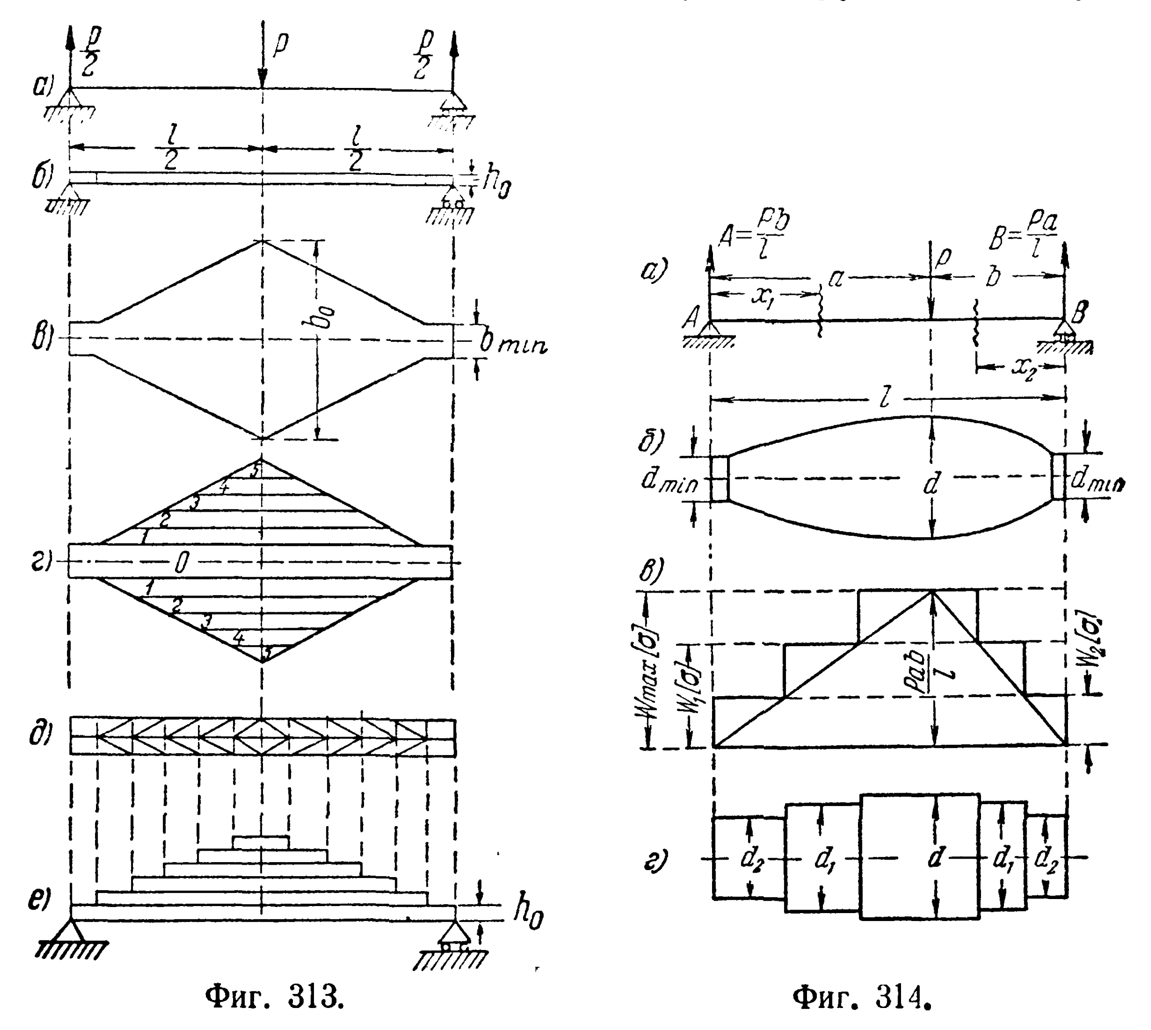
Решая задачу, как и в первом примере, получим:

$$b(x)=b_0\frac{2x}{l}. \qquad (20.5)$$

Ширина балки, необходимая для обеспечения сопротивления поперечной силе $\left(\frac{P}{2}\right)$, определяется формулой

$$b_{min}=\frac{3}{4}\,\frac{P}{h_0[\tau]}.$$

Вид рессоры в фасаде и плане показан на той же фиг. 313, *б* и *в*. Подобная конструкция рессоры была бы крайне неудобной на практике; поэтому ей придают несколько другую форму, не меняя характера её работы. Представим себе, что в плане лист рессоры разделён на узкие полоски, как показано на фиг. 313, *г*. Если мы расположим эти полоски не рядом друг с другом, а одну над



Фиг. 313. Фиг. 314.

другой, то, если пренебречь трением между ними, работа балки не изменится, а рессора получит вид, изображённый в плане на фиг. 313, *д* и в фасаде — на фиг. 313, *е*.

Конечно, на практике каждый лист рессоры, 1-й, 2-й и т. д., изготовляют цельным, а не состоящим из двух половинок.

Балки переменного сечения применяются и в машиностроении; например, валы часто конструируются как балки равного сопротивления.

Пример 87. Возьмём вал, опёртый по концам (фиг. 314, *а*) и нагружённый весом маховика в расстоянии a от левой и b от правой опоры. Пролёт вала l.

Найдём форму балки равного сопротивления для вала. Реакции вала равны:

$$A=\frac{Pb}{l}; \qquad B=\frac{Pa}{l}.$$

Наибольший изгибающий момент (под силой P)

$$M_{\max} = P\frac{ab}{l}.$$

Момент сопротивления в этом сечении (фиг. 314)

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Размер d может быть определён из условия прочности вала в этом сечении

$$\frac{M_{\max}}{W_0} \leqslant [\sigma]; \quad d = \sqrt[3]{\frac{32Pab}{\pi \cdot l \cdot [\sigma]}}.$$

Для левой части вала имеем условия:

$$M(x) = \frac{Pb}{l}x_1 \quad \text{и} \quad W(x) = \frac{\pi [d(x)]^3}{32},$$

тогда

$$\frac{Pab}{l} \cdot \frac{32}{\pi d^3} = \frac{Pbx_1}{l} \cdot \frac{32}{\pi [d(x)]^3}$$

или

$$d(x) = d\sqrt[3]{\frac{x_1}{a}};$$

для правой части вала получаем:

$$d(x) = d\sqrt[3]{\frac{x_2}{b}}.$$

Наименьший диаметр у концов вала может быть определён по условию прочности на касательные напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4Pb}{l\pi d^2_{\min}} = [\tau] \text{ для левой части}$$

и

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4Pa}{l\pi d^2_{\min}} = [\tau] \text{ для правой части.}$$

Отсюда

$$d_{\min} = 4\sqrt{\frac{Pb}{3\pi l[\tau]}}$$

или

$$d_{\min} = 4\sqrt{\frac{Pa}{3\pi l[\tau]}}.$$

Этот диаметр, однако, приходится обычно значительно увеличивать из условий проверки цапф вала на нагревание. Теоретическая форма вала показана на фиг. 314, *б*.

Практически диаметр вала меняют ступенчатым образом. Разницу между d и $d_{\min}$ разбивают на несколько частей; таким образом, отдельные участки вала будут иметь диаметры d, d_1, d_2, ... Длину каждого участка проще всего определить графически, пользуясь эпюрой моментов. Вычисляем для этого моменты сопротивления, соответствующие диаметрам d, d_1, d_2, ...; они будут $W_{\max} = \frac{\pi d^3}{32}$; $W_1 = \frac{\pi d_1^3}{32}$ и т. д. Умножая эти моменты сопротивления на допускаемое напряжение $[\sigma]$, получаем величину допускаемого изгибающего

момента для каждого участка вала. Проводим на эпюре моментов ряд горизонтальных линий с ординатами $W_{max}[\sigma]$, $W_1[\sigma]$, $W_2[\sigma]$, ... (фиг. 314, *в*); точки пересечения этих линий с эпюрой моментов определяют длины участков вала. Действительная форма вала дана на фиг. 314, *г*.

Возьмём числовой пример. Пусть $l = 1{,}2$ *м*; $a = 0{,}7$ *м*; $b = 0{,}5$ *м*; $P = 5$ *т*; $[\sigma] = 400$ *кг/см²*; $[\tau] = 250$ *кг/см²*.

$$A = \frac{5000 \cdot 0{,}5}{1{,}2} \approx 2100 \text{ кг}; \qquad B = \frac{5000 \cdot 0{,}7}{1{,}2} \approx 2900 \text{ кг}.$$

Тогда

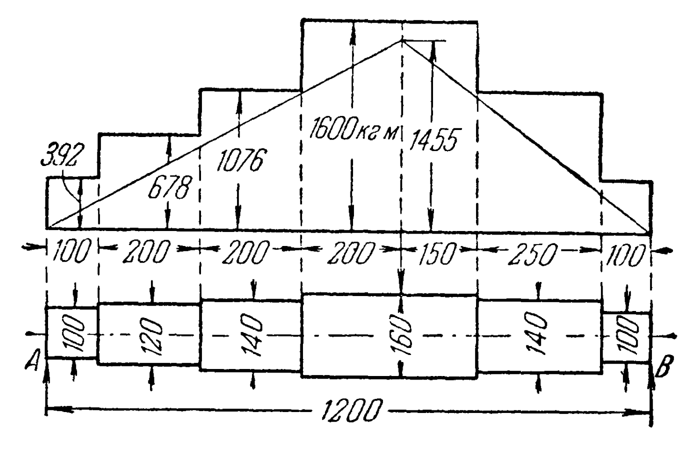
$$d = 2\sqrt[3]{\frac{4Pab}{\pi l[\sigma]}} = 2\sqrt[3]{\frac{4 \cdot 5000 \cdot 50 \cdot 70}{\pi \cdot 120 \cdot 400}} = 15{,}5 \text{ см} \approx 16 \text{ см},$$

$$d_{min} = 4\sqrt{\frac{Pa}{3\pi l[\tau]}} = 4\sqrt{\frac{5000 \cdot 70}{3\pi \cdot 120 \cdot 250}} = 4{,}45 \text{ см}.$$

Принимая из условий проверки на нагревание диаметр цапф равным 10 *см*, берём диаметры участков вала равными

$$d = 16 \text{ см}, \quad d_1 = 14 \text{ см},$$
$$d_2 = 12 \text{ см}, \quad d_3 = 10 \text{ см}.$$

Вычислив для этих диаметров соответствующие допускаемые изгибающие моменты по формуле $W[\sigma]$, проводя соответствующие горизонтали на эпюре моментов (фиг. 315) и округляя полученные длины участков, окончательно устанавливаем форму вала.



Фиг. 315.

Эпюра действительно допускаемых изгибающих моментов для ступенчатого вала показана на фиг. 315 ступенчатой линией. Она нигде не пересекает треугольную эпюру моментов от нагрузки P; всюду мы имеем некоторый запас.

Для сравнения в сечениях, где изменяется диаметр, вычислены ординаты этой эпюры по формуле $M(x) = Ax$ и сопоставлены с допускаемыми моментами ($W[\sigma]$) для этих же сечений:

$$W[\sigma] = \frac{\pi 16^3}{32} \cdot 400 = 160\,000 \text{ кгсм} > 2100 \cdot 70 = 147\,000 \text{ кгсм},$$

$$W_1[\sigma] = \frac{\pi 14^3}{32} \cdot 400 = 107\,600 \quad \text{»} \quad > 2100 \cdot 50 = 105\,000 \quad \text{»}$$

$$W_2[\sigma] = \frac{\pi 12^3}{32} \cdot 400 = 67\,800 \quad \text{»} \quad > 2100 \cdot 30 = 63\,000 \quad \text{»}$$

$$W_3[\sigma] = \frac{\pi 10^3}{32} \cdot 400 = 39\,200 \quad \text{»} \quad > 2100 \cdot 10 = 21\,000 \quad \text{»}$$

При конструировании клёпаной или сварной балки нет необходимости тянуть все горизонтальные листы по всей длине балки. По мере уменьшения изгибающего момента можно обрывать сначала наружный горизонтальный лист пояса, а потом и внутренний.

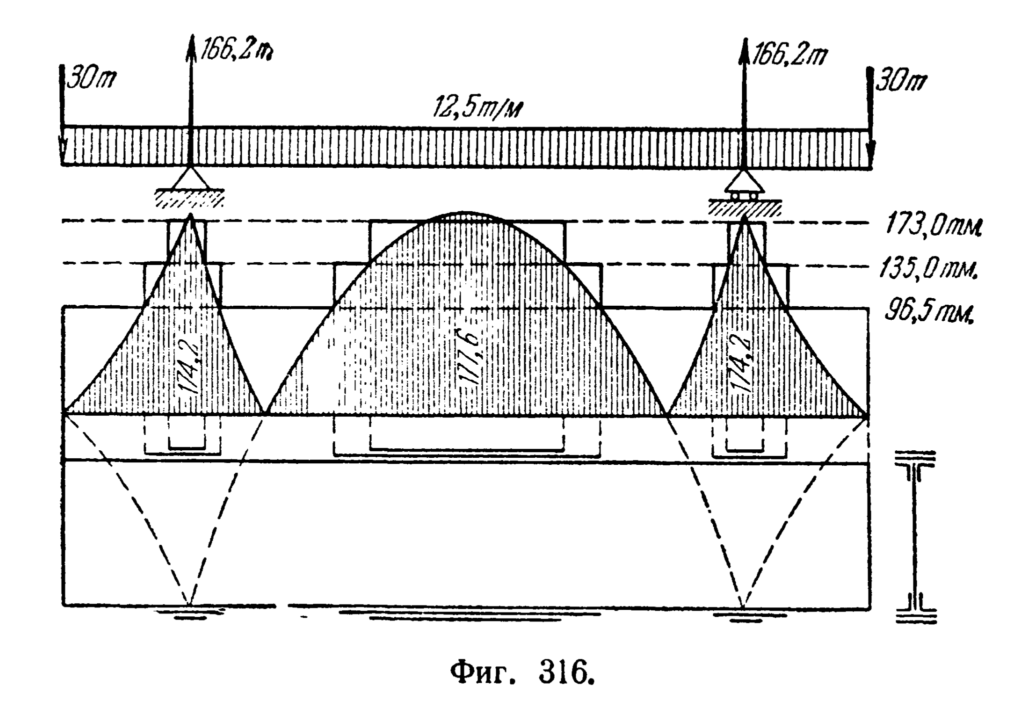
Умножая моменты сопротивления балки с одним листом и без листов на допускаемое напряжение, получаем величины допускаемых изгибающих моментов для этих сечений.

Пользуясь эпюрой действительных изгибающих моментов так же, как и для случаев вала, получаем возможность определить необходимую длину горизонтальных листов балки. Определим значения $W[\sigma]$ для клёпаной балки, подробно разобранной в §§ 98—102. Исходные данные берём из таблицы 21. Подсчёты ведём согласно таблице 21а.

Таблица 21а. **Допустимые изгибающие моменты.**

	$J_{нет}$ $см^4$	z_{max} $см$	W $см^3$	$[M]$ $тм$
Балка полного сечения.....	692 500	64	10 800	173,0
Балка с одной парой листов....................	531 200	63	8400	135,0
Балка без поясных листов	374 900	62	6050	96,5

На фиг. 316 заштрихована эпюра действующих изгибающих моментов. Ступенчатая линия — эпюра допустимых изгибающих моментов.



Фиг. 316.

Надо заметить, что на практике обычно избегают оставлять сечение балки совсем без горизонтальных листов для улучшения связи между уголками.

§ 123. Определение деформаций балок переменного сечения.

При определении прогибов и углов поворота для балок с переменным сечением надлежит иметь в виду, что жёсткость такой балки является функцией от x. Поэтому дифференциальное уравнение изогнутой оси принимает вид

$$EJ(x)\frac{d^2y}{dx^2}=M(x),$$

где $J(x)$ — переменный момент инерции сечений балки.

До интегрирования этого уравнения можно выразить $J(x)$ надлежащей подстановкой через J, т. е. через момент инерции того сечения, где действует M_{max}; после этого вычисления производятся так же, как и для балок постоянного сечения (§ 109).

Покажем это на примере, разобранном выше. Определим прогиб балки равного сопротивления (фиг. 311), защемлённой одним концом, нагружённой на другом конце силой P и имеющей постоянную высоту. Начало координат выберем на свободном конце балки. Тогда

$$M(x)=-Px;\quad J(x)=\frac{b(x)h^3}{12}=\frac{b_0h^3}{12}\frac{x}{l}=J\frac{x}{l}, \qquad (20.6)$$

$$EJ\frac{x}{l}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=-Px.$$

Дифференциальное уравнение принимает вид:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{Pxl}{x}=-Pl. \qquad (20.7)$$

Интегрируем два раза:

$$EJ\frac{dy}{dx}=-Plx+C;\ EJy=-Pl\frac{x^2}{2}+Cx+D.$$

Для определения постоянных интегрирования имеем условия: в точке A при $x=l$ прогиб $y=0$ и угол поворота $\frac{dy}{dx}=0$, или

$$0=-Pl^2+C \quad \text{и} \quad 0=-\frac{Pl^3}{2}+Cl+D;$$

отсюда

$$C=Pl^2 \quad \text{и} \quad D=-\frac{Pl^3}{2}.$$

Выражения для y и θ принимают вид:

$$\theta=\frac{dy}{dx}=-\frac{Pl}{EJ}x+\frac{Pl^2}{EJ}=\frac{Pl^2}{EJ}\left[1-\frac{x}{l}\right],$$

$$y=-\frac{Plx^2}{2EJ}+\frac{Pl^2x}{EJ}-\frac{Pl^3}{2EJ}=-\frac{Pl^3}{2EJ}\left[1-2\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right].$$

Наибольший прогиб на свободном конце балки B получится при $x=0$; он равен

$$f_{max}=-\frac{Pl^3}{2EJ}.$$

Если бы мы всю балку сделали постоянного сечения с моментом инерции J, то наибольший прогиб был бы

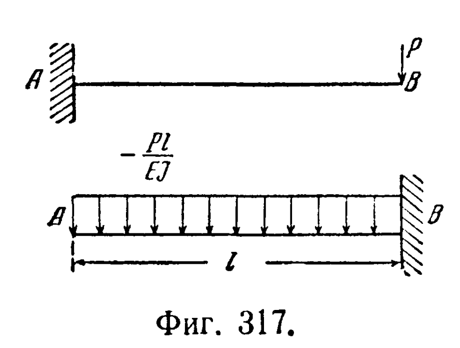
$$f_{\max} = -\frac{Pl^3}{3EJ},$$

т. е. в $1\frac{1}{2}$ раза меньше.

Таким образом, балки переменного сечения обладают большей гибкостью по сравнению с балками постоянной жёсткости при одинаковой с ними прочности. Именно поэтому, а не только ради экономии материала, они и применяются в таких конструкциях, как рессоры.

Уравнение (20.7) показывает, что в рассмотренном примере кривизна балки постоянна, т. е. ось балки должна изогнуться по *дуге круга*. Между тем в результате интегрирования мы получили *уравнение параболы;* предлагаем учащимся объяснить, почему это произошло.

Применение графо-аналитического метода определения деформаций к балкам переменного сечения также не представляет затруднений. Вместо того чтобы для вычислений f и θ делить на жёсткость EJ изгибающий момент и поперечную силу в фиктивной балке, можно за фиктивную нагрузку принять эпюру моментов для основной балки, разделив её ординаты на EJ. Тогда



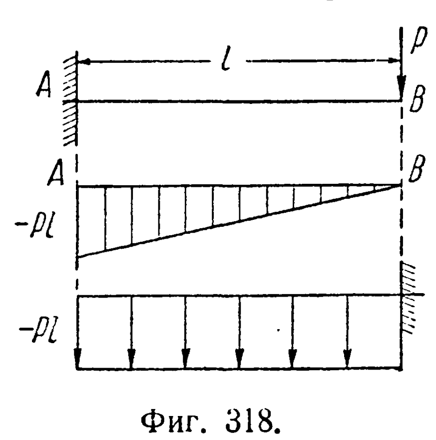
Фиг. 317.

$$q'_f = \frac{M(x)}{EJ} \text{ и } f = M'_f, \ \theta = Q'_f.$$

Обобщая этот способ на балки переменного сечения, полагаем

$$q'_f = \frac{M(x)}{EJ(x)};$$

загружаем этой нагрузкой фиктивную балку и получаем искомые прогибы и углы поворота как изгибающие моменты и поперечные силы в сечениях фиктивной балки.



Фиг. 318.

Для рассмотренного выше примера $q'_f = -\frac{Pxl}{EJx} = -\frac{Pl}{EJ}$, т. е. фиктивная балка должна быть загружена сплошной уже не треугольной, а равномерно распределённой нагрузкой (фиг. 317). Прогиб сечения B, равный изгибающему моменту в защемлении фиктивной балки, выразится формулой

$$f = M'_f = \frac{q'_f l^2}{2} = -\frac{Pl^3}{2EJ}.$$

Тот же результат мы получили бы, предполагая, что наша балка имеет постоянную жёсткость EJ, а её эпюра изгибающих моментов преобразована путём умножения каждой ординаты на отношение

$\frac{EJ}{EJ(x)}$; преобразованная эпюра моментов имела бы ординаты

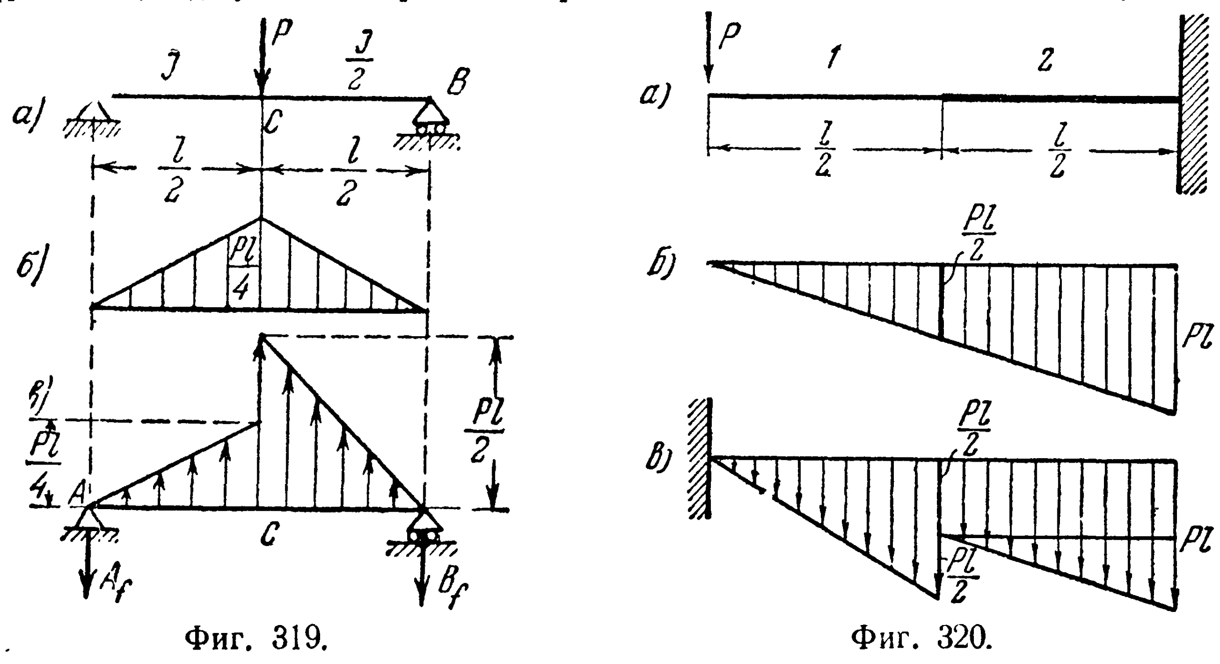
$$-Px\frac{El}{EJ(x)}=-Px\frac{EJl}{EJx}=-Pl$$

(фиг. 318); тогда по общему правилу графо-аналитического метода

$$M_f=-Pl\cdot l\frac{l}{2}=-\frac{Pl^3}{2}\quad \text{и}\ y=-\frac{Pl^3}{2EJ}.$$

Таким образом, определение прогибов балки переменного сечения можно привести к той же операции для балки *постоянной жёсткости*, но с *преобразованной* умножением на $\frac{EJ}{EJ(x)}$ эпюрой моментов.

Пример 88. Определить графо-аналитически прогиб под грузом P для балки, свободно лежащей на двух опорах и нагружённой посредине пролёта l сосредоточенным грузом P (фиг. 319, *а*). Момент инерции сечений левой половины балки равен J, правой $\frac{J}{2}$. Преобразуем эпюру моментов (фиг. 319, *б*), умножая ординаты правой половины на отношение $J:J/2=2$;



Фиг. 319. Фиг. 320.

фиктивная балка с преобразованной нагрузкой изображена на фиг. 319, *в*. Левая фиктивная реакция равна

$$A_f=\frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{4}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{Pl^2}{12};$$

фиктивный изгибающий момент в сечении C и прогиб точки C соответственно будут:

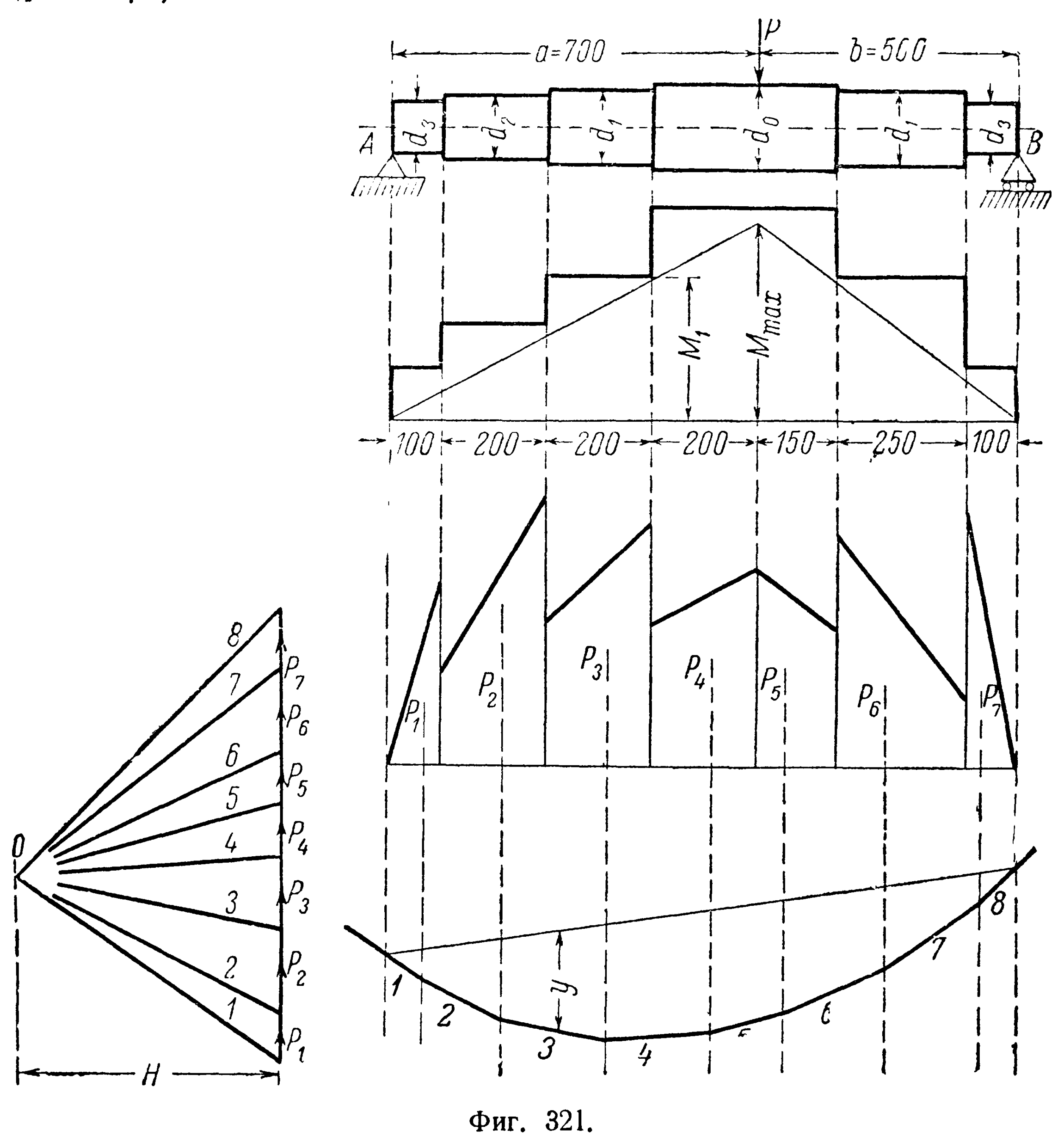
$$M_{fC}=-A_f\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\frac{l}{2}\cdot\frac{Pl}{4}\frac{l}{6}=-\frac{Pl^3}{24}+\frac{Pl^3}{96}=-\frac{Pl^3}{32};$$

$$f_C=-\frac{Pl^3}{32EJ}.$$

Пример 89. Определить прогиб балки, защемлённой одним концом и загружённой сосредоточенной силой на другом конце (фиг. 320, *а*). Одна половина балки имеет сечение бо́льших размеров, причём

$$J_2>J_1.$$

Преобразуя эпюру изгибающего момента $M(x)$ (фиг. 320, *б*) в фиктивную нагрузку, мы должны ординаты левой части эпюры увеличить в $\frac{J_2}{J_1}$ раз (фиг. 320, *в*).



Фиг. 321.

Прогиб под силой P определится следующим подсчётом $\left(\text{при } \frac{J_2}{J_1}=2\right)$:

$$M_f = -\frac{1}{2}P\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2} - Pl\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}l = -\frac{3}{8}Pl^3,$$

$$f_p = -\frac{3Pl^3}{8EJ_2}.$$

Этот же приём следует использовать при применении *графического* построения изогнутой оси балки переменного сечения. Надо выбрать жёсткость EJ одного из сечений балки, обычно наиболь-

шего, за основную, преобразовать эпюру моментов и для неё построить верёвочный многоугольник с полюсным расстоянием (§ 120), равным $H = \frac{EJ}{k}$. Ординаты построенного обычным порядком многоугольника изобразят прогибы нашей балки.

Метод преобразования эпюры особенно удобен, если сечение балки меняется ступенчатым образом, а не непрерывно. Применим этот способ к построению изогнутой оси вала, рассмотренного в предыдущем параграфе. Построение показано на фиг. 321. Эпюра моментов имеет вид треугольника с наибольшей ординатой, равной

$$M_{max} = \frac{Pab}{l} = \frac{5000 \cdot 70 \cdot 50}{120} = 145\,500 \ \textit{кгсм}.$$

Диаметры d участков вала и соответствующие моменты инерции $\frac{\pi d^4}{64}$ имеют следующие значения:

Участки	Диаметр	Момент инерции
	см	*см*^{4}
0	16	3217
1	14	1886
2	12	1018
3	10	491

Ордината эпюры моментов, соответствующая переходу от участка с диаметром 16 *см* к участку с диаметром 14 *см*, равна $M_1 = Ax_1 = 2100 \cdot 50 = 105\,000$ *кгсм*; после преобразования она будет равна

$$105\,000 \cdot \frac{3217}{1886} = 180\,000 \ \textit{кгсм}.$$

Подобным же образом преобразуются все прочие граничные ординаты. Части полученной грузовой площади заменены сосредоточенными силами; далее известным уже образом построен верёвочный многоугольник, изображающий изогнутую ось вала.

ОТДЕЛ VII.

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ.

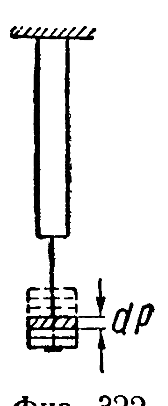
ГЛАВА XXI.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДЕФОРМАЦИЙ.

§ 124. Постановка вопроса.

Кроме рассмотренных способов вычисления прогибов и углов поворота сечений балок существует более общий метод, пригодный для определения деформаций любых упругих конструкций. Он основан на применении *закона сохранения энергии.*

При статическом растяжении или сжатии упругого стержня происходит превращение потенциальной энергии из одного вида в другой; часть *потенциальной* энергии действующего на стержень груза полностью переходит в потенциальную энергию деформации стержня. Действительно, если мы будем нагружать стержень путём постепенного подвешивания к его нижнему концу очень малых грузов dP (фиг. 322), то при добавлении каждого такого груза подвешенная уже часть нагрузки опустится и её потенциальная энергия уменьшится, а потенциальная энергия деформации стержня соответственно увеличится.



Фиг. 322.

Это явление имеет место при любом виде деформации всякой упругой конструкции при статической нагрузке; такую конструкцию можно рассматривать как своеобразную машину, преобразующую один вид потенциальной энергии в другой.

Мы условились (§ 2) называть «статической» такую нагрузку, которая возрастает постепенно и таким образом, что *ускорениями* элементов конструкции можно пренебречь; передача давлений (сил) от одной части конструкции на другую не меняет характера *движения* этих частей, т. е. их скорость остаётся постоянной и ускорение отсутствует.

При этих условиях деформация конструкции не будет сопровождаться изменением кинетической энергии системы, и будет иметь место лишь преобразование потенциальной энергии из одного вида в другой. При этом мы пренебрегаем магнитными, электрическими и тепловыми явлениями, сопровождающими упругие статические деформации тела лишь в очень слабой мере.

Так как характер движения всех элементов конструкции с течением времени не меняется, то в каждый момент времени будет иметь место *равновесие* как для каждой части конструкции в целом под действием внешних сил и реакций, так и для каждого *элемента* этой части под действием внешних сил и напряжений, приложенных к этому элементу. Деформации конструкции, напряжения в её частях и реакции, передающиеся от одной части на другую, успевают следовать за ростом нагрузки.

Таким образом, можно сказать, что *полное преобразование одного вида потенциальной энергии в другой имеет место, если деформация происходит без нарушения равновесия системы.* Мерой энергии, превратившейся в другой вид, является *величина работы,* произведённой силами, действующими на конструкцию.

Обозначим величину накопленной потенциальной энергии деформации через U, а уменьшение потенциальной энергии внешних нагрузок U_P. Тогда величина U_P измеряется *положительной* работой этих нагрузок A_P; с другой стороны, накоплению потенциальной энергии деформации U соответствует *отрицательная* работа внутренних, междучастичных сил A, так как перемещения точек тела при деформации происходят в обратном по отношению к внутренним силам направлении.

Закон сохранения энергии при деформациях *упругих* систем принимает вид:

$$U_P = U; \tag{21.1}$$

заменяя в этой формуле величины U_P и U *численно* равными им значениями работ A_P и $-A$, получаем иную формулировку этого закона:

$$A_P = -A \text{ или } A_P + A = 0. \tag{21.2}$$

Эта формулировка закона сохранения энергии совпадает с так называемым «началом» возможных перемещений в *применении к упругим системам;* равенство (21.2) выражает ту мысль, что при перемещениях *без нарушения равновесия* сумма работ всех сил, приложенных к точкам тела, равна нулю.

Таким образом, начало возможных перемещений в применении к упругим системам является следствием закона сохранения энергии.

Из формулы (21.1) следует, что потенциальная энергия деформации U *численно* равна работе внешних сил A_P, проделанной ими при этой деформации:

$$U = A_P. \tag{21.3}$$

Совершенно неправильным является истолкование этого равенства, иногда встречающееся в учебниках по строительной механике: «работа внешних сил при деформации стержня переходит в потенциальную энергию деформации»; переходить в потенциальную энер-

гию деформации может только другой вид энергии; как правило, это — потенциальная энергия внешних нагрузок. Величина же работы, производимой при этом переходе внешними силами, является лишь *числовой мерой* превратившейся части энергии.

§ 125. Вычисление потенциальной энергии.

А. При вычислении потенциальной энергии мы будем предполагать, что деформации не только материала, но и всей конструкции, следуя закону Гука, пропорциональны нагрузкам, т. е. *линейно* с ними связаны и растут *постепенно* вместе с ними.

Мы знаем (§ 11), что при статическом растяжении или сжатии стержня силами P величина работы A_P, а следовательно, и величина энергии U равняется:

$$U = A_P = \frac{1}{2} P\Delta l = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{\Delta l^2 EF}{2l}. \tag{21.4}$$

В случае сдвига (§ 54)

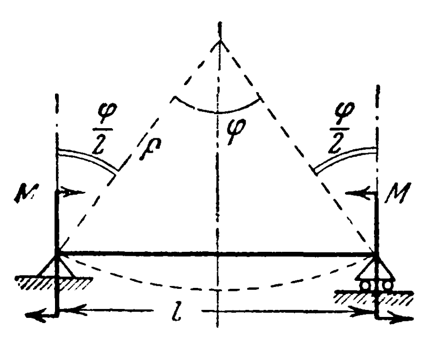
$$U = A_P = \frac{1}{2} Q\Delta s = \frac{Q^2 a}{2GF} = \frac{\Delta s^2 GF}{2a}. \tag{21.5}$$

При кручении (§ 62)

$$U = \frac{1}{2} M_к \varphi = \frac{M_к^2 l}{2GJ_p} = \frac{\varphi^2 GJ_p}{2l}. \tag{21.6}$$

Так же как и при кручении, может быть вычислена потенциальная энергия при чистом изгибе.

Концевые сечения балки под действием изгибающих моментов (фиг. 323) повернутся на угол $\theta = \frac{\varphi}{2}$, где φ — центральный угол изогнувшейся по дуге радиусом ρ оси балки. Тогда



Фиг. 323.

$$U = A_P = \frac{M\varphi}{2} = \frac{M^2 l}{2EJ} = \frac{\varphi^2 EJ}{2l}, \tag{21.7}$$

так как $\varphi = \frac{l}{\rho}$, а $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$ (13.10) (см. § 78).

Из формул (21.4) — (21.7) следует, что потенциальная энергия деформации равна половине произведения силы или пары сил на перемещение по её направлению того сечения, где эта сила приложена. Условимся называть термином «обобщённая сила» всякую нагрузку, вызывающую соответствующее нагрузке перемещение, т. е. и сосредоточенную силу, и пару сил, и т. п.; перемещение же, ***соответствующее*** этой силе, будем называть «обобщённой координатой».

«Соответствие» заключается в том, что речь идёт о перемещении того сечения, где приложена рассматриваемая сила, причём о ***таком***

перемещении, что произведение его на эту силу даёт нам величину работы; для сосредоточенной силы это будет линейное перемещение по направлению действия силы — прогиб, удлинение; для пары сил — это угол поворота сечения по направлению действия пары.

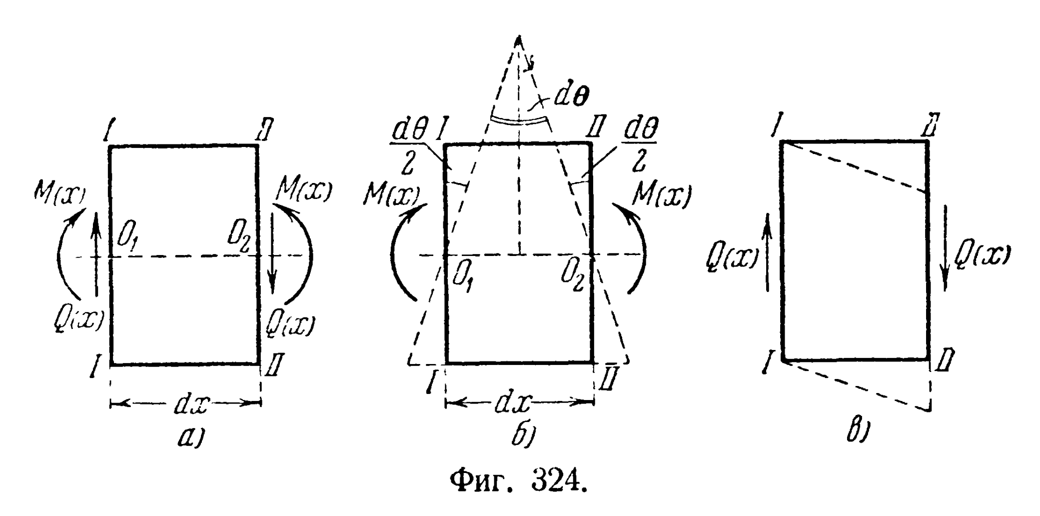
Теперь мы можем формулы (21.4) — (21.7) обобщить: *потенциальная энергия деформации численно равна половине произведения обобщённой силы на соответствующую ей координату:*

$$U = \frac{P\delta}{2}, \tag{21.8}$$

где P — обобщённая сила, δ — обобщённая координата.

Формулы (21.4) — (21.7) показывают, что потенциальная энергия является функцией второй степени от *независимых* внешних сил, так как в эти формулы не входят реакции, *зависящие* от приложенных к элементу сил и связанные с ними уравнениями равновесия. Из тех же формул видно, что величина потенциальной энергии деформации является функцией второй степени от «обобщённых координат» системы и вполне ими определяется. Таким образом, *порядок приложения нагрузок в этом отношении безразличен,* важна лишь *окончательная форма* деформированного элемента. Поэтому, хотя результаты этого параграфа получены в предположении, что нагрузка возрастает *статически,* при сохранении равновесия в течение всего процесса нагружения, однако выведенные формулы сохраняют силу и при *любом способе* приложения нагрузок, лишь бы значения сил и деформаций были связаны линейной зависимостью и относились к тому моменту, когда *установится равновесие конструкции.*

Б. В общем случае изгиба изгибающий момент $M(x)$ является величиной переменной. В любом сечении ему будет сопутствовать поперечная сила $Q(x)$. Поэтому рассматривать следует уже не всю балку в целом, а лишь бесконечно малый элемент балки длиной dx.



Фиг. 324.

Под действием изгибающих усилий сечения элемента поворачиваются и образуют между собой угол $d\theta$ (фиг. 324, *б*). Касательные же усилия стремятся вызвать (фиг. 324, *в*) перекос элемента; таким

образом перемещения от нормальных напряжений идут перпендикулярно к направлению касательных напряжений, и наоборот. Это позволяет *независимо* вычислять работу изгибающих и касательных усилий.

Обычно работа касательных усилий оказывается малой по сравнению с работой нормальных, поэтому мы пока ею будем пренебрегать. Элементарная работа нормальных усилий (как и в случае чистого изгиба) равна:

$$dA_P = dU = \frac{1}{2} M(x)\, d\theta = \frac{1}{2} M(x) \frac{M(x)\, dx}{EJ} \qquad (21.9)$$

или

$$dU = \frac{M^2(x)\, dx}{2EJ}. \qquad (21.9')$$

Фиг. 325.

Вся потенциальная энергия изгиба получится суммированием по длине балки

$$U = \int\limits_l \frac{M^2(x)\, dx}{2EJ} = \frac{1}{2EJ} \int\limits_l M^2(x)\, dx. \qquad (21.9'')$$

Знак предела интегрирования условно указывает, что интегрирование должно охватить всю балку; в тех случаях, когда для $M(x)$ мы имеем несколько участков, интеграл (21.9″) приходится разбивать на сумму интегралов.

Вычислим потенциальную энергию балки на двух опорах, нагружённой силой P (фиг. 325). Эпюра моментов имеет два участка; поэтому

$$U = \int\limits_0^a \frac{M_1^2 dx}{2EJ} + \int\limits_0^b \frac{M_2^2 dx}{2EJ};$$

$$M_1 = +Ax_1 = +\frac{Pb}{l} x_1; \quad M_2 = +Bx_2 = +\frac{Pa}{l} x_2;$$

$$U = \frac{1}{2EJ}\left[\int\limits_0^a \left(\frac{Pb}{l}\right)^2 x_1^2 dx + \int\limits_0^b \left(\frac{Pa}{l}\right)^2 x_2^2 dx\right] = \frac{P^2a^2b^2}{6EJl}.$$

В. Зная величину потенциальной энергии и пользуясь тем, что из внешних сил только сила P совершает работу при деформации балки, можем найти величину прогиба под этой силой из следующих зависимостей:

$$A_P = \frac{1}{2} Pf = U, \; U = \frac{P^2a^2b^2}{6EJl},$$

откуда

$$f = \frac{Pa^2b^2}{3EJl}.$$

В частном случае при $a=b=\frac{l}{2}$ получаем хорошо известное уже значение прогиба:

$$f=\frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Иногда, при малом количестве внешних активных сил, определение величины потенциальной энергии при изгибе можно производить, минуя формулу (21.8), путём вычисления работы внешних сил.

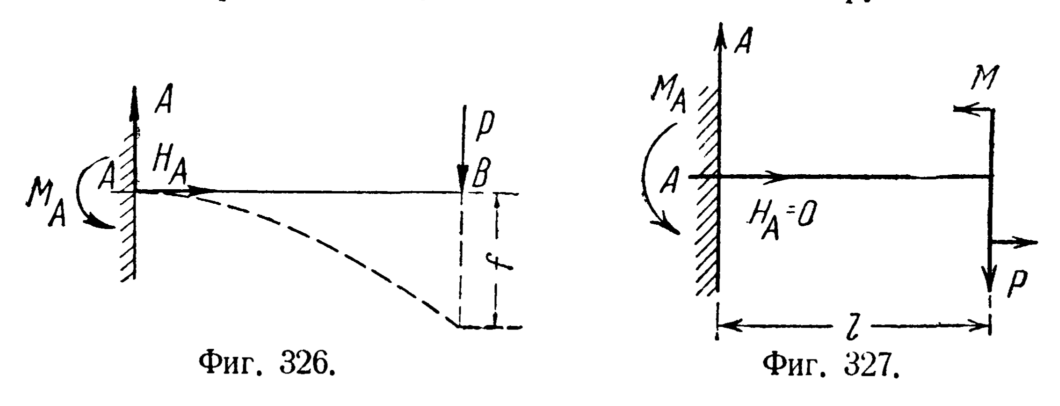
Рассмотрим, например, балку (фиг. 326), защемлённую концом A и нагружённую на конце B сосредоточенной силой P. Пролёт балки l. На балку действует заданная сила P и вызванные ею реакции A, M_A и H_A. Так как опорное сечение неподвижно, то реакции работы при деформации балки не производят. Работу даёт лишь сила P; прогиб конца балки при постепенном возрастании силы P связан с ней линейной зависимостью:

$$f=\frac{Pl^3}{3EJ} \quad \text{или} \quad P=\frac{3fEJ}{l^3};$$

работа сила P

$$A_P=U=\frac{1}{2}Pf=\frac{P^2l^3}{6EJ}=\frac{3f^2EJ}{2l^3}.$$

Если на элемент конструкции будет действовать несколько сил, то полная потенциальная энергия получится суммированием таких произведений, вычисленных при *совместном* действии на конструкцию всех этих сил, так как каждое перемещение будет зависеть *от всей* нагрузки.



Фиг. 326. Фиг. 327.

Например, при действии на балку, защемлённую концом (фиг. 327), силы P и пары M, приложенных на свободном конце B, потенциальная энергия будет равна:

$$A_P=U=\frac{1}{2}Pf_B+\frac{1}{2}M\theta_B=\frac{1}{2}P\left(\frac{Pl^3}{3EJ}-\frac{Ml^2}{2EJ}\right)+\frac{1}{2}M\left(\frac{Ml}{EJ}-\frac{Pl^2}{2EJ}\right)=$$
$$=\frac{P^2l^3}{6EJ}+\frac{M^2l}{2EJ}-\frac{PMl^2}{2EJ}.$$

В двух последних примерах для определения величины работы внешних сил $A_P=U$ требовалось знать величину прогиба или угла поворота в сечении приложения внешней силы.

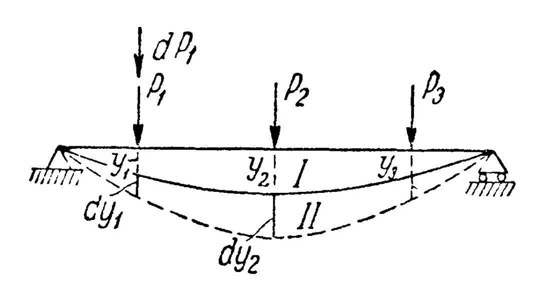
§ 126. Теорема Кастильяно.

Установим теперь метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации. Поставим себе задачу нахождения перемещений точек упругой системы по направлению действия приложенных к этой системе внешних сил.

Будем решать эту задачу в несколько приёмов; сначала рассмотрим более простой случай (фиг. 328), когда на балку в сечениях *1*, *2*, *3*,... действуют только сосредоточенные силы P_1, P_2, P_3, ... и т. д. Под действием этих сил балка прогнётся по кривой *I* и останется в *равновесии*.

Прогибы сечений *1*, *2*, *3*, ..., в которых приложены силы P_1, P_2, P_3, ..., обозначим y_1, y_2, y_3, ... и т. д. Найдём один из этих прогибов, например y_1 — прогиб сечения, в котором приложена сила P_1.

Переведём балку, *не нарушая равновесия*, из положения *I* в смежное положение *II*, показанное на фиг. 328 пунктиром. Это можно сделать различными приёмами: добавить новую нагрузку, увеличить уже приложенные и т. д.



Фиг. 328.

Мы представим себе, что для перехода к смежному деформированному состоянию *II* к силе P_1 сделана бесконечно *малая* добавка dP_1 (фиг. 328); чтобы при этом переходе не нарушать равновесия, будем считать, что эта добавка прикладывается статически, т. е. возрастает от нуля до окончательного значения медленно и постепенно.

При переходе от состояния *I* балки к состоянию *II* все нагрузки P опустятся, значит, их потенциальная энергия уменьшится. Так как равновесие не нарушалось, то уменьшение энергии нагрузок dU_P целиком преобразовалось в увеличение потенциальной энергии деформаций балки dU. Величина dU_P измеряется работой внешних сил при переходе балки из положения *I* в положение *II*:

$$dU = dA_P. \tag{21.10}$$

Изменение dU потенциальной энергии деформации, являющейся функцией сил P_1, P_2, P_3, ..., произошло за счёт очень малого приращения одной из этих независимых переменных P_1; поэтому дифференциал такой сложной функции равен:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_1} dP_1. \tag{21.11}$$

Что касается величины dA_P, то эта работа в свою очередь является разностью работы нагрузок P для положений *II* и *I*:

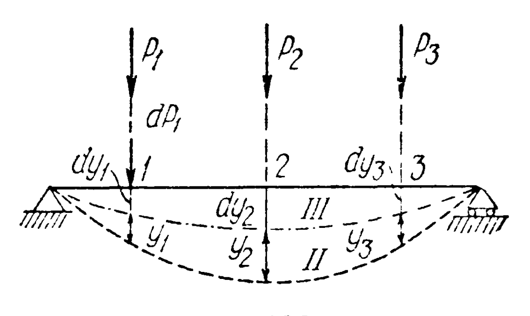
$$dA_P = A_2 - A_1.$$

Работа A_1 при одновременном и постепенном возрастании сил P равна:

$$A_1 = \frac{1}{2} P_1 y_1 + \frac{1}{2} P_2 y_2 + \frac{1}{2} P_3 y_3.$$

При вычислении работы A_2 учтём, что её величина всецело определяется *окончательной* формой деформированной балки (§ 125) и не зависит от порядка, в котором производилась нагрузка.

Предположим, что мы сначала нагрузили нашу балку грузом dP_1; балка очень немного прогнётся (фиг. 329, положение *III*), и прогибы её в точках *1*, *2*, *3* будут dy_1, dy_2, dy_3. Работа статически приложенной нагрузки dP_1 будет равна $\frac{1}{2}dP_1dy_1$. После этого начнём постепенно нагружать балку одновременно возрастающими грузами P_1, P_2, P_3.



Фиг. 329.

К первоначальным прогибам dy_1, dy_2, dy_3 добавятся прогибы y_1, y_2, y_3 (фиг. 329). При этой стадии нагружения силы P_1, P_2, P_3 произведут работу $\frac{1}{2}P_1y_1+\frac{1}{2}P_2y_2+\frac{1}{2}P_3y_3=A_1$; кроме этого, произведёт работу уже находившийся на балке груз dP_1; он пройдёт путь y_1, и так как при втором этапе нагружения он *оставался постоянным*, то его работа равна dP_1y_1. Балка займёт положение *II*, показанное на фиг. 329 пунктиром.

Таким образом, полная работа, проделанная внешними нагрузками при переходе балки из *недеформированного* состояния в положение *II*, будет равна (фиг. 329)

$$A_2=\frac{1}{2}dP_1dy_1+A_1+dP_1y_1.$$

Теперь вычислим

$$dU=dA_P=A_2-A_1=\frac{1}{2}dP_1dy_1+dP_1y_1.$$

Пренебрегая слагаемым второго порядка малости, получаем:

$$dA_P=dP_1y_1. \qquad (21.12)$$

Подставляя полученные значения dU (21.11) и dA_P (21.12) в уравнение (21.10), находим

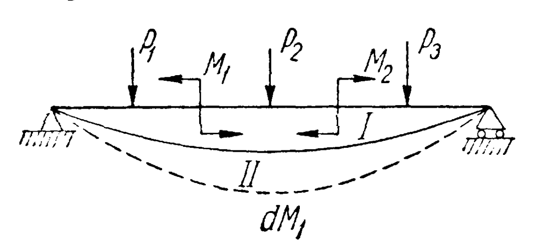
$$dP_1y_1=\frac{\partial U}{\partial P_1}dP_1,$$

или

$$y_1=\frac{\partial U}{\partial P_1}. \qquad (21.13)$$

Таким образом, в рассмотренном случае *прогиб точки приложения сосредоточенной силы P_1 равен частной производной потенциальной энергии деформации по этой силе.*

Полученный результат можно обобщить. Пусть на балку, помимо сосредоточенных сил P, действуют в разных сечениях ещё пары сил M (фиг. 330). Мы можем повторить предыдущие рассуждения, считая, что балка переводится из положения I в положение II путём добавки dM_1 к паре M_1. Весь ход рассуждений остаётся без изменений, надо будет лишь при вычислении работы моментов M_1, M_2, ... умножать их не на прогибы, а на углы поворота θ_1, θ_2, ... *тех сечений, где эти пары приложены.* Тогда dU будет равно $\frac{\partial U}{\partial M_1} dM_1$, dA_P станет $dM_1\theta_1$, и формула (21.13) примет вид:



Фиг. 330.

$$\theta_1 = \frac{\partial U}{\partial M_1}. \tag{21.14}$$

Так как y_1 — это перемещение, *соответствующее силе* P_1, а θ_1 — перемещение, *соответствующее* силе M_1, то полученные нами результаты можно формулировать так: ***производная потенциальной энергии деформации по одной из независимых внешних сил равна перемещению, соответствующему этой силе.*** Это и есть так называемая теорема Кастильяно, опубликованная в 1875 г.

Заметим, что присутствие на балке сплошной нагрузки не меняет предыдущих выводов, так как всякую сплошную нагрузку можно рассматривать как состоящую из большого числа сосредоточенных сил.

Предыдущий вывод был сделан для балки, но совершенно ясно, что его можно повторить для любой конструкции, деформации которой следуют закону Гука.

Для случая изгиба нами была получена формула, связывающая величину потенциальной энергии U с изгибающими моментами:

$$U = \int \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ}.$$

Изгибающий момент является линейной функцией нагрузок P_1, P_2, ..., M_1, M_2, ..., q, приложенных к балке:

$$M(x) = a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + b_1M_1 + \ldots + c_1q_1;$$

в этом легко убедиться, просмотрев формулы для вычисления изгибающих моментов при построении эпюр (§§ 72, 73); следовательно, потенциальная энергия является функцией второй степени от независимых внешних нагрузок.

Вычислим частную производную от U по одной из внешних сил, например P_1. Получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1}\left[\int\limits_l \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ}\right].$$

Здесь мы имеем дело с так называемым дифференцированием определённого интеграла по параметру, так как $M(x)$ — функция и P_1 и x; интегрирование производится по x, а дифференцирование — по параметру P_1. Как известно, если пределы интеграла постоянны, то следует просто дифференцировать подинтегральную функцию.

Таким образом, прогиб в точке приложения сосредоточенной силы P_1 равен:

$$y_1 = \frac{\partial U}{\partial P_1} = \int\limits_l \frac{M(x)\,dx}{EJ}\frac{\partial M(x)}{\partial P_1}, \qquad (21.15)$$

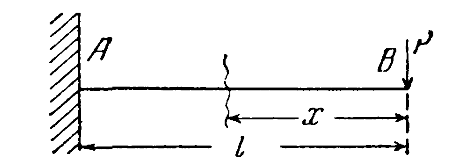
а угол поворота сечения с парой M_1

$$\theta_1 = \frac{\partial U}{\partial M_1} = \int\limits_l \frac{M(x)\,dx}{EJ}\frac{\partial M(x)}{\partial M_1}. \qquad (21.16)$$

Напомним, что знак предела l условно показывает, что интеграл должен быть распространён на всю длину балки.

§ 127. Примеры приложения теоремы Кастильяно.

Определим (фиг. 331) прогиб свободного конца B балки, защемлённой другим концом A. Балка нагружена сосредоточенной силой, приложенной в точке B. В данном случае возможно *непосредственное* применение теоремы Кастильяно, так как отыскивается прогиб сечения, где приложена сосредоточенная сила P



Фиг. 331.

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial P}\int \frac{M(x)\,dx}{EJ}\frac{\partial M(x)}{\partial P}.$$

Начало отсчёта абсциссы x сечения можно выбирать произвольно, лишь бы формула для $M(x)$ была возможно проще. Отсчитывая x от точки B, получаем для момента в *любом сечении балки*

$$M(x) = -Px \quad \text{и} \quad \frac{\partial M(x)}{\partial P} = -x.$$

Подставляя эти значения в формулу для y_B и интегрируя, чтобы охватить всю длину балки от 0 до l, получаем:

$$y_B = \int\limits_0^l \frac{(-Px)\,dx}{EJ}(-x) = \frac{P}{EJ}\int\limits_0^l x^2\,dx = +\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Получилась уже известная нам формула с той лишь разницей, что y_B оказался положительным. Мы определили перемещение, *соответствующее* той силе, по которой производилось дифференцирование. Соответствие заключается в том, что произведение из силы на соответствующее перемещение даёт нам работу. Если перемещение имеет знак *плюс*, то работа будет тоже положительна, а это значит, что *направления перемещения и силы совпадают*. Если же прогиб или поворот сечения получаются со знаком минус, то их направление *противоположно* направлению соответствующей силы. Таким образом, в этой задаче прогиб точки B направлен вниз.

Рассмотрим пример, где для вычисления $M(x)$ необходимо определение реакций.

Найдем угол поворота опорного сечения B балки на двух опорах пролётом l (фиг. 332), нагружённой парой сил M в этом опорном сечении и равномерно распределённой нагрузкой q.

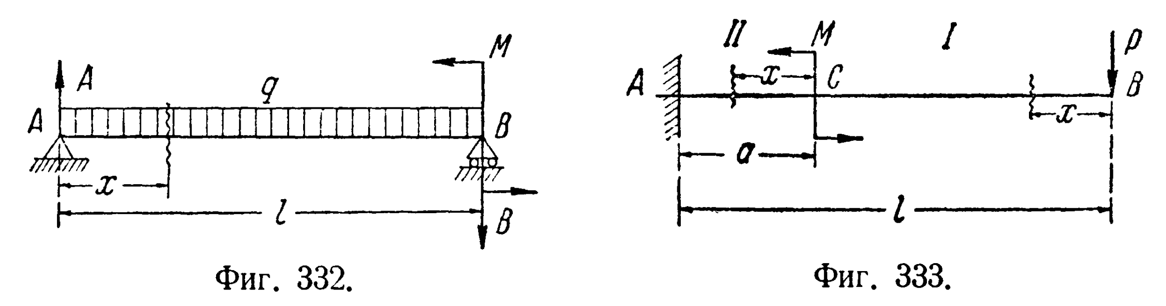
Искомый угол поворота равен:

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M} = \int \frac{M(x)\,dx}{EJ} \frac{\partial M(x)}{\partial M}.$$

Изгибающий момент (фиг. 332) определяется уравнением

$$M(x) = +Ax - \frac{qx^2}{2}.$$

При нахождении производной от $M(x)$ по M надо в формуле для $M(x)$ оставить лишь *независимые* внешние силы, которые и учитываются теоремой



Фиг. 332. Фиг. 333.

Кастильяно. Поэтому реакция A *обязательно* должна быть выражена через M и q, в противном случае легко впасть в ошибку и при дифференцировании упустить из вида, что A — функция от M. Реакция равна:

$$A = \frac{ql}{2} + \frac{M}{l};$$

тогда

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} + \frac{Mx}{l}.$$

Производная будет

$$\frac{\partial M(x)}{\partial M} = +\frac{x}{l}.$$

Пределы интегрирования определяются тем, что формула изгибающего момента годится на протяжении всей балки. Искомый угол поворота равен:

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_0^l \frac{1}{EJ}\left[\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} + \frac{Mx}{l}\right]\frac{x}{l}\,dx = \frac{ql^3}{24EJ} + \frac{Ml}{3EJ}.$$

В тех случаях, когда изгибающий момент на разных участках балки выражается различными функциями от x, необходимо и интегрирование разбить по участкам. Перемещение будет выражаться суммой интегралов, число которых равно числу участков балки. При решении подобных задач существенным является вопрос о назначении пределов интегрирования.

Возьмём в качестве примера балку длиной l, защемлённую одним концом (фиг. 333) и нагружённую моментом M в точке C на расстоянии a от опоры и силой P на свободном конце B. Найдём угол поворота сечения C.

Точка приложения момента M делит балку на два участка: первый BC и второй AC. Поэтому угол поворота сечения C будет равен:

$$\theta_C = \frac{\partial U}{\partial M} = \int \frac{M_1\,dx}{EJ}\frac{\partial M_1}{\partial M} + \int \frac{M_2 dx}{EJ}\frac{\partial M_2}{\partial M}.$$

Здесь M_1 и M_2 — изгибающие моменты для сечений первого и второго участков. Пределы интегрирования можно будет установить лишь после того, как мы решим, от каких точек отсчитывать координату x каждого сечения для того или другого участков.

Для первого участка возьмём произвольное сечение на расстоянии x от конца B балки. Изгибающий момент в этом сечении равен:

$$M_1 = -Px \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_1}{\partial M} = 0;$$

пределы интегрирования для этого участка будут 0 и $l-a$.

При вычислении изгибающего момента в сечении второго участка можно продолжать отсчитывать x от точки B; тогда

$$M_2 = -Px + M \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_2}{\partial M} = +1;$$

пределы интегрирования будут $l-a$ и l. Но гораздо проще начать отсчитывать x для второго участка с тем расчётом, чтобы *нижний предел* интегрирования *был бы нуль*, — это упростит вычисления. Очевидно, за начало отсчётов тогда надо взять начало второго участка — точку C. В этом случае мы имеем:

$$M_2 = -P(x + l - a) + M \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_2}{\partial M} = +1.$$

Пределами интегрирования будут 0 и a.

Останавливаясь на втором варианте, получаем:

$$\theta_C = \int_0^{l-a} \frac{M_1 dx}{EJ} \frac{\partial M_1}{\partial M} + \int_0^{a} \frac{M_2 dx}{EJ} \frac{\partial M_2}{\partial M};$$

первый интеграл равен нулю, и

$$\theta_C = \frac{1}{EJ} \int_0^a [-P(x + l - a) + M]\, dx = -\frac{P(2l-a)a}{2EJ} + \frac{Ma}{EJ}.$$

Искомый угол поворота является суммой двух слагаемых — одного, вызванного силой P и направленного по часовой стрелке (против направления M), и второго, определяемого моментом M и направленного против часовой стрелки.

§ 128. Приём введения добавочной силы.

Возьмём балку пролётом l, защемлённую концом A и нагружённую силой P на свободном конце B. Найдём угол поворота сечения B.

Непосредственно применить теорему Кастильяно нельзя, так как в этом сечении нет обобщённой силы, соответствующей углу поворота, — нет пары сил. Для того чтобы решить задачу, приложим в точке B дополнительно пару сил (фиг. 334), направленную как угодно, хотя бы против часовой стрелки. При такой нагрузке мы можем найти угол поворота сечения B при помощи теоремы Кастильяно.

Фиг. 334.

Этот угол выразится формулой, состоящей из двух слагаемых — одного, зависящего от P, а другого — от $M_д$. Эта формула будет верна при любых *числовых* значениях P и $M_д$, в том числе и при $M_д = 0$; поэтому, полагая

в полученном выражении $M_д = 0$, получим значение угла поворота, вызванного *лишь* силой P. Проведём это вычисление:

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M_д} = \int \frac{M dx}{EJ} \frac{\partial M}{\partial M_д},$$

$$M = + M_д - Px \quad и \quad \frac{\partial M}{\partial M_д} = + 1;$$

пределы интегрирования 0 и l; тогда

$$\theta_B = \frac{1}{EJ} \int_0^l (M_д - Px)(+1) \, dx; \qquad (21.17)$$

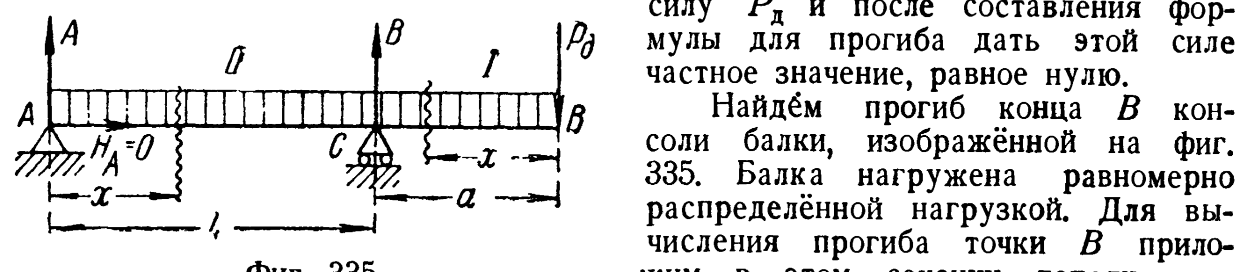
можно было бы произвести интегрирование, и в полученном результате положить $M_д$ равным нулю. Однако результат не изменится, если мы приравняем $M_д$ нулю уже в формуле (12.17). Дополнительная сила нужна нам только для вычисления частной производной от изгибающего момента по этой дополнительной силе; после этого её можно положить равной нулю.

Таким образом, угол поворота сечения B от силы P равен:

$$\theta = \frac{1}{EJ} \int_0^l (-Px) \, dx = -\frac{Pl^2}{2EJ}.$$

Знак минус показывает, что этот поворот происходит ***против*** направления ***пары*** $M_д$, т. е. по часовой стрелке.

При вычислении *прогиба* такого сечения балки, где нет сосредоточенной силы, следует подобным же образом приложить в этом сечении добавочную силу $P_д$ и после составления формулы для прогиба дать этой силе частное значение, равное нулю.



Фиг. 335.

Найдём прогиб конца B консоли балки, изображённой на фиг. 335. Балка нагружена равномерно распределённой нагрузкой. Для вычисления прогиба точки B приложим в этом сечении дополнительную силу $P_д$. Балка имеет два участка: первый BC и второй CA. Поэтому прогиб точки B представится суммой двух интегралов:

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial P_д} = \int \frac{M_1 dx}{EJ} \frac{\partial M_1}{\partial P_д} + \int \frac{M_2 dx}{EJ} \frac{\partial M_2}{\partial P_д}.$$

Реакции балки равны:

$$A = -P_д \frac{a}{l} + \frac{q(l+a)(l-a)}{2l} = -P_д \frac{a}{l} + \frac{q(l^2 - a^2)}{2l};$$

$$B = P_д \frac{a+l}{l} + \frac{q(l+a)^2}{2l}.$$

При определении реакций никогда не следует забывать о добавочной силе. Мы решаем усложнённую задачу, где добавочная сила должна учитываться так же, как и все активные силы.

Отсчёт координаты x для обоих участков показан на фиг. 335.

Для первого участка имеем:

$$M_1 = -P_д x - \frac{qx^2}{2}; \quad \frac{\partial M_1}{\partial P_д} = -x;$$

пределы интегрирования: $x = 0$ и $x = a$. Для второго участка

$$M_2 = +Ax - \frac{qx^2}{2} = -P_д \frac{a}{l} x + \frac{q(l^2 - a^2)}{2l} x - \frac{qx^2}{2}; \quad \frac{\partial M_2}{\partial P_д} = -\frac{a}{l} x;$$

пределы интегрирования: $x = 0$ и $x = l$. Тогда

$$y_B = \frac{1}{EJ} \int_0^a \left(-P_д x - \frac{qx^2}{2}\right)(-x)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \int_0^1 \left[-P_д \frac{a}{l} x + \frac{q(l^2 - a^2)}{2l} x - \frac{qx^2}{2}\right]\left(-\frac{a}{l} x\right) ax.$$

Полагая $P_д = 0$, получаем:

$$y_B = \frac{1}{EJ} \int_0^a \frac{qx^3}{2}\,dx - \frac{1}{EJ} \int_0^l \left[\frac{q(l^2 - a^2)a}{2l^2} x^2 - \frac{qx^3 a}{2l}\right] dx =$$

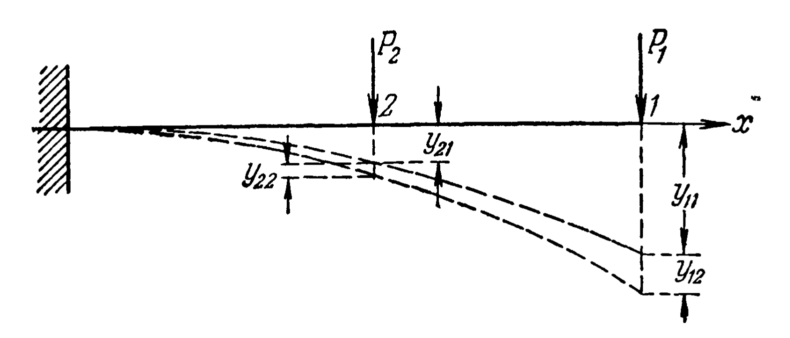
$$= + \frac{qa^4}{8EJ} - \frac{qal}{24EJ}(l^2 - 4a^2).$$

Первое из слагаемых отражает влияние деформаций консоли, второе же — междуопорной части.

§ 129. Теорема о взаимности работ.

Пользуясь понятием о потенциальной энергии, можно установить следующую зависимость между деформациями в различных сечениях балки.

Если к балке, нагружённой силой P_1, приложить затем ста-



Фиг. 336.

тически силу P_2 в сечении *2*, то к прогибу точки приложения силы P_1 от этой же силы y_{11} прибавится (фиг. 336) прогиб от силы P_2, равный y_{12}; первый значок у буквы y указывает точку, для которой вычисляется прогиб; второй — обозначает силу, вызывающую этот прогиб.

Полная работа внешних сил составится из трёх частей: работы силы P_1 на вызванном ею прогибе y_{11}, т. е. $\frac{1}{2}P_1y_{11}$; работы силы P_2 на вызванном ею прогибе её точки приложения y_{22}, т. е. $\frac{1}{2}P_2y_{22}$; наконец, работы силы P_1 на прогибе её точки приложения от силы P_2, т. е. P_1y_{12}.

Таким образом, накопленная в стержне при действии обеих сил энергия будет равна:

$$U=\frac{1}{2}P_1y_{11}+\frac{1}{2}P_2y_{22}+P_1y_{12}. \tag{21.18}$$

Это количество энергии деформации зависит лишь от конечных значений сил и прогибов и не зависит от *порядка* нагружения.

Если к балке, загружённой силой P_2, приложить затем силу P_1, то, повторив цепь вычислений, получим:

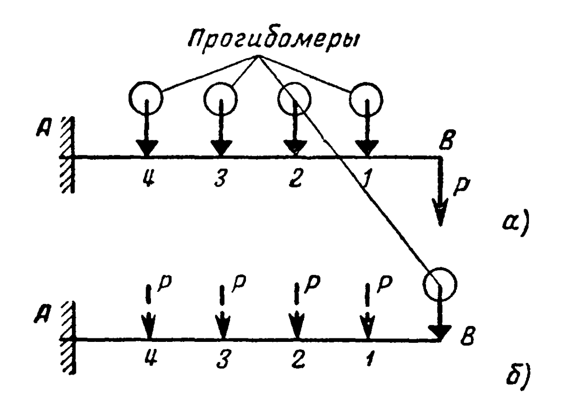
$$U=\frac{1}{2}P_2y_{22}+\frac{1}{2}P_1y_{11}+P_2y_{21}. \tag{21.18'}$$

Сравнивая оба значения U, получаем:

$$P_1y_{12}=P_2y_{21}, \tag{21.19}$$

т. е. *работа силы P_1* (или *первой группы сил*) *на перемещениях, вызванных силой P_2 (второй группой сил), равна работе сил P_2 на перемещениях, вызванных силой P_1.*

Это и есть теорема о взаимности работ. Её можно сформулировать и иначе: работа первой силы (P_1) при действии второй (P_2) равна работе второй силы при действии первой.



Фиг. 337.

Если взять частный случай, когда $P_1=P_2$, то получим *теорему о взаимности перемещений*: $y_{12}=y_{21}$, т. е. прогиб точки *1*, вызванный силой, приложенной в точке *2*, равен прогибу точки *2*, вызванному такой же силой, но приложенной в точке *1*.

Пользуясь этим свойством взаимности, можно, например, упростить производство опытов по определению деформаций. Пусть мы хотим опытным путём найти прогибы в сечениях *1*, *2*, *3*, *4* балки, защемлённой одним концом A и нагружённой на другом (B) силой P (фиг. 337). Вместо того чтобы ставить для каждой точки свой прогибомер (фиг. 337, *а*) или переносить прибор, что всегда очень неудобно и может повлечь ошибки, можно поступить иначе. Поставим прогибомер в точке B, а силу P будем последовательно прикладывать в сечениях *1, 2, 3, 4* (фиг. 337, *б*); измеренные в точке B прогибы и будут по теореме о взаимности перемещений равны прогибам точек *1, 2, 3, 4* от силы P, приложенной в точке B.

§ 130. Теорема Максвелла — Мора.

Прогиб балки в точке приложения сосредоточенной силы P равен:

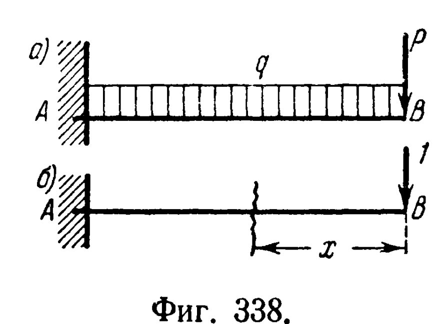
$$y=\int_0^l \frac{M(x)\,dx}{EJ}\frac{\partial M(x)}{\partial P}; \qquad (21.15)$$

аналогичное выражение мы имеем и для угла поворота с заменой производной $\frac{\partial M(x)}{\partial P}$ на $\frac{\partial M(x)}{\partial M_0}$. Выясним, что представляют собой эти производные.

Если на балке расположена какая угодно нагрузка из сосредоточенных сил P_1, P_2, P_3, ..., моментов M_1, M_2, ..., сплошных нагрузок q_1, q_2, ..., то момент $M(x)$ в любом сечении такой балки выражается *линейной* функцией от нагрузок:

$$M(x)=a_1P_1+a_2P_2+\ldots+b_1M_1+b_2M_2+\ldots+c_1q_1+\ldots \qquad (21.20)$$

Коэффициенты a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., c_1, c_2, ... являются функциями пролёта балки, расстояний точек приложения сил и моментов от опор и абсциссы x взятого сечения. Пусть мы отыскиваем прогиб точки приложения силы P_1; тогда $\frac{\partial M(x)}{\partial P_1}=a_1$, так как P_2, P_3, ..., M_1, M_2, ..., q_1, q_2, ..., a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., c_1, c_2, ... при этом дифференцировании постоянны. Но a_1 можно рассматривать как численную величину момента M в любом сечении балки от действия так называемой единичной нагрузки, т. е. силы $P_1=1$; действительно, подставляя в формулу (21.20) вместо P_1 его частное значение, единицу, и приравнивая все остальные нагрузки нулю, получаем $M=a_1$.



Фиг. 338.

Например, для балки, изображённой на фиг. 338, *а*, изгибающий момент равен:

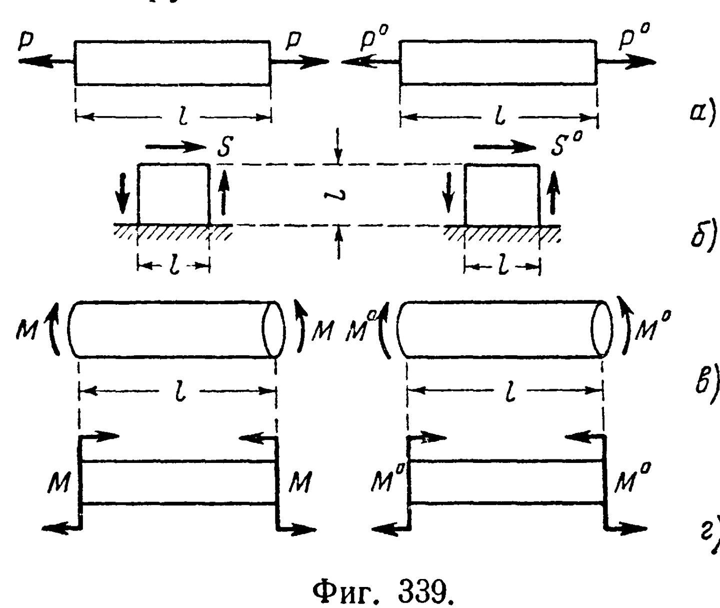
$$M(x)=-Px-\frac{qx^2}{2}.$$

Производная $\frac{\partial M(x)}{\partial P}=-x$; но это как раз и будет выражение изгибающего момента нашей балки, если мы её нагрузим силой *1*, приложенной в той же точке B, где расположена сила P (фиг. 338, *б*), и направленной в ту же сторону.

Аналогично, производная изгибающего момента $M(x)$ по паре сил M_1 численно представляет собой изгибающий момент от пары с моментом, равным единице, приложенной в том же сечении, где имеется пара M_1, и направленной в ту же сторону. Таким образом, *вычисление производных изгибающего момента можно заменить*

вычислением изгибающих моментов от единичной нагрузки. Эти моменты мы будем обозначать буквой M^0.

Таким образом, для отыскания перемещения δ (прогиба или угла поворота) любого сечения балки, вне зависимости от того, приложена или не приложена в этом сечении соответствующая сила, необходимо найти выражение для изгибающего момента M от заданной нагрузки и момента M^0 от соответствующей единичной нагрузки, приложенной в сечении, где ищем перемещение δ; тогда это перемещение выразится формулой



Фиг. 339.

$$\delta = \int_0^l \frac{MM^0}{EJ} dx. \quad (21.21)$$

Эта формула была предложена Максвеллом в 1864 г. и введена в практику расчёта О. Мором в 1874 г. Если мы в формуле (21.21) под δ подразумеваем прогиб, то момент M^0 надо вычислять от сосредоточенной единичной силы, приложенной в той точке, где мы отыскиваем прогиб; при вычислении же угла поворота в качестве единичной нагрузки прикладывается пара сил с моментом, равным единице.

Для примера фиг. 338 имеем:

$$M = -P \cdot x - \frac{qx^2}{2} \text{ (фиг. 338, } a\text{)},$$

$$M^0 = -1 \cdot x = -x \text{ (фиг. 338, } б\text{)},$$

$$f_P = \frac{1}{EJ}\int_0^l \left(-Px - q\frac{x^2}{2}\right) \cdot (-x)\, dx = \frac{ql^4}{8EJ} + \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Знак плюс означает, что направление перемещения совпадает с направлением единичной нагрузки, знак минус — наоборот.

Если при определении изгибающих моментов придётся делить балку на участки, то соответственно и интеграл в формуле распадётся на сумму интегралов.

Сравнивая формулу Кастильяно (21.15) и (21.16) с формулой Мора (21.21), нетрудно заметить, что они отличаются лишь одним множителем. В теореме Кастильяно $\frac{\partial M}{\partial P}$ или $\frac{\partial M}{\partial M_0}$, в теореме Мора M^0. Следовательно, производная от изгибающего момента по обобщённой силе — это то же самое, что изгибающий момент от силы $P^0 = 1$.

Формулы (2.5), (10.23), (11.19) и (13.11) с точки зрения применения теоремы Мора можно переписать так:

$$\Delta l = P\frac{1 \cdot l}{EF}, \text{ где } 1 = P^0 \text{ (растяжение — фиг. 339, } a),$$

$$\Delta s = S\frac{1 \cdot l}{GF}, \text{ где } 1 = S^0 \text{ (сдвиг — фиг. 339, } б),$$

$$\varphi = M_k\frac{1 \cdot l}{GJ_n}, \text{ где } 1 = M_k^0 \text{ (кручение — фиг. 339, } в),$$

$$\theta = M\frac{1 \cdot l}{EJ}, \text{ где } 1 = M^0 \text{ (чистый изгиб — фиг. 339, } г).$$

Для простейших *стержневых систем* формула Мора приобретает вид

$$\delta = \sum\frac{SS^0 l}{EF}, \qquad (21.21'')$$

где S — усилие в стержнях от заданной нагрузки, а S^0 — усилия в стержнях от силы $P^0 = 1$, приложенной в точке, где определяется перемещение.

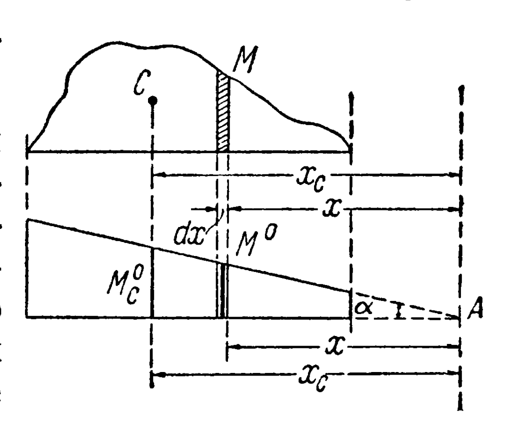
Если стержень испытывает *переменное* по его длине усилие $N(x)$, то его удлинение по Мору может быть вычислено по следующей формуле:

$$\Delta l = \int\limits_l \frac{N(x)\,N^0 dx}{EF}. \qquad (21.21''')$$

§ 131. Способ Верещагина.

Способ Максвелла — Мора в настоящее время в значительной степени вытеснил на практике непосредственное применение теоремы Кастильяно. В справочниках обычно приводятся таблицы интегралов $\int MM^0 dx$ для наиболее часто встречающихся типов нагрузки.

Наш соотечественник А. К. Верещагин в 1924 г. предложил упрощение вычислений по формуле (21.21). Так как единичной нагрузкой бывает обычно либо сосредоточенная сила, либо пара сил, то эпюра M^0 оказывается ограниченной прямыми линиями. Тогда вычисление $\int MM^0 dx$ при *любом* очертании эпюры M можно произвести следующим образом.



Фиг. 340.

Пусть эпюра M (фиг. 340) имеет криволинейное очертание, а эпюра M^0 — прямолинейное. Произведение $M\,dx$ можно рассматривать, как элемент $d\omega$ площади эпюры M, заштрихованный на чертеже.

Так как ордината M^0 равна $M^0 = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, то произведение $M\,dx\,M^0 = d\omega\,x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, а весь интеграл $\int MM^0\,dx = \mathrm{tg}\,\alpha \int d\omega\,x$ пред-

ставляет собой статический момент площади эпюры M относительно точки A, умноженный на $\operatorname{tg}\alpha$. Но этот статический момент равен всей площади ω эпюры M, умноженной на расстояние от её центра тяжести x_C до точки A. Таким образом,

$$\int MM^0\,dx = \omega x_C \operatorname{tg}\alpha;$$

но величина $x_C \operatorname{tg}\alpha$ равна ординате M_C^0 эпюры M^0 под центром тяжести эпюры M. Отсюда

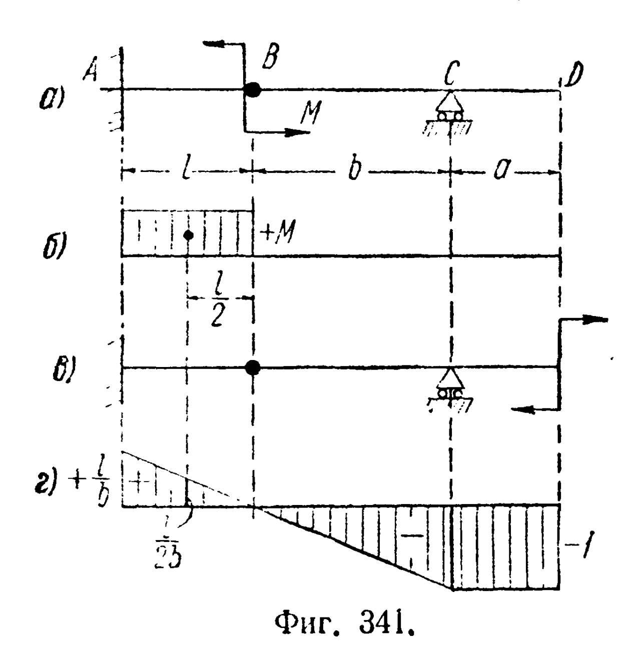
$$\int MM^0\,dx = \omega M_C^0,$$

и искомое перемещение равно

$$\delta = \frac{\omega M_C^0}{EJ}. \tag{21.22}$$

Таким образом, для определения перемещения δ надо вычислить ω — площадь эпюры M, умножить её на ординату M_C^0 эпюры от единичной нагрузки под центром тяжести площади ω и разделить на жёсткость балки.

Определим этим способом угол поворота сечения D балки, изображённой на фиг. 341, *а*; балка загружена моментом M, приложенным в сечении B к консоли AB. Эпюра M показана на фиг. 341, *б*. Прикладываем в сечении D единичную пару, выбирая её направление произвольно (фиг. 341, *в*). Эпюра моментов от единичной нагрузки показана на фиг. 341, *г*. Так как M на участках DC и CB равен нулю, то остаётся лишь один интеграл для участка AB.



Фиг. 341.

Площадь ω равна $+Ml$; ордината эпюры M^0 под центром тяжести площади ω равна $+\frac{l}{2b}$; отсюда искомый угол поворота θ_D равен

$$\theta_D = \frac{1}{EJ}(+Ml)\left(+\frac{l}{2b}\right) = +\frac{Ml^2}{2bEJ}.$$

Знак плюс показывает, что вращение происходит по направлению единичной пары, т. е. по часовой стрелке.

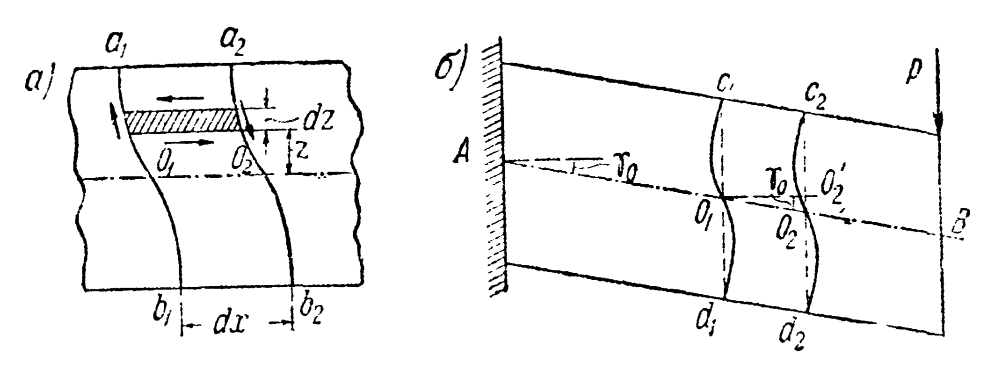
Формула (21.22) может быть распространена и на тот случай, когда необходимо учесть влияние осевых сил $N(x)$, поперечных сил $Q(x)$ или крутящих моментов M_k.

Вместо жёсткости балки EJ, в формулу (21.22) будут подставляться: EF — при растяжении или сжатии, GF — при чистом сдвиге и $GJ_{кр}$ — при кручении.

§ 132. Прогибы балок от действия поперечной силы.

При вычислении деформаций балок мы до сих пор учитывали лишь влияние изгибающих моментов. Но поперечные силы в свою очередь тоже вызывают прогибы. Задача учёта поперечной силы при определении деформаций балок была решена русским профессором И. Г. Бубновым.

Рассмотрим балку, закреплённую одним концом и нагружённую на другом силой P. Под действием касательных напряжений два смежных сечения a_1b_1 и a_2b_2 (фиг. 342, *а*), расположенные на расстоянии dx друг от друга,



Фиг. 342.

искривятся; наибольший перекос будет у нейтральной оси; элементы же, расположенные у верха и низа балки, не будут перекашиваться. Первоначальные плоскости сечений займут какие-то средние положения (пунктир $c_1O_1d_1$ и $c_2O_2d_2$), повернувшись относительно прежних на некоторый малый угол γ_0 (фиг. 342, *б*). Так как в данном случае касательные напряжения во всех сечениях одинаковы, то все эти сечения повернутся на один и тот же угол γ_0 и балка под действием *только касательных* напряжений займёт положение, показанное на фиг. 342, *б*; конец B опустится по отношению к опоре A. Деформация, производимая изгибающим моментом и заключающаяся во взаимном повороте смежных поперечных сечений, на фиг. 342 не показана.

Прогиб второго сечения по отношению к смежному первому будет по абсолютной величине равен отрезку O_2O_2', т. е.

$$|dy_Q| = O_2O_2'. \qquad (21.23)$$

В более общем случае, когда поперечная сила $Q(x)$ не одинакова в различных сечениях балки, углы поворота γ_0 будут переменными; однако общая картина деформации сохранится, лишь dy_Q будут разными для различных элементов dx балки.

Абсолютную величину прогиба второго сечения по отношению к первому $|dy_Q|$ мы определим из условия, что при деформации балки от сдвига потенциальная энергия, накопленная в элементе длиной dx, равна работе внешних сил, приложенных к этому элементу: $dU_Q = dA_P$.

Для рассматриваемой деформации балки такими внешними силами будут касательные усилия, равные поперечной силе $Q(x)$; при постепенном возрастании нагрузки и деформаций балки работа этих сил на относительном перемещении $|dy_Q|$ равна

$$dA_P = \frac{1}{2} Q(x) |dy_Q|. \qquad (21.24)$$

Так как касательные напряжения распределены неравномерно по сечению, то для вычисления потенциальной энергии, накопленной в балке при действии этих напряжений, применим дифференциальный путь.

Вырежем из балки прямоугольного сечения (или составленного из прямоугольников) на расстоянии x от начала координат и на расстоянии z от нейтральной оси (фиг. 342, *а*) малый элемент размерами dx, dz, $b(z)$. По боковым граням элемента будут действовать, кроме нормальных, касательные напряжения

$$\tau = \frac{Q(x)\,S(z)}{Jb(z)}.$$

Потенциальная энергия сдвига для этого элемента выразится формулой (таблица 22)

$$\frac{[b(z)\,dz\,\tau]^2\,dx}{2b(z)\,dz\,G} = \frac{1}{2G}\,\tau^2 b(z)\,dx\,dz.$$

Энергия в элементе балки длиной dx и высотой h будет равна

$$dU_Q = \int \frac{1}{2G}\,\tau^2 b(z)\,dz\,dx = \frac{1}{2G}\,\frac{Q^2(x)\,dx}{J^2} \int \frac{S^2(z)\,dz}{b(z)}.$$

Интегрирование производится по z, и пределы интеграла надо взять такими, чтобы охватить всё сечение.

Выражение это можно представить в несколько ином виде, умножая и деля его на площадь сечения балки F:

$$dU_Q = \frac{Q^2(x)\,dx}{2GF}\,\frac{F}{J^2} \int \frac{S^2(z)\,dz}{b(z)} = \frac{kQ^2(x)\,dx}{2GF}, \qquad (21.24')$$

где через k обозначено отвлечённое число, зависящее только от формы и размеров сечения балки, равное

$$k = \frac{F}{J^2} \int \frac{S^2(z)\,dz}{b(z)}. \qquad (21.25)$$

Приравнивая значения dU_Q и dA_P, получаем:

$$\frac{kQ^2(x)\,dx}{2GF} = \frac{1}{2}\,Q(x)\,|dy_Q|.$$

Отсюда

$$|dy_Q| = k\,\frac{Q(x)\,dx}{GF}.$$

Знак прогиба dy_Q определится тем, что (фиг. 342, *б*) при переходе от левого сечения к правому ($dx > 0$) и при положительной поперечной силе $Q(x)$ относительный прогиб dy_Q отрицателен, если направлять ось y вверх. Значит,

$$dy_Q = -\frac{kQ(x)}{GF}\,dx. \qquad (21.26)$$

Полный прогиб любого сечения с абсциссой x получаем, интегрируя (21.26)

$$y_Q = -\int \frac{kQ(x)}{GF}\,dx + C_Q. \qquad (21.26')$$

Постоянная интегрирования C_Q зависит от устройства опор балки. Так как $Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}$, то

$$y_Q = -\frac{kM(x)}{GF} + C_Q, \qquad (21.27)$$

т. е. прогибы балки от действия поперечной силы пропорциональны ординатам эпюры изгибающих моментов с обратным знаком; ординаты отсчитываются от определённой оси абсцисс.

Величина k может быть определена для каждого вида поперечного сечения балки. Для прямоугольника

$$S(z)=\frac{bh^2}{8}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right); \quad J=\frac{bh^3}{12}; \quad b(z)=b; \; F=bh.$$

Тогда

$$k=\frac{F}{J^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\frac{S^2(z)\,dz}{b(z)}=\frac{9}{2h}\int_0^{\frac{h}{2}}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)^2dz=\frac{6}{5}.$$

Применим полученные результаты к определению прогибов балки длиной l, защемлённой левым концом в точке A и нагружённой на свободном конце B сосредоточенной силой P.

Располагая начало координат в точке A, получаем:

$$M(x)=-P(l-x) \quad \text{и} \quad y_Q=+\frac{kP(l-x)}{GF}+C_Q=\frac{6P(l-x)}{5GF}+C_Q.$$

При $x=0$ прогиб $y_Q=0$; следовательно, $C_Q=-\frac{6Pl}{5GF}$.

Прогиб y_Q равен

$$y_Q=-\frac{6Px}{5GF}.$$

Наибольший прогиб будет на конце балки в точке B (при $x=l$)

$$f_Q=-\frac{6Pl}{5GF}.$$

Полный прогиб точки B

$$f=-\frac{Pl^3}{3EJ}-\frac{6}{5}\frac{Pl}{GF}=-\frac{Pl^3}{3EJ}\left[1+\frac{18EJ}{5l^2GF}\right].$$

Так как для прямоугольника $\frac{J}{F}=\frac{h^2}{12}$, то

$$f=-\frac{Pl^3}{3EJ}\left[1+\frac{3h^2}{10l^2}\frac{E}{G}\right].$$

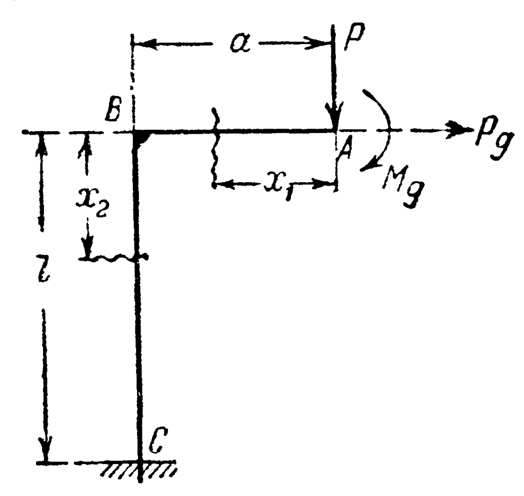
Принимая отношение $\frac{E}{G}$ равным для металлов $\frac{5}{2}$, а для дерева 20, получаем:

$$f=-\frac{Pl^3}{3EJ}\left[1+\frac{3}{4}\frac{h^2}{l^2}\right] \quad \text{(металлы)},$$

$$f=-\frac{Pl^3}{3EJ}\left[1+6\frac{h^2}{l^2}\right] \quad \text{(дерево)}.$$

Таким образом, дополнительный прогиб, вызванный поперечной силой, зависит от $\left(\frac{h}{l}\right)^2$; поэтому для сравнительно коротких балок, особенно деревянных, он может достигнуть большой величины. Так, при $\frac{h}{l}=\frac{1}{4}$ для дерева $\left[1+6\frac{h^2}{l^2}\right]=1{,}375$, т. е. прогиб от поперечной силы составляет 37,5% от прогиба, вызванного изгибающими моментами.

Надо отметить, что в ряде курсов величина коэффициента k считается равной 1,5, а не 1,2 (для прямоугольного сечения). Это получается, если предположить, что прогибы балки от поперечной силы определяются величиной относительного сдвига у нейтрального слоя, что неверно.



Фиг. 343.

§ 133. Примеры.

Пример 90. Найти вертикальное f и горизонтальное Δ перемещения, а также поворот θ сечения A стержня ABC (фиг. 343). Момент инерции J во всех сечениях одинаков.

Для определения f надо дифференцировать потенциальную энергию по силе P; для вычисления Δ и θ надо это дифференцирование производить соответственно по горизонтальной добавочной силе и добавочному моменту $M_д$. При вычислении изгибающих моментов стержень надо разделить на два участка; отсчёт абсцисс показан на чертеже.

Величины f, Δ и θ определяются формулами:

$$f=\frac{\partial U}{\partial P}=\int_0^a \frac{M_1\,dx}{EJ}\frac{\partial M_1}{\partial P}+\int_0^l \frac{M_2\,dx}{EJ}\frac{\partial M_2}{\partial P};$$

$$\Delta=\frac{\partial U}{\partial P_д}=\int_0^a \frac{M_1\,dx}{EJ}\frac{\partial M_1}{\partial P_д}+\int_0^l \frac{M_2\,dx}{EJ}\frac{\partial M_2}{\partial P_д};$$

$$\theta=\frac{\partial U}{\partial M_д}=\int_0^a \frac{M_1\,dx}{EJ}\frac{\partial M_1}{\partial M_д}+\int_0^l \frac{M_2\,dx}{EJ}\frac{\partial M_2}{\partial M_д}.$$

Вычисляем изгибающие моменты и их производные:

$$M_1=-Px_1-M_д;\quad M_2=-Pa-M_д-P_д x_2.$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P}=-x_1,\qquad \frac{\partial M_2}{\partial P}=-a;$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P_д}=0,\qquad \frac{\partial M_2}{\partial P_д}=-x_2;$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial M_д}=-1,\qquad \frac{\partial M_2}{\partial M_д}=-1.$$

Полагаем теперь в формулах для M_1 и M_2, что $P_д=0$ и $M_д=0$ и производим интегрирование:

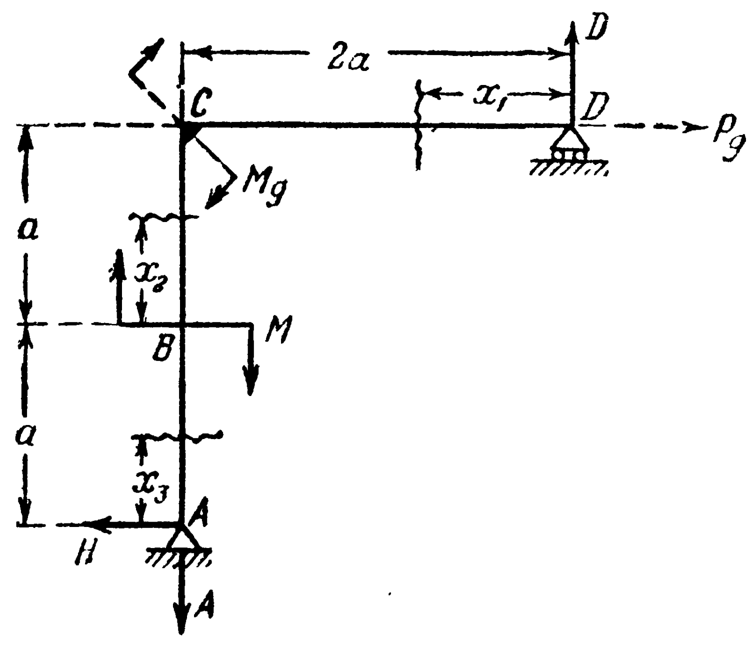
$$f=\frac{1}{EJ}\left[\int_0^a Px_1^2\,dx+\int_0^l Pa^2\,dx\right]=\frac{1}{EJ}\left[\frac{Pa^3}{3}+Pa^2l\right]=\frac{Pa^2}{3EJ}(a+3l),$$

$$\Delta=\frac{1}{EJ}\left[\int_0^l Pax_2dx\right]=\frac{Pal^2}{2EJ},$$

$$\theta=\frac{1}{EJ}\left[\int_0^a Px_1\,dx+\int_0^l Pa\,dx\right]=\frac{1}{EJ}\left[\frac{Pa^2}{2}+Pal\right]=\frac{Pa}{2EJ}[a+2l].$$

Знак плюс показывает, что все перемещения направлены соответственно по силам P, $P_д$ и $M_д$.

Пример 91. Найти угол поворота θ сечения C и горизонтальное перемещение Δ точки D конструкции, изображённой на фиг. 344.



Фиг. 344.

Для определения θ и Δ необходимо приложить в точке D горизонтальную добавочную силу $P_д$, а в сечении C добавочный момент $M_д$.

Определим реакции из условий статики:

$$\Sigma X=0;\quad P_д-H=0;\quad H=P_д;\quad \Sigma Y=0;\quad -A+D=0;\quad D=A;$$

$$\Sigma M_A=0;\ M+M_д-D\cdot 2a+P_д\cdot 2a=0;\quad D=\frac{M+M_д+P_д\cdot 2a}{2a}.$$

Изгибающие моменты и их производные:

$$M_1=+Dx_1=\frac{M}{2a}x_1+\frac{M_д}{2a}x_1+P_дx_1;\qquad \frac{\partial M_1}{\partial P_д}=+x_1;\qquad \frac{\partial M_1}{\partial M_д}=\frac{x_1}{2a};$$

$$M_2=+H(a+x_2)+M=P_д(a+x_2)+M;\qquad \frac{\partial M_2}{\partial P_д}=a+x_2;\qquad \frac{\partial M_2}{\partial M_д}=0;$$

$$M_3=+Hx_3=P_дx_3;\qquad \frac{\partial M_3}{\partial P_д}=+x_3;\qquad \frac{\partial M_3}{\partial M_д}=0.$$

Горизонтальное перемещение точки D равно

$$\Delta = \frac{1}{EJ}\left[\int_0^{2a} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P_д} dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P_д} dx + \int_0^a M_3 \frac{\partial M_3}{\partial P_д} dx\right]_{\substack{P_д=0\\ M_д=0}} =$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[\int_0^{2a} \frac{M}{2a} x_1^2 dx + \int_0^a M(a + x_2)\, dx\right] =$$

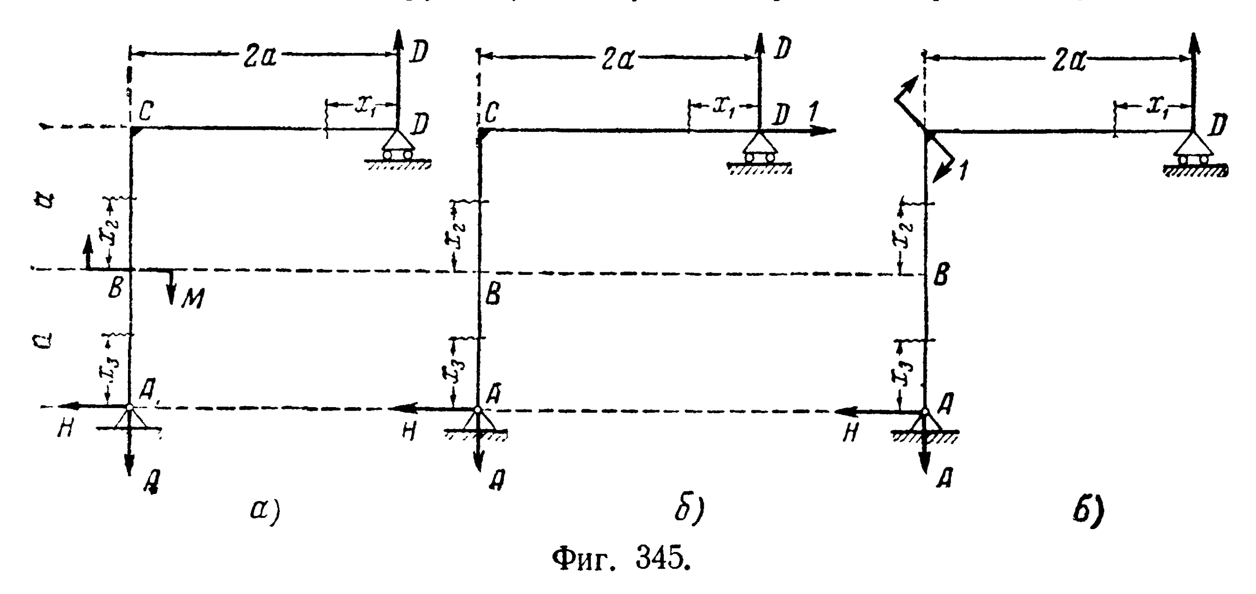
$$= \frac{1}{EJ}\left[\frac{M}{2a}\frac{(2a)^3}{3} + Ma^2 + \frac{Ma^2}{2}\right] = \frac{17}{6}\frac{Ma^2}{EJ}.$$

Угол поворота сечения C равен

$$\theta = \frac{1}{EJ}\left[\int_0^{2a} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial M_д} dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial M_д} dx + \int_0^a M_3 \frac{\partial M_3}{\partial M_д} dx\right]_{\substack{P_д=0\\ M_д=0}} =$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[\int_0^{2a} \frac{M}{2a} x_1 \frac{x_1}{2a} dx\right] = \frac{M}{3EJ}\frac{(2a)^3}{4a^2} = \frac{2Ma}{3EJ}.$$

Найдём угол поворота θ сечения C и горизонтальное перемещение Δ точки D той же конструкции, пользуясь теоремой Мора. Изобразим три



Фиг. 345.

состояния загружения: *а*, *б* и *в* (фиг. 345). Определим реакции и изгибающие моменты для всех трёх состояний, показанных на фиг. 345:

а) От заданной нагрузки:

$$H = 0;\ D = \frac{M}{2a} = A;\quad M_1 = +\frac{M}{2a}x_1;\quad M_2 = +M;\quad M_3 = 0.$$

б) От единичной силы:

$$H = 1;\quad D = 1 = A;\quad M_1^0 = +x_1;\quad M_2^0 = a + x_2;\quad M_3^0 = +x_3.$$

в) От единичного момента:

$$H = 0;\ D = \frac{1}{2a} = A;\ M_1^0 = +\frac{x_1}{2a};\ M_2^0 = 0;\ M_3^0 = 0.$$

Вычислим деформации:

а) и б)

$$\Delta=\frac{1}{EJ}\left[\int_0^{2a} M_1M_1^0\,dx+\int_0^{a} M_2M_2^0\,dx+\int_0^{a} M_3M_3^0\,dx\right]=$$

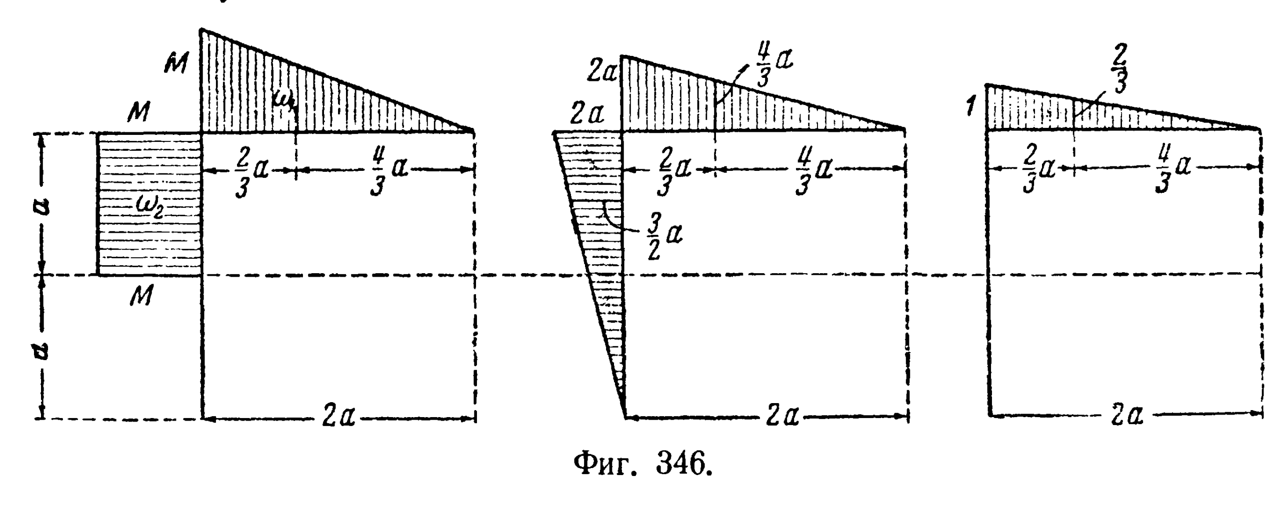
$$=\frac{1}{EJ}\left[\int_0^{2a}\frac{M}{2a}\,x_1^2\,dx+\int_0^{a} M(a+x_2)\,dx\right].$$

а) и в)

$$\theta=\frac{1}{EJ}\left[\int_0^{2a} M_1M_1^0dx+\int_0^{a} M_2M_2^0\,dx+\int_0^{a} M_3M_3^0dx\right]=$$

$$=\frac{1}{EJ}\int_0^{2a}\frac{M}{2a}x_1\cdot\frac{x_1}{2a}\,dx.$$

Мы получили те же выражения, что и при помощи теоремы Кастильяно.



Фиг. 346.

При решении этой же задачи способом Верещагина нужно для схем загружения *а, б* и *в* фиг. 345 построить эпюры изгибающего момента, что сделано на фиг. 346, и по ним определить:

$$\omega_1=Ma;\qquad \omega_2=Ma;\quad \omega_3=0\quad (\text{фиг. 346, } a);$$

$$M_{C1}^0=\frac{4}{3}a;\quad M_{C2}^0=\frac{3}{2}a\qquad (\text{фиг. 346, } б);$$

$$M_{C1}^0=\frac{2}{3};\qquad M_{C2}^0=0;\ M_{C3}^0=0\quad (\text{фиг. 346, } в).$$

Искомые перемещения равны:

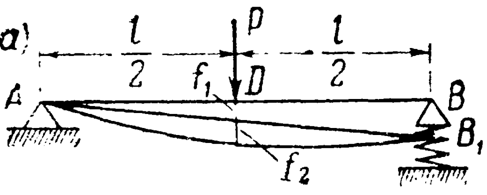
$$\delta=\frac{1}{EJ}(\omega_1M_{C1}^0+\omega_2M_{C2}^0+\omega_2M_{C3}^0),$$

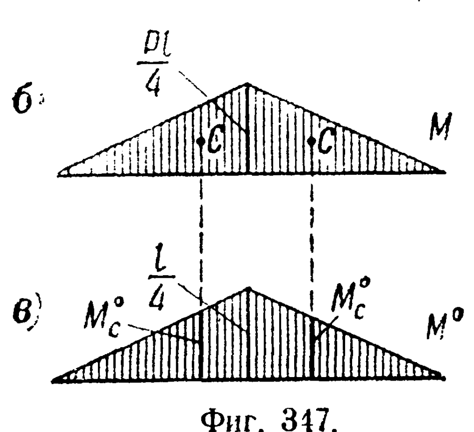
$$\Delta=\frac{1}{EJ}\left(Ma\cdot\frac{4}{3}a+Ma\cdot\frac{3}{2}a\right)=\frac{17}{6}\frac{Ma^2}{EJ},$$

$$\theta=\frac{1}{EJ}Ma\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\frac{Ma}{EJ}.$$

Пример 92. Определить прогиб сечения D балки AB (фиг. 347). Пролёт балки $l=6$ *м*; сечение двутавровое № 20а с моментом инерции $J=2370$ *см*^{4}; сила $P=2$ *т*; пружина имеет $n=10$ витков; радиус её витков $R=5$ *см*; диаметр стержня пружины $d=2$ *см*; материал — сталь.

Искомый прогиб можно представить как сумму двух прогибов: $f=f_1+f_2$, где f_1 — прогиб сечения D под влиянием просадки опоры, а f_2 — прогиб сечения D под влиянием изгиба балки AB.





Фиг. 347.

Прогиб f_1 равен половине осадки пружины под опорой B. На пружину действует сила $B=0,5P$; по формуле (11.28) имеем:

$$f_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot 0,5P\cdot R^3n}{Gr^4}=\frac{PR^3n}{Gr^4}.$$

Прогиб f_2 находим по способу Верещагина, построив эпюры M и M^0 (фиг. 347):

$$f_2=\frac{1}{EJ}\,\omega M_C^0=$$

$$=\frac{1}{EJ}\cdot 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{4}\cdot\frac{l}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{4}\right)=\frac{Pl^3}{48EJ};$$

подставляя численные значения, находим:

$$f=\frac{2000\cdot 600^3}{48\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2370}+\frac{2000\cdot 5^3\cdot 10}{8\cdot 10^5\cdot 1^4}=$$

$$=1,9+3,1=5,0\ \textit{см}.$$

Пример 93. Определить прогиб от поперечной силы для деревянной балки, шарнирно-опёртой, пролётом $l=1,2$ *м*, нагружённой посредине пролёта силой $P=10$ *т*; сечение балки — прямоугольник с размерами 30×20 *см*; $G=5500$ *кг/см*^{2}; $E=100\,000$ *кг/см*^{2}.

Пользуемся зависимостью между прогибом y_Q и изгибающим моментом в сечениях балки:

$$y_Q=-\frac{kM(x)}{GF}+C_Q. \qquad (21.27)$$

Отсчитывая абсциссы от левого конца балки, получаем для её левой половины:

$$M(x)=\frac{P}{2}x \quad\text{и}\quad y_Q=-k\frac{Px}{2GF}+C_Q;$$

при $x=0$ прогиб y_Q равен нулю; поэтому $C_Q=0$ и

$$y_Q=-k\frac{Px}{2GF}. \qquad (21.28)$$

Наибольший прогиб, как известно, будет посредине пролёта при $x=\frac{l}{2}$

$$\max y_Q=-k\frac{Pl}{4GF}=-\frac{6}{5}\cdot\frac{10\,000\cdot 120}{4\cdot 5500\cdot 30\cdot 20}=-0,11\ \textit{см}.$$

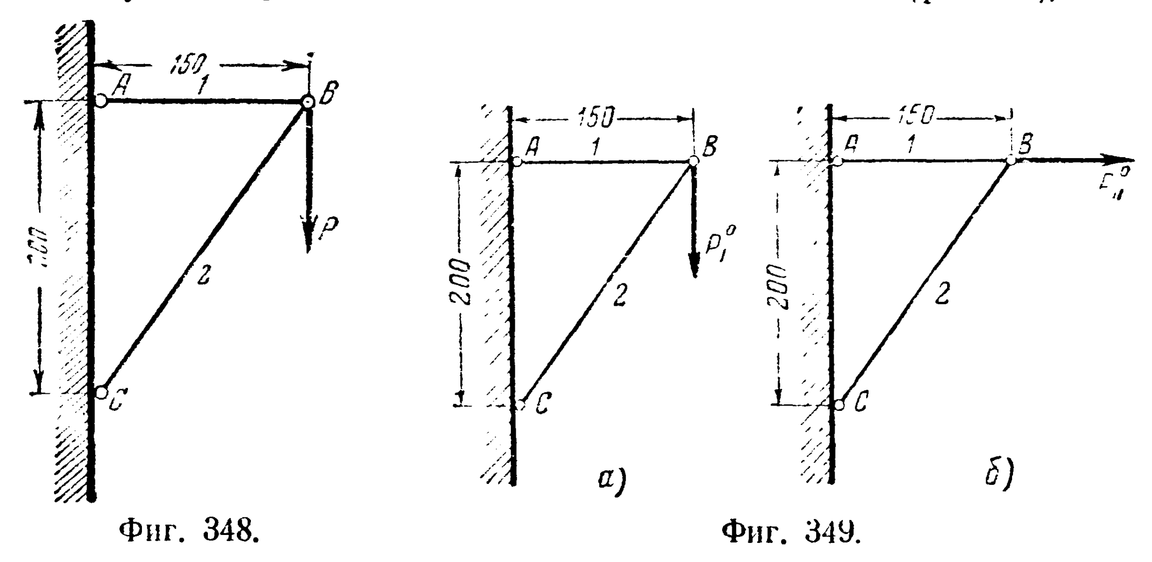
Знак минус показывает, что прогиб направлен вниз (положительная ось y направлена вверх). Вычислим прогиб от действия изгибающих моментов:

$$f=-\frac{Pl^3}{48EJ}=-\frac{10\,000\cdot 120^3}{48\cdot 100\,000\cdot\frac{30^3\cdot 20}{12}}=-0,08\ \textit{см};$$

он меньше, чем от действия поперечной силы. Это объясняется тем, что

балка сравнительно короткая: $\frac{h}{l}=\frac{1}{4}$, и поперечная сила велика при сравнительно небольшом изгибающем моменте.

Пример 94. Определить вертикальное (f) и горизонтальное (Δ) перемещения узла B кронштейна ABC под действием силы P (фиг. 348); $P=4$ *т*.



Фиг. 348. Фиг. 349.

Поперечное сечение стальных стержней: AB — круглое, $d=2$ *см*, BC — двутавр № 12 с площадью сечения 14,7 *см*^{2}.

Усилия в стержнях от заданной нагрузки (фиг. 348)

$$S_1=0{,}75\,P;\quad S_2=-1{,}25\,P.$$

Загружаем ту же систему: силой $P_I^0=1$, направленной вертикально (для определения f), и силой $P_{II}^0=1$, направленной горизонтально (для определения Δ). Усилия в стержнях от единичной нагрузки

$$S_1^0=0{,}75;\quad S_2^0=1{,}25\quad(\text{фиг. } 349, a);\quad S_1^0=1;\quad S_2^0=0\quad(\text{фиг. } 349, б).$$

Искомые перемещения (см. 21.22''):

$$f=\sum\frac{S\cdot S^0\cdot l}{EF}=\frac{0{,}75P\cdot 0{,}75\cdot 150}{2\cdot 10^6\cdot 3{,}14}+\frac{-1{,}25P\cdot(-1{,}25)\cdot 250}{2\cdot 10^6\cdot 14{,}7}=0{,}11\ см,$$

$$\Delta=\sum\frac{S\cdot S^0\cdot l}{EF}=\frac{0{,}75P\cdot 1\cdot 150}{2\cdot 10^6\cdot 3{,}14}=0{,}07\ см.$$

Узел B переместится, следовательно, на 0,11 *см* вниз (по направлению силы P_I^0) и на 0,07 *см* вправо (по направлению силы P_{II}^0).

ГЛАВА XXII.

ПРИБЛИЖЁННОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ.

§ 134. Приближённый приём вычисления прогибов.

При аналитическом вычислении прогибов мы получали для каждого участка балки своё уравнение изогнутой оси. Но можно представить изогнутую ось балки, лежащей, например, на двух опорах, одной кривой, сколько бы участков ни было на балке.

Уравнение этой кривой можно в известной мере выбрать произвольно, лишь бы были удовлетворены условия для прогибов, углов поворота,

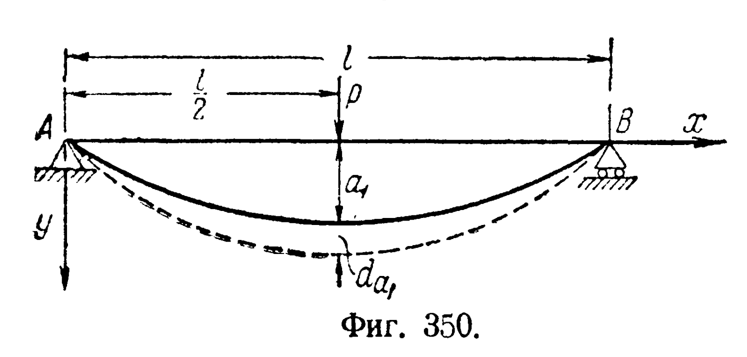
изгибающих моментов и поперечных сил в тех сечениях балки, где эти величины заранее известны. Определённым условиям должны удовлетворять как сама функция y, так и её производные. Например, изогнутую ось балки, изображённой на фиг. 350, можно представить, направляя положительную ось y вниз, в виде синусоиды:

$$y = a_1 \sin\frac{\pi x}{l}; \tag{22.1}$$

это уравнение удовлетворяет условиям на опорах A и B. Действительно, в этих сечениях прогибы и изгибающие моменты равны нулю, а углы поворотов и поперечные силы не обращаются в нуль, т. е.

$$\text{при } \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = l \end{matrix}\right\} y = 0,\ y'' = 0, \text{ а } y' \text{ и } y''' \neq 0.$$

В уравнении (22.1) $\sin\frac{\pi x}{l}$ — безразмерная функция от x, которой мы заранее задаёмся, а a_1 — прогиб в середине пролёта. Достаточно найти a_1, чтобы получить возможность приближённого вычисления прогибов балки. Для нахождения a_1 напишем условие превращения части потенциальной энергии внешних нагрузок в потенциальную энергию деформации балки при переходе её в смежное положение равновесия, показанное на фиг. 350 пунктиром. Этот переход может быть вызван, например, небольшим статическим увеличением dP приложенной силы. Тогда уменьшение потенциальной энергии независимых внешних сил будет измеряться их работой:



Фиг. 350.

$$dU_P = dA_P = \frac{1}{2}dP\,da_1 + P\,da_1 \approx P\,da_1.$$

С другой стороны,

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ}.$$

Но так как

$$M(x) = -EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -EJy''$$

(ось y направлена в сторону выпуклости балки, см. § 109), то

$$U = \frac{EJ}{2}\int_0^l (y'')^2 dx = \frac{EJa_1^2}{2}\int_0^l f''^2(x)dx.$$

При переходе балки во второе положение, т. е. при изменении обобщённой *координаты* a_1 на da_1, получаем:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial a_1}da_1 = a_1\,da_1\,EJ\int_0^l f''^2(x)\,dx.$$

По закону сохранения энергии

$$dU_P = dU$$

и

$$P\,da_1 = a_1\,da_1\,EJ\int_0^l f''^2(x)\,dx.$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{P}{EJ\int_0^l f''^2(x)\,dx}. \tag{22.2}$$

Примем

$$f(x) = \sin\frac{\pi x}{l}.$$

Тогда

$$f''^2(x) = +\frac{\pi^4}{l^4}\sin^2\frac{\pi x}{l},$$

$$\int_0^l f''^2(x)\,dx = \frac{\pi^4}{l^4}\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx = \frac{\pi^4}{l^4}\frac{l}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^4}{2l^3}$$

и

$$a_1 = \frac{Pl^3}{\frac{\pi^4}{2}EJ} = \frac{Pl^3}{48{,}7EJ},$$

что чрезвычайно близко к точному значению прогиба посредине пролёта рассматриваемой балки: $\frac{P}{48}\frac{l^3}{EJ}$. Достаточная точность получилась благодаря тому, что выбранная форма кривой $f(x)$ удовлетворяет в опорных сечениях не только условиям для прогибов y, но и для изгибающих моментов, пропорциональных y''.

Если бы на балке было расположено несколько сил P_1, P_2, $P_3, \ldots$ на расстояниях c_1, c_2, $c_3, \ldots$ от начала координат (левого конца балки), то работа dA_P выразилась бы формулой

$$dA_P = P_1\,da_1 f(c_1) + P_2\,da_1 f(c_2) + \ldots,$$

и для a_1 мы получили бы выражение

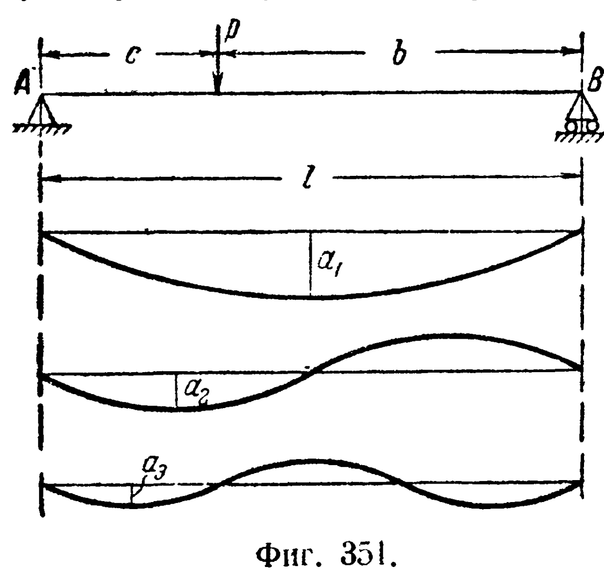
$$a_1 = \frac{P_1 f(c_1) + P_2 f(c_2) + \ldots}{EJ\int_0^l f''^2(x)\,dx}.$$

Рассматривая сплошную нагрузку как сумму отдельных элементарных сил, мы можем путём интегрирования получить a_1 и для этого вида загружения балки. При действии пар сил M_1, M_2, $M_3, \ldots$ множителями при них будут $f'(c_1)$, $f'(c_2), \ldots$

§ 135. Разложение уравнения изогнутой оси в тригонометрический ряд.

Изложенный в предыдущем параграфе приём замены изогнутой оси балки одной синусоидой не при всех случаях нагрузки может дать такой удовлетворительный результат, как в рассмотренном примере.

В этих случаях целесообразно представить изогнутую ось балки в виде суммы ряда синусоид, т. е. разложить уравнение изогнутой оси в бесконечный тригонометрический ряд, который обычно быстро сходится и в пределе даёт точное решение.



Фиг. 351.

Общее выражение для изогнутой оси в случае балки на двух опорах принимает вид:

$$y = a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots$$
$$\ldots + a_m \sin\frac{m\pi x}{l} + \ldots$$
$$\ldots + a_n \sin\frac{n\pi x}{l} + \ldots \qquad (22.3)$$

Последовательные синусоиды изображены на фиг. 351. Каждый член этого ряда и его производные удовлетворяют условиям на опорах A и B. При выборе формы ряда надо иметь в виду, что так как в выражение dU входит квадрат второй производной от y, то удовлетворение условий для этой производной очень важно; в противном случае можно получить большую погрешность. Условие же для третьей производной от y (для поперечной силы) может быть нарушено без особого влияния на точность результатов. Для определения коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ следует применить, как и в предыдущем примере, закон сохранения энергии.

Формула для вычисления потенциальной энергии деформации принимает вид:

$$U = \frac{EJ}{2}\int_0^l (y'')^2\,dx = \frac{EJ}{2}\int_0^l \left[-a_1\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l} - a_2\frac{2^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{2\pi x}{l} - \right.$$
$$\left. - \ldots a_m\frac{m^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{m\pi x}{l} - \ldots - a_n\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{n\pi x}{l} - \ldots\right]^2 dx.$$

При возведении в квадрат мы получим под интегралом слагаемые двух видов:

$$a_n^2\frac{n^4\pi^4}{l^4}\sin^2\frac{n\pi x}{l}$$

и

$$2a_n a_m\frac{n^2m^2\pi^4}{l^4}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}.$$

Интегрируя, находим:

$$\int_0^l a_n^2\frac{n^4\pi^4}{l^4}\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = a_n^2\frac{n^4\pi^4}{l^4}\frac{l}{2} = a_n^2\frac{n^4\pi^4}{2l^3}$$

и

$$\int_0^l 2a_n a_m\frac{n^2m^2\pi^4}{l^4}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = 0.$$

Таким образом, выражение для потенциальной энергии деформации примет вид:

$$U=\frac{\pi^4 EJ}{4l^3}\left[a_1^2+2^4a_2^2+\ldots+n^4a_n^2+\ldots\right]=\frac{\pi^4 EJ}{4l^3}\sum_{n=1}^{n=\infty} n^4a_n^2. \qquad (22.4)$$

Потенциальная энергия деформации выражена в функции обобщённых *координат* a_n и представляет собой сумму количеств потенциальной энергии, накапливающихся при изгибе балки *отдельно по каждой синусоиде.*

Переведём балку в смежное, очень близкое, положение равновесия и составим уравнение сохранения энергии. Мы можем перевести балку в смежное положение равновесия, изменяя на da_n *только один* какой-либо из коэффициентов a_n, оставляя остальные без перемен. Тогда в выражения (22.3) вместо слагаемого $a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ войдёт величина $(a_n+da_n)\sin\frac{n\pi x}{l}$, а все остальные слагаемые сохранят своё значение. При этом изменится потенциальная энергия деформации, соответствующая только изгибу балки по синусоиде $a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$.

Таким образом, приращение потенциальной энергии деформации балки за счёт изменения коэффициента a_n будет равно

$$dU=\frac{\partial U}{\partial a_n}da_n=\frac{\pi^4 EJ}{2l^3}n^4a_n da_n.$$

Это приращение должно быть численно равно уменьшению потенциальной энергии внешних независимых сил при вариации координаты a_n.

Рассмотрим случай нагрузки балки на двух опорах сосредоточенной силой P, приложенной на расстоянии c от левой опоры (фиг. 351). Прогиб под этой силой равен

$$y_c=a_1\sin\frac{\pi c}{l}+a_2\sin\frac{2\pi c}{l}+\ldots+a_n\sin\frac{n\pi c}{l}.$$

При увеличении этого прогиба за счёт изменения координаты a_n на da_n потенциальная энергия нагрузки уменьшится на величину dU_P, равную работе dA силы P при изменении прогиба

$$dU=dA=P\,dy_c;\quad dU_P=P\,da_n\sin\frac{n\pi c}{l}.$$

Составляем уравнение сохранения энергии:

$$dU=dU_P, \text{ или}$$

$$\frac{\pi^4 EJ}{2l^3}n^4a_n da_n=P\,da_n\sin\frac{n\pi c}{l},$$

откуда

$$a_n=\frac{P\sin\frac{n\pi c}{l}\,l^3}{\frac{\pi^4}{2}n^4EJ}. \qquad (22.5)$$

Тогда уравнение прогибов получает вид:

$$y=\frac{Pl^3}{\frac{\pi^4}{2}EJ}\left[\sin\frac{\pi c}{l}\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{2^4}\sin\frac{2\pi c}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{Pl^3}{\frac{\pi^4}{2}EJ}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (22.6)$$

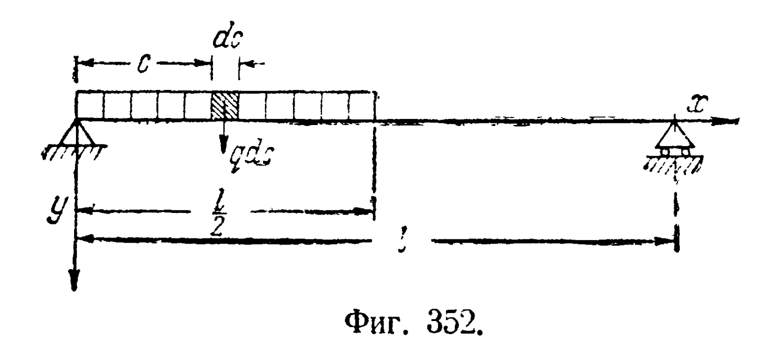
Отметим, что при вычислении dU безразлично, за счёт добавления каких сил происходит вариация координаты a_n, лишь бы эта вариация была мала; соответствующая сила тоже будет мала, её работа окажется величиной 2-го порядка малости и не войдёт в уравнение сохранения энергии, как это было показано в § 126.

Применяя формулу (22.6) к случаю, когда сила приложена посредине пролёта, и отыскивая прогиб в этом же сечении, получаем при $c=\frac{l}{2}$ и $x=\frac{l}{2}$:

$$y_{\max}=\frac{Pl^3}{\frac{\pi^4}{2}EJ}\left[1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right]=\frac{Pl^3}{\frac{\pi^4}{2}EJ}\sum_{n=1,\,3,\,5,\,\ldots}\frac{1}{n^4}. \qquad (22.7)$$

Этот ряд сходится очень быстро, достаточно сохранить только первый член.

Пример 95. Дать приближённое выражение для изогнутой оси балки, представленной на фиг. 352. Сплошную нагрузку можно заменить системой элементарных сосредоточенных сил $q\,dc$. Прогиб dy в любом сече-



Фиг. 352.

нии с абсциссой x от такой силы, расположенной на расстоянии c от начала координат, можно вычислить по формуле (22.6), заменяя P на $q\,dc$. Тогда

$$dy=\frac{qd\,cl^3}{\frac{\pi^4}{2}EJ}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Для вычисления полного прогиба y надо проинтегрировать этот ряд по c от 0 до $\frac{l}{2}$; интегрируя общий член ряда, получаем:

$$\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{qd\,cl^3}{\frac{\pi^4}{2}EJ}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{ql^3}{\frac{\pi^4}{2}EJ}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{n\pi c}{l}\,dc.$$

Интеграл

$$\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{n\pi c}{l}\,dc=-\frac{l}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi c}{l}\right]_0^{\frac{l}{2}}=\frac{l}{n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi}{2}\right].$$

Разность, стоящая в скобках, равна

при $n=1\ldots\ldots1$
» $n=2\ldots\ldots2$
» $n=3\ldots\ldots1$
» $n=4\ldots\ldots0$ и т. д.

Таким образом, y будет выражаться формулой

$$y=\frac{ql^4}{0{,}5\pi^5 EJ}\left[\sum_{n=1,\,3,\,5,\,\ldots}\frac{1}{n^5}\sin\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=2,\,6,\,10,\,\ldots}\frac{2}{n^5}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]. \qquad (22.8)$$

Оба ряда, стоящие в скобках, быстро сходятся. Сохраняя лишь первые слагаемые, вычислим прогибы посредине и в четвертях пролёта:

$$y_{l/2}=\frac{ql^4}{0{,}5\pi^5 EJ}=\frac{ql^4}{153{,}0EJ}$$

вместо точного значения

$$y_{l/2}=\frac{ql^4}{153{,}6\,EJ};$$

$$y_{l/4}=\frac{ql^4}{0{,}5\pi^5 EJ}\left[\sin\frac{\pi l}{4l}+\frac{2}{2^5}\sin\frac{2\pi l}{4l}\right]=\frac{0{,}769\,ql^4}{0{,}5\pi^5 EJ};$$

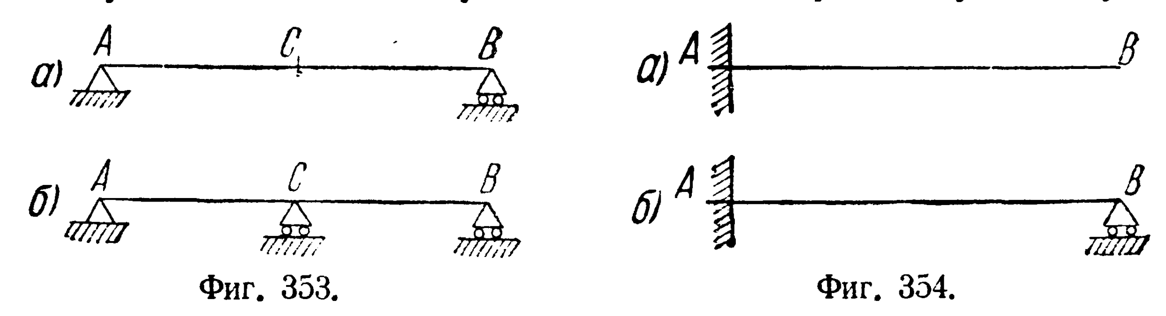
$$y_{3l/4}=\frac{ql^4}{0{,}5\pi^5 EJ}\left[\sin\frac{3\pi l}{4l}+\frac{2}{2^5}\sin\frac{2\pi\cdot 3l}{4l}\right]=\frac{0{,}645\,ql^4}{0{,}5\pi^5 EJ}.$$

ГЛАВА XXIII.

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ.

§ 136. Общие понятия и метод расчёта.

До сих пор мы рассматривали только статически определимые балки, у которых три опорные реакции определялись из условий равновесия. Очень часто, по условиям работы конструкции, оказывается необходимым увеличить число опорных закреплений; тогда мы получаем так называемую статически неопределимую балку.

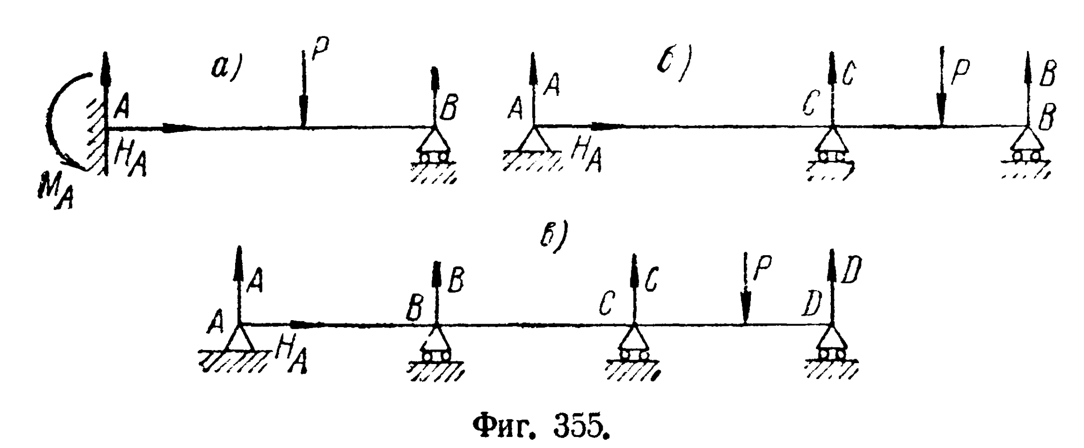


Фиг. 353. Фиг. 354.

Например, для уменьшения пролёта балки AB на двух опорах (фиг. 353, *а*) можно поставить опору ещё посредине (фиг. 353, *б*); для уменьшения деформаций балки, защемлённой одним концом (фиг. 354, *а*), можно подпереть её свободный конец (фиг. 354, *б*).

Для подбора сечения таких балок, так же как и в рассмотренных ранее задачах, необходимо построить обычным порядком эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, а стало быть, определить опорные реакции.

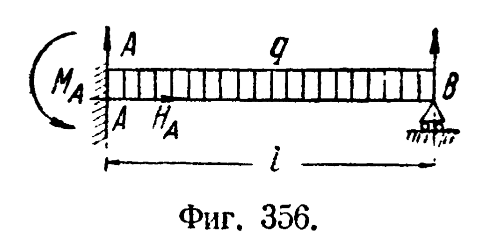
Во всех подобных случаях число опорных реакций, которые могут возникнуть, превышает число уравнений статики, например, для балок фиг. 355, *а* и *б* четыре опорные реакции, а для балки



Фиг. 355.

фиг. 355, *в* — пять. Поэтому необходимо составить дополнительные уравнения, выражающие условия *совместности* деформаций, которые вместе с обычными уравнениями равновесия и дадут возможность определить все опорные реакции.

Определим опорные реакции и построим эпюру моментов для балки, находящейся (фиг. 356) под действием равномерно распределённой нагрузки q. Сначала изобразим все реакции, которые по устройству опор могут возникнуть в этой балке. Таких реакций может быть на опоре A три: вертикальная A, горизонтальная H_A и опорный момент M_A; на опоре B возможно появление лишь одной реакции B. Таким образом, число опорных реакций на одну больше, чем уравнений статики.



Фиг. 356.

Одна из реакций является добавочной, как говорят, «лишней» неизвестной. Этот термин прочно укоренился в технической литературе; между тем, принять его можно лишь *условно*. Действительно, добавочная реакция и соответствующее ей добавочное опорное закрепление являются «лишними» только с точки зрения необходимости этих закреплений для равновесия балки как жёсткого целого. С точки же зрения инженера добавленное закрепление во многих случаях не только не является лишним, а наоборот, позволяет осуществить такую конструкцию, которая без него была бы невозможна. Например, балка фиг. 353, *б* могла бы в некоторых случаях перекрыть пролёт AB лишь при наличии добавочной опоры в точке C. Поэтому мы будем пользоваться термином «лишняя опорная реакция», «лишняя неизвестная» лишь условно.

Составим все уравнения статики для нашей балки, приравнивая нулю сумму проекций всех сил на направление оси балки, на перпендикуляр к ней, и сумму моментов относительно точки A. Получим систему:

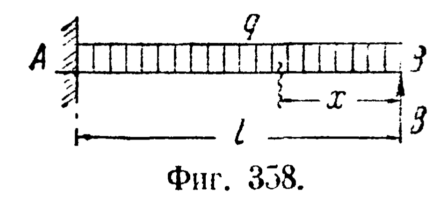
$$H_A = 0, \quad A + B - ql = 0, \quad -M_A + \frac{ql^2}{2} - Bl = 0. \qquad (23.1)$$

Из первого уравнения сразу определяется опорная реакция H_A; для определения трёх других остаются лишь два уравнения.

За лишнюю реакцию можно взять любую из этих трёх: попробуем взять реакцию опоры B. В таком случае мы должны считать, что рассматриваемая балка получилась из статически определимой балки AB, защемлённой концом A (фиг. 357), у которой потом поставили добавочную опору в точке B. Эта *статически определимая балка, которая получается из статически неопределимой при удалении добавочного, лишнего опорного закрепления, называется основной системой.* Выбрав какую-либо из реакций за лишнюю неизвестную, мы тем самым выбираем основную систему.



Фиг. 357.



Фиг. 358.

Попробуем теперь превратить основную систему (фиг. 357) в систему, полностью совпадающую с заданной статически неопределимой балкой (фиг. 356). Для этого загрузим её сплошной нагрузкой q и в точке B приложим лишнюю реакцию B (фиг. 358).

Однако этого мало: в балке, изображённой на фиг. 358, точка B может перемещаться по вертикали под действием нагрузок q и B; между тем, в нашей статически неопределимой балке (фиг. 356) точка B не имеет этой возможности, она должна совпадать с опорным шарниром. Поэтому, чтобы привести к окончательному совпадению фиг. 356 и 358, надо к последней добавить условие, что прогиб точки *B основной системы* под действием нагрузок q и B должен быть равен нулю:

$$f_B = 0. \qquad (23.2)$$

Это и будет добавочное уравнение, определяющее реакцию B; оно является условием совместности деформаций в рассматриваемом случае: конец B балки не отрывается от опоры.

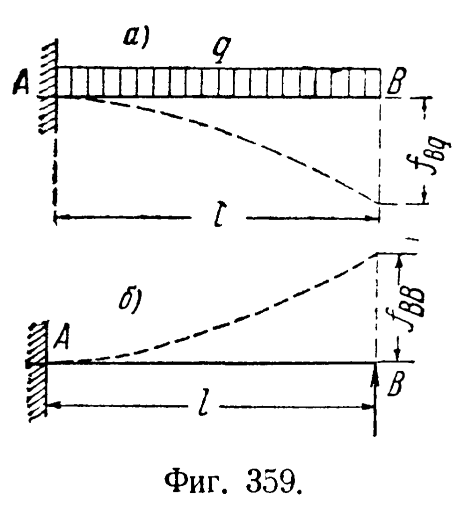
Решение этого добавочного уравнения возможно несколькими способами.

§ 137. Способ сравнения деформаций.

Выполняя решение составленного в § 136 уравнения (23.2) $f_B = 0$, названного уравнением совместности деформаций, можно рассуждать следующим образом.

Прогиб точки *B основной системы* под действием нагрузок q и B складывается из двух прогибов: одного f_{Bq}, вызванного лишь

нагрузкой q, и другого f_{BB}, вызванного реакцией B. Таким образом,



Фиг. 359.

$$f_B = f_{Bq} + f_{BB} = 0. \qquad (23.3)$$

Остаётся вычислить эти прогибы. Для этого загрузим основную систему одной нагрузкой q (фиг. 359, a). Тогда прогиб точки B будет равен:

$$f_{Bq} = -\frac{ql^4}{8EJ}.$$

При нагружении основной системы реакцией B (фиг. 359, $б$) имеем:

$$f_{BB} = +\frac{Bl^3}{3EJ}.$$

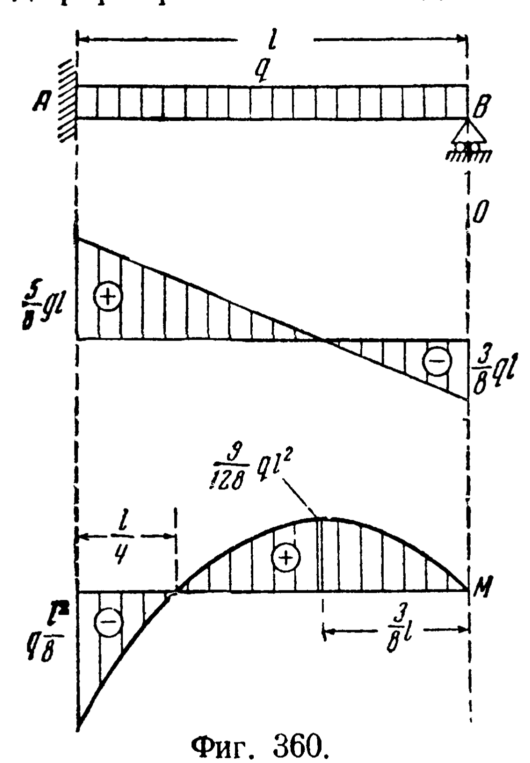
Подставляя эти значения прогибов в уравнение (23.3), получаем:

$$-\frac{ql^4}{8EJ} + \frac{Bl^3}{3EJ} = 0.$$

Отсюда

$$B = \frac{3ql}{8}. \qquad (23.4)$$

В этом способе мы сначала даём возможность основной системе деформироваться под действием внешней нагрузки q, а затем подбираем такую силу B, которая бы вернула точку B обратно. Таким образом, мы подбираем величину неизвестной дополнительной реакции B с тем расчётом, чтобы уравнять прогибы от нагрузки q и силы B. Этот способ и называют *способом сравнения деформаций*.



Фиг. 360.

Подставляя значение лишней реакции B в уравнения статики (23.1), получаем

$$A = 5\frac{ql}{8},$$

$$M_A = \frac{ql^2}{2} - \frac{3ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

Выражение изгибающего момента получаем, рассматривая правую часть балки (фиг. 358) и подставляя значение B:

$$M = \frac{3ql}{8}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}\left[\frac{3l}{4} - x\right].$$

Поперечная сила Q выражается формулой

$$Q = -B + qx = -q\left[\frac{3}{8}l - x\right].$$

Эпюры моментов и поперечных сил изображены на фиг. 360. Сечение с наибольшим положительным моментом соответствует абсциссе x_0, определяемой равенством

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{3ql}{8} - qx_0 = 0.$$

Отсюда $x_0 = \frac{3l}{8}$, соответствующая ордината эпюры моментов, равна:

$$M_{\max} = M_{x_0} = \frac{3ql}{8} \cdot \frac{3l}{8} - \frac{q \cdot 9l^2}{2 \cdot 64} = +\frac{9}{128} ql^2.$$

§ 138. Применение теоремы Кастильяно, теоремы Мора и способа Верещагина.

Раскрытие статической неопределимости для балки, рассмотренной в §§ 136 и 137, может быть произведено и при помощи теоремы Кастильяно (§ 127).

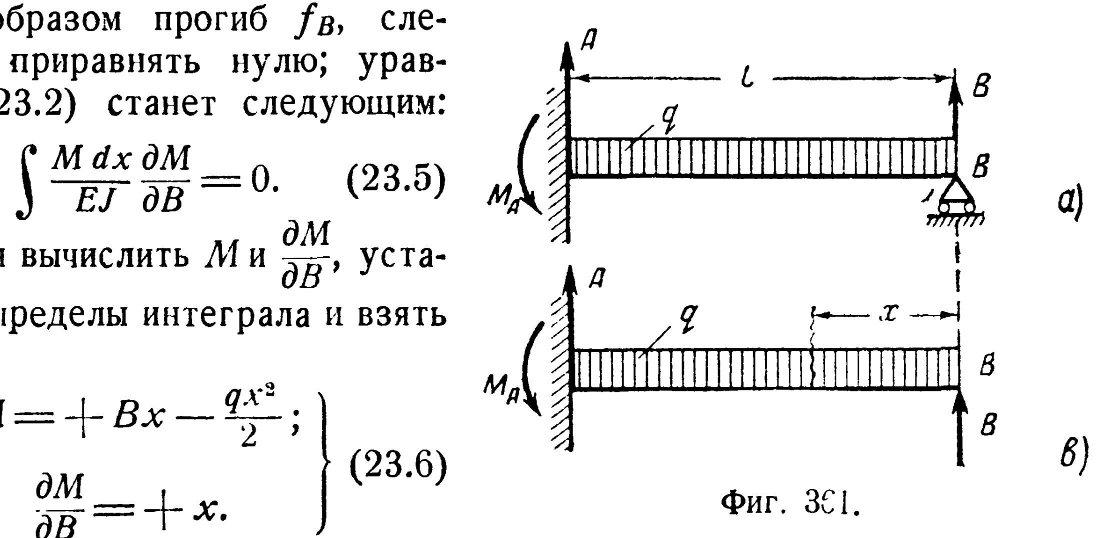
«Лишнюю» *опорную реакцию* B (фиг. 361, *а*) заменяем «лишней» неизвестной *силой* B, действующей вместе с заданной нагрузкой q на основную статически определимую балку AB (фиг. 361, *б*).

Дифференцируя по силе B потенциальную энергию и вычисляя таким образом прогиб f_B, следует f_B приравнять нулю; уравнение (23.2) станет следующим:

$$\int \frac{M\,dx}{EJ}\frac{\partial M}{\partial B} = 0. \qquad (23.5)$$

Остаётся вычислить M и $\frac{\partial M}{\partial B}$, установить пределы интеграла и взять его:

$$\left.\begin{aligned} M &= +Bx - \frac{qx^2}{2}; \\ \frac{\partial M}{\partial B} &= +x. \end{aligned}\right\} \qquad (23.6)$$



Фиг. 361.

Будем считать, что сечение балки не меняется по длине; уравнение (23.5) примет вид:

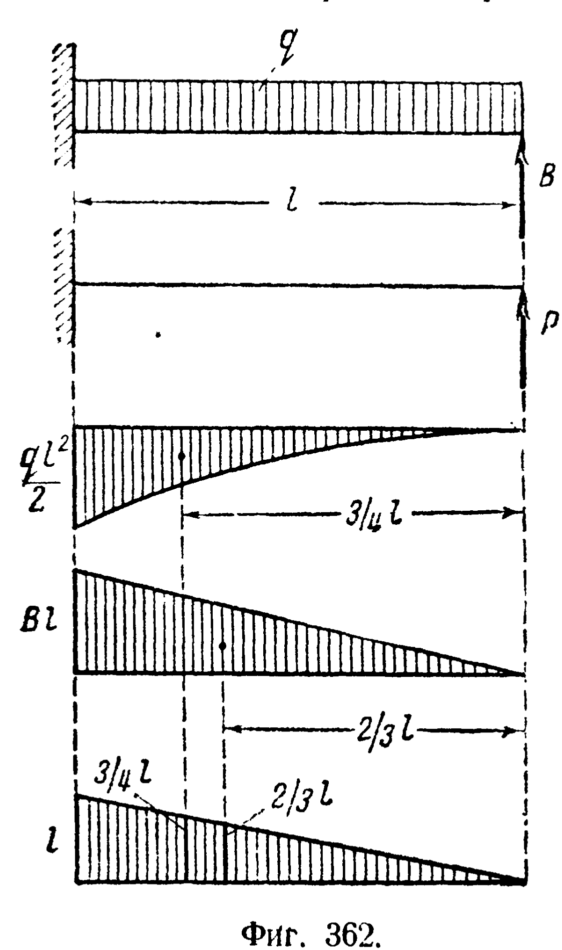
$$\int_0^l \left(Bx - \frac{qx^2}{2}\right) x\,dx = 0 \quad \text{или} \quad \frac{Bl^3}{3} - \frac{ql^4}{8} = 0;$$

отсюда

$$B = \frac{3ql}{8}.$$

Далее решение не отличается от описанного в способе сравнения деформаций.

Раскрытие статической неопределимости возможно выполнить также и по теореме Мора. При решении по Мору, кроме первого состояния нагружения основной балки заданной нагрузкой и лишней неизвестной силой (фиг. 362, *а*), следует показать ту же балку во втором состоянии загружения — силой $P^0 = 1$ (фиг. 362, *б*).



Фиг. 362.

Вычисления при обозначениях, принятых на фиг. 362, дают:

$$M = +Bx - \frac{qx^2}{2};$$

$$M^0 = +x,$$

т. е. то же, что и при пользовании теоремой Кастильяно (23.6).

При решении того же примера по способу Верещагина к двум схемам состояний загружения (фиг. 362, *а* и *б*) следует построить эпюры моментов: от нагрузки q (фиг. 362, *в*), от силы B (фиг. 362, *г*) и от силы $P^0 = 1$ (фиг. 362, *д*).

Величина моментных площадей:

от нагрузки q: $\omega_q = -\frac{1}{3}\frac{ql^2}{2} \cdot l = -\frac{ql^3}{6}$,

от нагрузки B: $\omega_B = \frac{1}{2} Bl \cdot l = B\frac{l^2}{2}$.

Ординаты эпюр единичной нагрузки:

для умножения на ω_q: $M_c^0 = \frac{3}{4} l$,

для умножения на ω_B: $M_c^0 = \frac{2}{3} l$.

Прогиб в точке B

$$f_B = \frac{1}{EJ}\left(\frac{Bl^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l - \frac{ql^3}{6} \cdot \frac{3}{4} l\right) = 0.$$

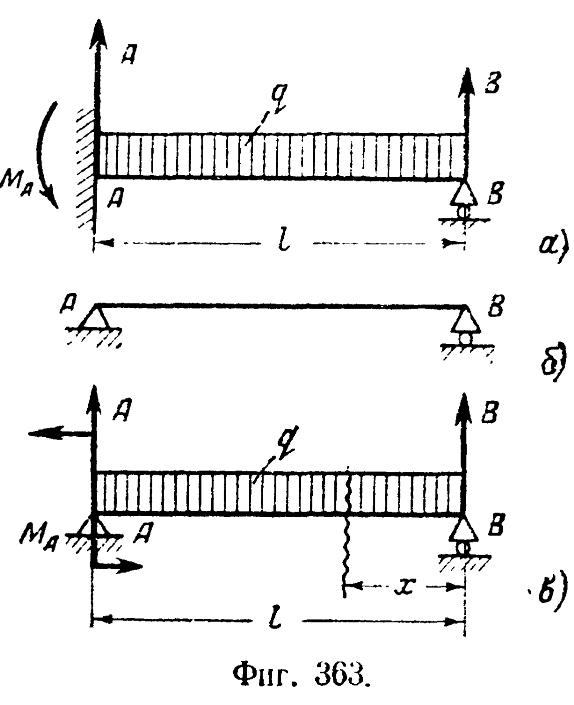
Отсюда

$$B = \frac{3}{8} ql.$$

Дальше решение идёт, как указано в § 137.

§ 139. Выбор лишней неизвестной и основной системы.

В предыдущем примере мы выбрали за лишнюю неизвестную реакцию B. Мы могли бы выбрать и момент M_A. Соответственно изменилась бы основная система и ход решения. Окончательный же результат, конечно, получился бы прежним.



Фиг. 363.

Возьмём за лишнюю неизвестную опорный момент M_A (фиг. 363, *а*). Какой будет основная система? Чтобы получить её, надо отбросить то опорное закрепление, которое создаёт момент M_A, т. е. защемление конца A. Чтобы на конце A не было опорного момента, там следует поставить шарнирно-неподвижную опору.

Основной системой будет балка, изображённая на фиг. 363, *б*. Загрузим её внешней нагрузкой и опорным моментом M_A (фиг. 363, *в*).

Чтобы балки фиг. 363, *а* и *в* работали одинаково, надо для балки фиг. 363, *в* написать дополнительное условие, что сечение A под действием изображённых нагрузок не может поворачиваться; накладываем это ограничение на перемещение, соответствующее выбранной лишней неизвестной:

$$\theta_A = 0.$$

Далее, применив для решения уравнения $\theta_A = 0$ теорему Кастильяно, имеем

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \int \frac{M\,dx}{EJ}\frac{\partial M}{\partial M_A},$$

следовательно,

$$\int \frac{M\,dx}{EJ}\frac{\partial M}{\partial M_A} = 0.$$

Для нахождения M и $\frac{\partial M}{\partial M_A}$ выразим реакцию B основной системы (фиг. 363, *в*) через M_A и произведём все обычные вычисления:

$$-M_A + \frac{ql^2}{2} - Bl = 0, \quad B = \frac{ql}{2} - \frac{M_A}{l},$$

$$M = +Bx - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - \frac{M_A x}{l},$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_A} = -\frac{x}{l}.$$

Подставляя полученные данные в (23.7), находим:

$$\frac{1}{EJ}\int_0^l \left[\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - \frac{M_A x}{l}\right]\left[-\frac{x}{l}\right]dx = 0;$$

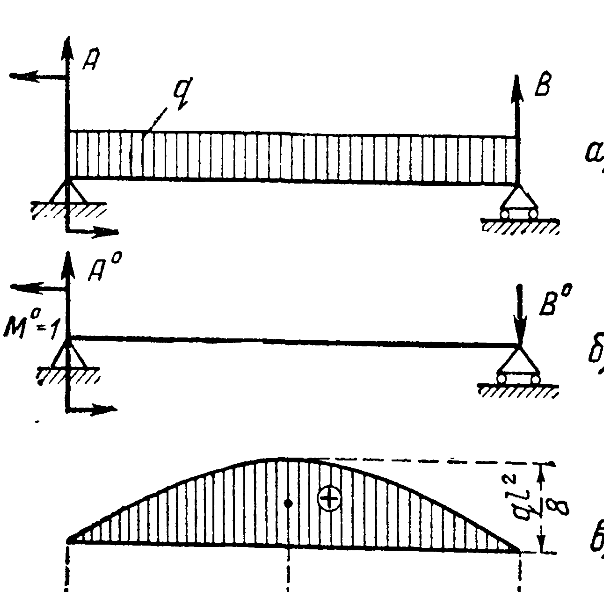
$$\frac{ql^3}{6} - \frac{ql^3}{8} - \frac{M_A l}{3} = 0.$$

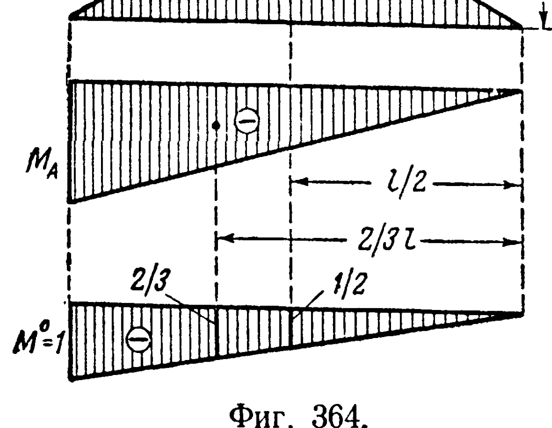
Отсюда

$$M_A = +\frac{ql^2}{8},$$

т. е. той же величине, которая была получена раньше. Дальнейший ход решения не отличается от разобранного выше.

Решение той же основной системы (фиг. 363, *в* и 364, *а*) с применением способа Верещагина потребует изображения второго состояния загружения основной системы моментом $M^0 = 1$ (фиг. 364, *б*) и построения эпюр изгибающего момента: от заданной нагрузки q (фиг. 364, *в*), от момента M_A (фиг. 364, *г*) и от единичной нагрузки $M^0 = 1$ (фиг. 364, *д*). Пользуясь формулой (21.22), вычисляем θ_A:





Фиг. 364.

$$\theta_A = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{2}{3}l\cdot\frac{ql^2}{8}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-M_A\frac{1}{2}l\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = 0.$$

Как видно, уравнение для определения M_A полностью совпадает с найденным по Кастильяно.

Сравнивая два варианта решения поставленной задачи с лишней неизвестной B и с лишней неизвестной M_A, видим, что при применении способа Кастильяно первый вариант менее сложен по вычислениям. Это объясняется тем, что основной системой в первом варианте является балка, защемлённая одним концом, во втором же — балка на двух опорах; для второй — вычисления сложнее. Таким образом, лишнюю неизвестную и, следовательно, основную систему надо выбирать с таким расчётом, чтобы выкладки (вычисление изгибающих моментов и т. д.) были проще.

Если бы мы выбрали за лишнюю неизвестную реакцию A, то основную систему следовало бы так устроить, чтобы опора A не давала возможности поворота сечения и горизонтальных перемещений, но допускала бы вертикальные движения.

На фиг. 365 показано соответствующее устройство балки: в точке A к концу балки наглухо прикреплён ползун, скользящий без трения в вертикальных направляющих. Тогда опора A будет передавать момент и горизонтальную составляющую, но не будет давать вертикальной реакции.



Фиг. 365.

Дополнительное уравнение получим, приравнивая нулю перемещение (в основной системе), соответствующее реакции A, т. е. вертикальный прогиб точки A.

За лишнюю неизвестную нельзя брать лишь ту реакцию, при отбрасывании которой мы получим изменяемую, неустойчивую основную систему; в нашем примере такой была бы реакция H_A, но она и определилась из уравнения статики.

§ 140. План решения статически неопределимой задачи.

Общий метод решения, показанный в предыдущих параграфах, распадается на ряд отдельных этапов, которые даны в сводном виде в таблице 23.

В этой таблице даны два варианта решения задачи: с лишней реакцией B и с лишней реакцией M_A. Для развёртывания добавочного условия даны также два варианта решения: способом сравнения деформаций и с применением теоремы Кастильяно.

Если бы число реакций статически неопределимой балки было не четыре, как в рассмотренном примере, а больше, то соответственно увеличилось бы число лишних неизвестных; загрузив основную систему внешней нагрузкой и этими лишними неизвестными, мы можем написать дополнительные условия, ограничивающие деформации балки в тех сечениях, где эти лишние реакции приложены. Таким путём будет получено столько же дополнительных уравнений, сколько лишних неизвестных.

Следовательно, общий метод определения добавочных опорных реакций в статически неопределимых балках основан на том, что всякая дополнительная опора, вводя лишнюю неизвестную реакцию, в то же время накладывает дополнительное ограничение в основной статически определимой системе на перемещение, *соответствующее* лишней неизвестной реакции. Выражая уравнением это ограничение, мы получаем столько дополнительных уравнений, сколько добавлено новых опорных закреплений.

Таблица 23. **План решения однажды статически неопределимой задачи.**

1. Для заданной схемы балки указываются все реакции, составляются уравнения статики и из них определяются статически определимые реакции		$H_A=0$; $A+B-ql=0$; $-M_A+\frac{ql^2}{2}-Bl=0$.
За лишнюю неизвестную выбрано B	2. Из остальных реакций выбрать одну за лишнюю и изобразить основную систему	За лишнюю неизвестную выбрано M_A
	3. Загрузить основную систему внешней заданной нагрузкой и лишней неизвестной	
$f_B=0$	4. Написать добавочное условие, ограничивающее деформации основной системы и выражающее условие *совместности* деформаций статически неопределимой системы	$\theta_A=0$
	Дальнейшее решение задачи можно вести	
способом сравнения деформаций		применением теоремы Кастильяно
$f_{Bq}+f_{BB}=0$	5. Развернуть добавочное условие	$\int_0^l M(x)\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial B}\,dx=0$
$\theta_{Aq}+\theta_{AM}=0$		$\int_0^l M(x)\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial M_A}\,dx=0$
6. Вычисляются значения деформаций. Они подставляются в добавочное условие, которое затем решается		6. Вычисляются: изгибающий момент, производная и весь интеграл в целом. Находится лишнее неизвестное
7. Из уравнений статики определяются остальные реакции; эпюры изгибающего момента и поперечной силы строятся обычными приёмами		

§ 141. Примеры расчёта статически неопределимых систем.

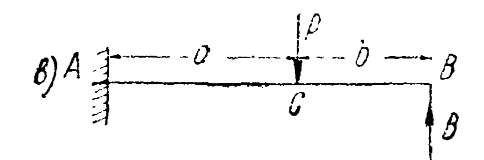
Пример 96. Балка, защемлённая одним концом и опёртая другим, загружена сосредоточенной силой P (фиг. 366, a).

Проведём расчёт по методу сравнения деформаций. Опорных реакций — четыре. Имеем уравнения статики:



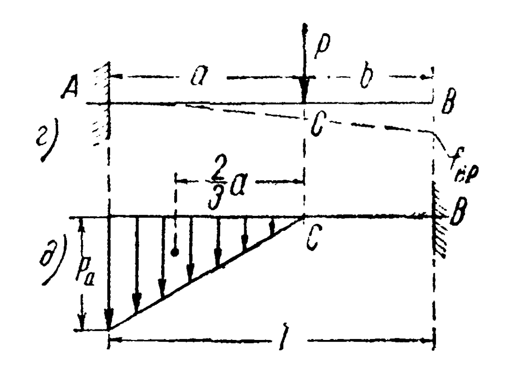
$$\left.\begin{aligned} H_A &= 0, \\ A + B - P &= 0, \\ -M_A + Pa - Bl &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (23.7)$$

За лишнюю неизвестную выбираем реакцию B. Основная система изображена на фиг. 366, $б$. Загружаем основную систему заданной нагрузкой P и лишней неизвестной B (фиг. 366, $в$). При таком загружении прогиб в точке B должен быть равен нулю



$$f_B = 0.$$

Загружаем теперь основную систему раздельно: силой P, вызывающей прогиб f_{BP}, и силой B, вызывающей прогиб f_{BB} (фиг. 366, $г$ и $е$); тогда:

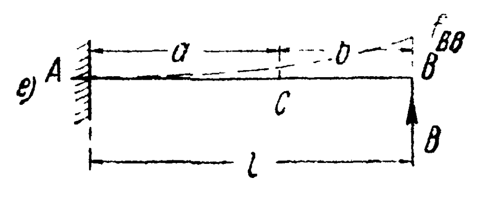


$$f_B = f_{BP} + f_{BB} = 0. \qquad (23.8)$$

Определим прогиб f_{BP} графо-аналитически (фиг. 366, $д$):

$$f_{BP} = -\frac{1}{2} Paa\left[\frac{2}{3}a + b\right]\frac{1}{EJ} = $$

$$= -\frac{Pa^3}{3EJ}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\right]. \qquad (23.9)$$



Прогиб f_{BB} известен из предыдущего

$$f_{BB} = +\frac{Bl^3}{3EJ}. \qquad (23.10)$$

Вносся полученные выражения в уравнение (23.8), получаем:

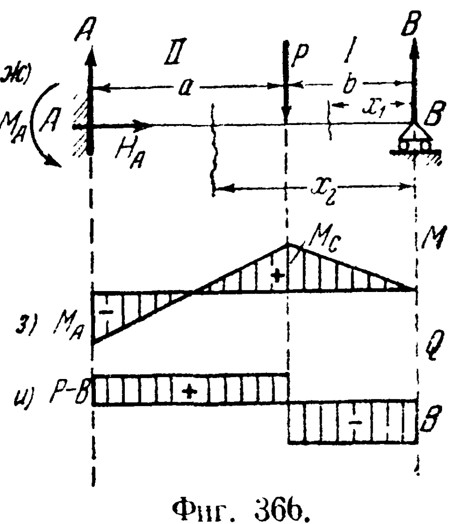
$$-\frac{Pa^3}{3EJ}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\right] + \frac{Bl^3}{3EJ} = 0. \qquad (23.11)$$

Отсюда

$$B = P\frac{a^3}{l^3}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\right]. \qquad (23.12)$$

Изгибающий момент на первом участке (фиг. 366, $з$) равен

$$M_1 = Bx_1 = P\frac{a^3}{l^3}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\right]x_1.$$



Фиг. 366.

При $x_1 = b$ имеем:

$$M_c = P\frac{ba^3}{l^3}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\right] = P\frac{ba^2}{2l^3}[2a + 3b].$$

Для второго участка

$$M_2 = Bx_2 - P(x_2 - b) = P\frac{a^3}{l^3}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\right]x_2 - P(x_2 - b).$$

При $x_2 = l$ имеем:

$$M_A = P\frac{a^3}{l^2}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\right] - Pa = P\frac{a^2}{2l^2}[2a + 3b] - Pa = -\frac{Pab}{2l^2}[a + 2b].$$

Поперечная сила для первого участка (фиг. 366, *и*) равна:

$$Q_1 = -B = -P\frac{a^3}{l^3}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\right].$$

Для второго

$$Q_2 = -B + P = P - P\frac{a^3}{l^3}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\right].$$

В частном случае при $a = b = \frac{l}{2}$ $B = +\frac{5}{16}P$; $A = +\frac{11}{16}P$;

$$M_A = -\frac{3}{16}Pl;\quad M_C = +\frac{5}{32}Pl;\quad Q_1 = -\frac{5}{16}P;\quad Q_2 = +\frac{11}{16}P.$$

Пример 97. Балка AB, нагружённая силой P (фиг. 367), защемлена концом A; конец B опирается *на упругую* опору (пружину). Податливость пружины, т. е. её осадку от единичной силы, обозначим α [*см/кг*]; эта величина может быть вычислена по формуле (11.28) (§ 65); полагая

$$P_1 = 1,$$

получаем:

$$\alpha = \frac{4R^3 n}{Gr^4}.$$

Фиг. 367.

За лишнюю неизвестную выбираем реакцию B между балкой и упругой опорой. Ход решения остаётся таким же, что и в предыдущем примере: изменится лишь уравнение совместности. Прогиб конца B балки будет равен уже не нулю, а осадке пружины от силы B, т. е.

$$f_B = f_{BP} + f_{BB} = -\lambda; \tag{23.13}$$

знак минус перед λ поставлен потому, что положительное направление прогибов принято *вверх*. Подставляя в уравнение (23.13) значения f_{BP} и f_{BB} (см. пример 96) и величину $\lambda = \alpha B$, получаем:

$$-\frac{Pa^3}{3EJ}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\right] + \frac{Bl^3}{3EJ} = -\alpha B.$$

Отсюда

$$B = P\frac{a^3}{l^3}\frac{1 + \frac{3}{2}\frac{b}{a}}{1 + \frac{3EJ\alpha}{l^3}}. \tag{23.14}$$

При абсолютно жёсткой пружине $\alpha = 0$ и формула для B совпадает с полученной выше в предыдущем примере (23.12).

Определим наибольшие напряжения в балке и пружине при следующих числовых данных: балка двутавровая № 20, $J = 1840$ *см*^{4}, $W = 184$ *см*^{3}, про-

лёт $l=4$ *м*; $a=b=2$ *м*; $P=2$ *т*. Радиус витка пружины $R=5$ *см*, радиус её стержня $r=1$ *см*; число витков $n=6$. Модули: $E=2\cdot10^6$ *кг/см²*, $G=8\cdot10^5$ *кг/см²*. Податливость пружины равна:

$$\alpha=\frac{4\cdot5^3\cdot6}{8\cdot10^5\cdot1^4}\ см/кг.$$

Вычисляем отношение к формуле (23.14) и реакцию:

$$\frac{3EJ\alpha}{l^3}=\frac{3\cdot2\cdot10^6\cdot1840\cdot4\cdot5^3\cdot6}{4^3\cdot10^6\cdot8\cdot10^5}=0{,}65,\qquad B=2000\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1+\frac{3}{2}}{1+0{,}65}=378\ кг.$$

Опасными являются сечение в защемлении и сечение под грузом. В первом из них

$$M_A=Bl-P\frac{l}{2}=378\cdot400-2000\cdot200=-248\,800\ кгсм;$$

во втором

$$M_C=+B\frac{l}{2}=378\cdot200=75600\ кгсм.$$

Наибольшее нормальное напряжение в балке равно:

$$\sigma=\frac{|\max M|}{W}=\frac{248\,800}{184}=1343\ кг/см^2.$$

Наибольшее касательное напряжение в пружине

$$\max\tau=\frac{2BR}{\pi r^3}=\frac{2\cdot378\cdot5}{\pi\cdot1^3}=1200\ кг/см^2.$$

Пример 98. Построить эпюру моментов для рамы (фиг. 368, *а*) при нагрузке силой P. Жёсткость стержня EJ постоянна.

Обозначая реакции через A, H, M_A и C, составляем уравнения статики:

$$H=P,\quad A+C=0,\quad Pa-Ca-M_A=0.$$

Лишних неизвестных одна; пусть это будет реакция C. Основная система с нагрузкой силой P и лишней неизвестной показана на фиг. 368, *б*.

Применим теорему Кастильяно. В уравнении совместности деформаций

$$f_C=\frac{\partial U}{\partial C}=0;$$

потенциальная энергия U является суммой величин энергии для первого участка CB и второго BA. Уравнение $f_C=0$ принимает вид:

$$\frac{1}{EJ}\int_0^a M_1\frac{\partial M_1}{\partial C}dx+\frac{1}{EJ}\int_0^a M_2\frac{\partial M_2}{\partial C}dx=0.$$

Вычисляем моменты и их производные:

$$M_1=+Cx_1,\quad \frac{\partial M_1}{\partial C}=x_1,\quad M_2=+Ca-Px_2;\quad \frac{\partial M_2}{\partial C}=+a.$$

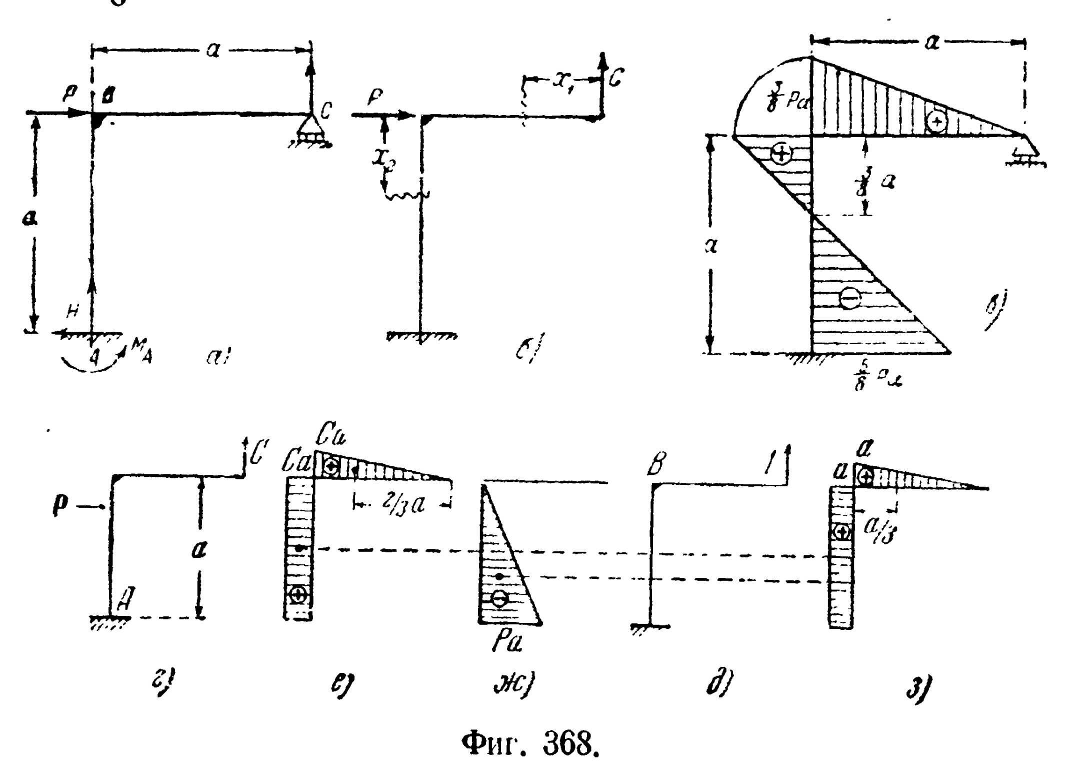
Подставляя в уравнение совместности

$$\int_0^a Cx_1^2\,dx+\int_0^a(Ca-Px_2)\,a\,dx=0$$

и вычисляя интегралы, получаем:

$$\frac{Ca^3}{3}+Ca^3-\frac{Pa^3}{2}=0,\quad C=\frac{3}{8}P.$$

Изгибающие моменты будут: на первом участке $M_1=\frac{3}{8}Px_1$; на втором участке $M_2=\frac{3}{8}Pa-Px_2$. Эпюра моментов показана на фиг. 368, *в*.



Фиг. 368.

При решении того же примера способом Верещагина изображаем два состояния нагрузки: заданными силами и опорной реакцией C (фиг. 368, *г*) и единичной силой, действующей по направлению реакции C (фиг. 368, *д*); строим эпюры M и M^0. Площади эпюр M первого состояния загружения (фиг. 368, *е* и *ж*):

$$\omega_1=+\frac{1}{2}Ca\cdot a=+\frac{Ca^2}{2},$$

$$\omega_2'=+Ca\cdot a=+Ca^2 \quad\text{и}\quad \omega_2''=-\frac{1}{2}Pa\cdot a=-\frac{Pa^2}{2}.$$

Ординаты единичных эпюр, соответствующие центрам тяжести эпюр первого состояния загружения (фиг. 368, *з*):

$$M^0_{C_1}=+\frac{2}{3}a;\quad M^{0\prime}_{C_2}=+a;\quad M^{0\prime\prime}_{C_2}=+a.$$

Условие совместности деформаций (по сокращении EJ):

$$\frac{Ca^2}{2}\cdot\frac{2}{3}a+Ca^2\cdot a-\frac{Pa^2}{2}\cdot a=0,$$

откуда $C=\frac{3}{8}P$, как и в решении, показанном выше.

§ 142. Определение деформаций статически неопределимых балок.

После того, как определены опорные реакции, построены эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, подобраны сечения статически неопределимой балки, определение её деформаций ничем не отличается от таких же вычислений для статически определимой балки.

Необходимо лишь отметить, что в этом случае мы будем иметь *избыточное* число уравнений для определения постоянных интегрирования. Этот избыток равен числу лишних неизвестных. Избыточные уравнения при правильно найденных реакциях обратятся в тождества, ибо они уже и были использованы при нахождении лишних неизвестных. Так, для балки, изображённой на фиг. 356, получим следующее дифференциальное уравнение изогнутой оси:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = Bx - \frac{qx^2}{2}.$$

Интегрируем:

$$EJ\frac{dy}{dx} = B\frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C, \tag{a}$$

$$EJy = B\frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + Cx + D. \tag{b}$$

Постоянных интегрирования две, условий же для их определения можно написать три, а именно:

в точке A при $x = l$ прогиб $y = 0$ и угол поворота $\frac{dy}{dx} = 0$;

» » B » $x = 0$ » $y = 0$.

Третье из этих уравнений обратится в тождество, ибо оно уже было нами использовано при составлении дополнительного уравнения, из которого мы нашли для B значение $\frac{3}{8}ql$. Заметим, что мы могли бы использовать уравнение изогнутой оси балки для нахождения лишней неизвестной. Приняв за лишнюю неизвестную реакцию B, составим и проинтегрируем дифференциальное уравнение изогнутой оси; получим формулы (a) и (b). Используя граничные условия в точках A и B, получим три уравнения, из которых найдём реакцию B и постоянные интегрирования C и D.

При применении графо-аналитического метода к вычислению деформаций статически неопределимых балок мы получим для фиктивной балки *недостаточное* число опор; это обстоятельство соответствует *избыточному* числу уравнений для определения постоянных интегрирования при аналитическом методе. Так, в примере 96 (фиг. 366) мы получим фиктивную балку, изображённую на фиг. 369, *б*; конец A свободен, конец B опёрт шарнирно.

Фиг. 369.

Однако *эпюра нагрузки* фиктивной балки такова, что балка находится в равновесии. Можно проверить, что фиктивный момент в сечении B равен нулю; это обстоятельство служит контролем правильности вычислений.

Дальнейший ход определения прогибов остаётся прежним; найдём, например, прогиб f_C в сечении под грузом; фиктивный момент M_{fC} равен

моменту от треугольной нагрузки a_1cc_2, направленной вверх, и моменту от прямоугольной нагрузки $ac_1c_2a_1$, направленной вниз (фиг. 369, *б*); получаем:

$$M_{fC}=+\frac{1}{2}[M_C+M_A]\,a\,\frac{1}{3}\,a-M_Aa\,\frac{1}{2}\,a=\frac{a^2}{6}[M_C-2M_A],$$

$$M_C=+P\frac{ba^2}{2l^3}[2a+3b],\qquad M_A=-P\frac{ab}{2l^2}[a+2b],$$

$$M_{fC}=\frac{a^2}{6}\,\frac{Pab}{2l^2}\left[\frac{a}{l}(2a+3b)-2(a+2b)\right]=-\frac{Pa^3b^2}{12l^3}[3a+4b].$$

Прогиб в точке C равен

$$f_C=\frac{M_{fC}}{EJ}=-\frac{Pa^3b^2}{12l^3EJ}[3a+4b].$$

При $a=b=\frac{l}{2}$ прогиб

$$f_C=-\frac{7Pl^3}{768EJ};$$

если бы не было защемления левого конца, этот прогиб был бы в два с лишним раза больше: $f_C=-\frac{Pl^3}{48EJ}$.

§ 143. Расчёт неразрезных балок.

Очень важным с практической точки зрения типом статически неопределимых конструкций является *неразрезная балка*, проходящая, не прерываясь, над рядом промежуточных опор, с которыми она соединена шарнирно. Крайние опоры могут быть или шарнирными или защемлёнными. Сначала мы разберём случай шарнирных опор. Одна из опор неразрезной балки делается обычно шарнирно-неподвижной, прочие — шарнирно-подвижными. Нумерацию опор и

Фиг. 370.

пролётов будем вести от левой руки к правой, обозначая крайнюю левую опору номером 0 и крайний левый пролёт номером 1. Длины пролётов будем обозначать буквой l с соответствующим номеру пролёта значком. Сечения балки во всех пролётах будем считать одинаковыми и, следовательно, жёсткость балки EJ — постоянной.

На фиг. 370 изображена неразрезная балка, указаны принятые обозначения и изображены возможные реакции опор. Как легко видеть, число лишних опорных реакций равно числу промежуточных опор.

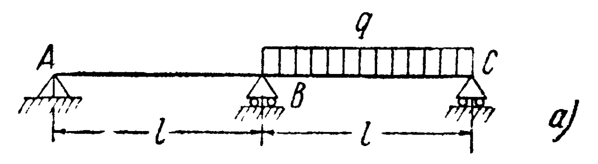
Применяя описанный выше приём решения задачи, следовало бы взять за дополнительные неизвестные реакции промежуточных опор,

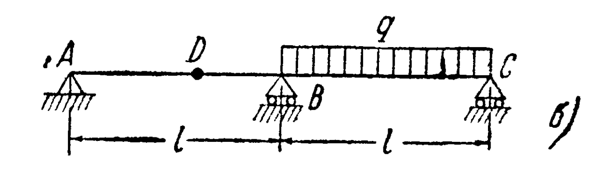
а за основную систему — балку, шарнирно-опёртую в точках 0 и $n+2$. Дополнительными уравнениями служили бы условия равенства нулю прогибов в точках основной системы, соответствующих промежуточным опорам; в этом случае все неизвестные входили бы во все уравнения. Однако более простым и распространённым является другой способ, связанный с иным видом основной системы и дополнительных неизвестных; при этом способе в каждое из уравнений входит не больше трёх неизвестных.

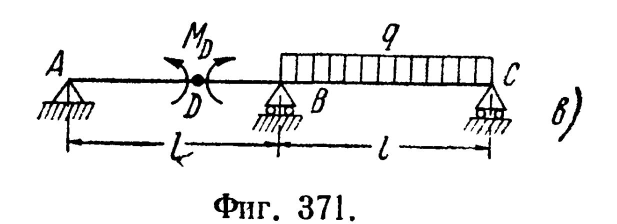
Операции выбора лишней неизвестной и основной системы неразрывно связаны друг с другом; основная статически определимая система получается из статически неопределимой путём отбрасывания опорных закреплений, вызывающих опорные реакции, принятые за лишние.

Можно поступить иначе: превратить каким-либо способом рассматриваемую статически неопределимую конструкцию в статически определимую, а затем посмотреть, какие усилия или реакции пришлось бы при этом отбросить. Эти величины и будут лишними неизвестными в нашей статически неопределимой системе.

Так, в двухпролётной неразрезной балке (фиг. 371, *а*) можно принять за лишнюю неизвестную хотя бы реакцию средней опоры B; тогда основной системой будет балка на двух опорах A и C; но можно превратить рассматриваемую балку в статически определимую путём устройства дополнительного шарнира в точке D (фиг. 371, *б*). Тогда получится основная система, состоящая из консольной балки CBD и подвесной AD. Постановка шарнира в сечении D требует, чтобы изгибающий момент, а значит, и вызываемые им нормальные напряжения в этом сечении были равны нулю. Таким образом, при переходе к основной системе мы отбросили эти нормальные напряжения в сечении D, передающиеся от левой части на правую, и наоборот; они суммируются в пары сил, равные изгибающему моменту в сечении D; эти пары, вновь приложенные к основной системе, показаны на фиг. 371, *в*.







Фиг. 371.

Превращая нашу балку в статически определимую путём введения шарнира D, мы за лишнюю неизвестную выбираем не внешнюю силу — одну из опорных реакций, а величину изгибающего момента в этом сечении.

Положение сечения D может быть взято произвольно; вычисления получаются наиболее простыми, если совместить точку D

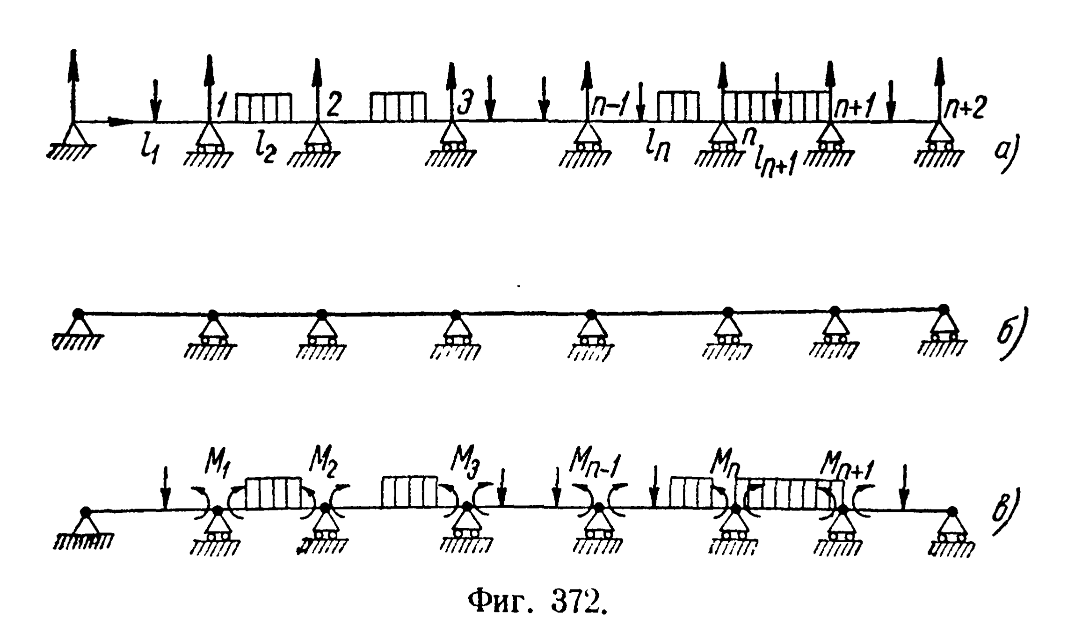
с опорным сечением над промежуточной опорой — точкой B, т. е. взять за лишнюю неизвестную *опорный момент* в сечении B. Тогда основная система будет представлять собой две простые балки, шарнирно-опёртые в точках A, B и C, имеющие общую опору в точке B.

Именно так и выбирают основную систему при расчёте неразрезных балок. За лишние неизвестные выбирают величины опорных изгибающих моментов M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n, M_{n+1} над всеми промежуточными опорами.

При таком выборе лишних неизвестных уравнения для их определения упрощаются и могут быть составлены в общем виде при помощи *теоремы о трёх моментах.*

§ 144. Теорема о трёх моментах.

Для вывода теоремы о трёх моментах возьмём неразрезную балку с рядом пролётов различной длины l_1 и l_2 и т. д. и с какими угодно вертикальными нагрузками (фиг. 372, *а*). Сначала изобразим все реакции, которые могут быть в данном случае; из условий равновесия ясно, что горизонтальная реакция $H_0 = 0$.



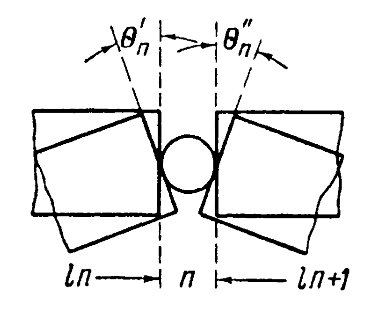
Фиг. 372.

Для того чтобы получить основную систему (фиг. 372, *б*), расположим в опорных сечениях шарниры. Добавочными неизвестными окажутся опорные моменты над промежуточными опорами M_1, M_2, M_3, ... и т. д. Моменты над крайними опорами равны нулю. Загрузим основную систему внешними нагрузками и опорными моментами (фиг. 372, *в*). Так как направление опорных моментов нам неизвестно, то примем их положительными. При решении знак результата покажет, правильно ли наше предположение.

Теперь необходимо составить условие, вносящее то же ограничение на деформации основной системы, которое имеется в неразрезной

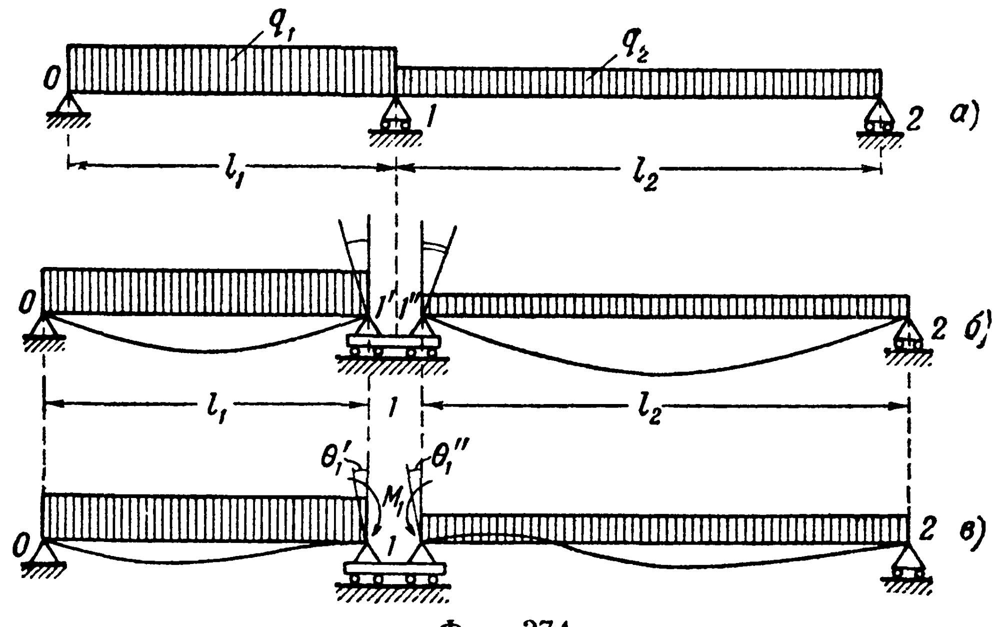
балке. В основной системе обе стороны n-го опорного сечения, разделённые поставленным в балку шарниром (фиг. 373), могут поворачиваться под нагрузкой независимо одна от другой. Угол поворота сечения на опоре n левого примыкающего к данной опоре пролёта обозначим θ'_n, а угол поворота сечения на опоре n для правого примыкающего пролёта назовём θ''_n. Эти *возможные* углы поворота опорных сечений смежных пролётов показаны на фиг. 373. В неразрезной балке оба опорных сечения *совпадают*, представляют собой лишь *разные стороны* одного и того же опорного сечения, поэтому в этом случае условием совместности деформаций будет:

$$\theta'_n - \theta''_n = 0. \qquad (23.15)$$



Фиг. 373.

Это и есть то ограничение, которое мы должны ввести для опорных сечений смежных балок над опорой n в нашей основной системе, загружённой внешними силами и опорными моментами. Такое условие мы можем составить для каждой из промежуточных опор, и, значит, написать столько добавочных уравнений, сколько мы имеем неизвестных опорных моментов.



Фиг. 374.

Поясним составление условия (23.15) примером. Возьмём двухпролётную неразрезную балку (фиг. 374, *а*), загружённую различными сплошными нагрузками в обоих пролётах q_1 и q_2.

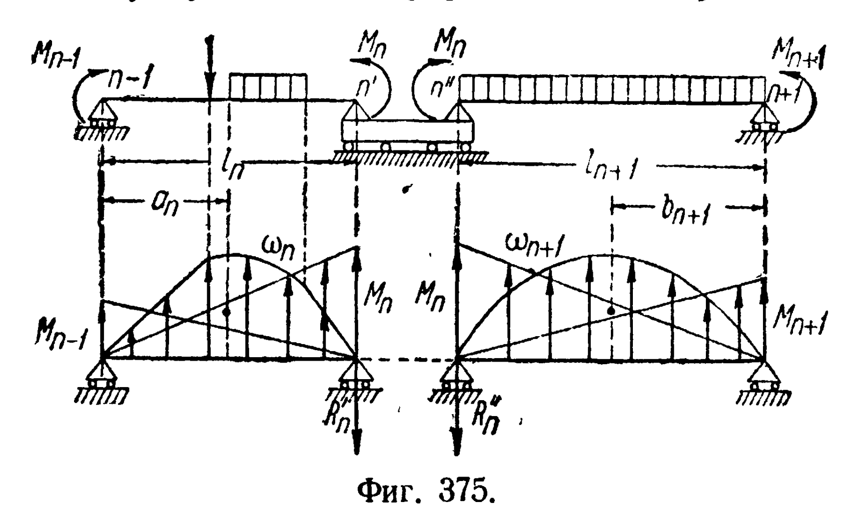
Основная система, нагружённая только внешней нагрузкой, показана на фиг. 374, *б*. Для ясности чертежа оба смежных пролёта представлены несколько раздвинутыми на опоре *1*; на самом деле шарниры *1′* и *1″* совпадают.

Обе стороны опорного сечения *1* повернутся, как показано на чертеже. В неразрезной балке деформации должны совпадать;

этого можно добиться, загружая основную систему отрицательным опорным моментом M_1 (фиг. 374, *в*) и подбирая его величину так, чтобы достигнуть этого совпадения; но отсюда и следует, что для указанного совпадения деформации основной системы должны удовлетворять условию (23.15):

$$\theta_1' - \theta_1'' = 0.$$

Следуя далее плану расчёта статически неопределимой балки по методу сравнения деформаций и возвращаясь к схеме фиг. 372, мы должны развернуть уравнение (23.15), вычислив величины деформаций, входящие в него.



Фиг. 375.

Углы поворота сечений *в основной системе* на опоре n зависят от деформаций только двух смежных пролётов l_n и l_{n+1}. Выделим эти два пролёта со всеми действующими на них нагрузками (фиг. 375). На пролёт l_n действуют внешние силы, расположенные на нём, и опорные моменты M_{n-1} и M_n; на пролёт l_{n+1} действуют помимо внешних нагрузок опорные моменты M_n и M_{n+1}. Для ясности чертежа оба смежных пролёта представлены несколько раздвинутыми на опоре n; на самом деле шарниры n' и n'' совпадают.

Для вычисления углов θ_n' и θ_n'' воспользуемся графо-аналитическим методом. Фиктивные балки, изображённые под чертежом рассматриваемых пролётов, представляют собой тоже балки шарнирно-опёртые. Фиктивной нагрузкой левого пролёта l_n служит:

а) эпюра изгибающего момента от внешних нагрузок с грузовой площадью ω_n и расстоянием центра тяжести этой площади от *левой* опоры a_n; так как эпюра положительна, то ставим на ординатах стрелки вверх; если ординаты этой эпюры будут отрицательными, то при вычислениях величину ω_n придётся вводить с минусом;

б) треугольная эпюра изгибающего момента от положительного опорного момента M_{n-1};

в) треугольная эпюра изгибающего момента от положительного опорного момента M_n.

На правую фиктивную балку пролёта l_{n+1} действуют нагрузки:

а) эпюра изгибающего момента от внешних сил с грузовой площадью ω_{n+1} и расстоянием центра тяжести от *правой* опоры b_{n+1};

б) треугольная эпюра изгибающего момента от положительного опорного момента M_n;

в) треугольная эпюра изгибающего момента от положительного опорного момента M_{n+1}.

Угол поворота опорного сечения n' левого пролёта равен делённой на жёсткость поперечной силе на этой опоре для соответствующей фиктивной балки:

$$\theta'_n = \frac{Q'_n}{EJ};$$

поперечная же сила в опорном сечении равна опорной реакции фиктивной балки R'_n.

Вычислим эту реакцию; грузовая площадь ω_n распределяется между опорами фиктивной балки по закону рычага, передавая на опору n' часть нагрузки, равную $\omega_n \frac{a_n}{l_n}$; треугольная нагрузка с наибольшей ординатой M_n передаёт на эту опору две трети своей величины, а треугольная нагрузка с ординатой M_{n-1} — одну треть. Таким образом,

$$R'_n = \omega_n \cdot \frac{a_n}{l_n} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} M_n l_n + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} M_{n-1} l_n =$$

$$= \omega_n \frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{3} M_n l_n + \frac{1}{6} M_{n-1} l_n.$$

Фиктивная поперечная сила Q'_n равна этой реакции со знаком $+$:

$$Q'_n = R'_n.$$

Угол поворота θ'_n равен

$$\theta'_n = \frac{Q'_n}{EJ} = \frac{1}{6EJ}\left[6\omega_n \frac{a_n}{l_n} + 2M_n l_n + M_{n-1} l_n\right].$$

Подобным же образом получаем для правого пролёта:

$$R''_n = \omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} + \frac{1}{3} M_n l_{n+1} + \frac{1}{6} M_{n+1} l_{n+1}.$$

Поперечная сила в этом случае равна опорной реакции со знаком минус:

$$Q''_n = -R''_n,$$

а угол поворота θ''_n равен:

$$\theta''_n = -\frac{1}{6EJ}\left[6\omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} + 2M_n l_{n+1} + M_{n+1} l_{n+1}\right].$$

Подставляя значения θ'_n и θ''_n в уравнение $\theta'_n - \theta''_n = 0$, сокращая на $6EJ$, получаем:

$$\left[6\omega_n \frac{a_n}{l_n} + 2M_n l_n + M_{n-1} l_n\right] +$$

$$+ \left[6\omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} + 2M_n l_{n+1} + M_{n+1} l_{n+1}\right] = 0,$$

или

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} =$$

$$= -6\left[\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}\right]. \quad (23.16)$$

Это и есть уравнение трёх моментов.

Таких уравнений мы можем написать столько, сколько имеем промежуточных опор, т. е. сколько имеем неизвестных опорных моментов. После вычисления опорных моментов задача сводится к расчёту ряда шарнирно-опёртых балок, нагружённых уже известными опорными моментами и внешней нагрузкой.

Уравнение (23.16) можно представить в более краткой форме, удобной для запоминания. Подставим в уравнение (23.15) вместо углов θ их выражения через Q', а затем и через R:

$$\theta'_B - \theta''_B = \frac{Q'_n}{EJ} - \frac{Q''_n}{EJ} = \frac{R'_n}{EJ} - \frac{-R''_n}{EJ} = 0,$$

или

$$R'_n + R''_n = 0. \tag{23.17}$$

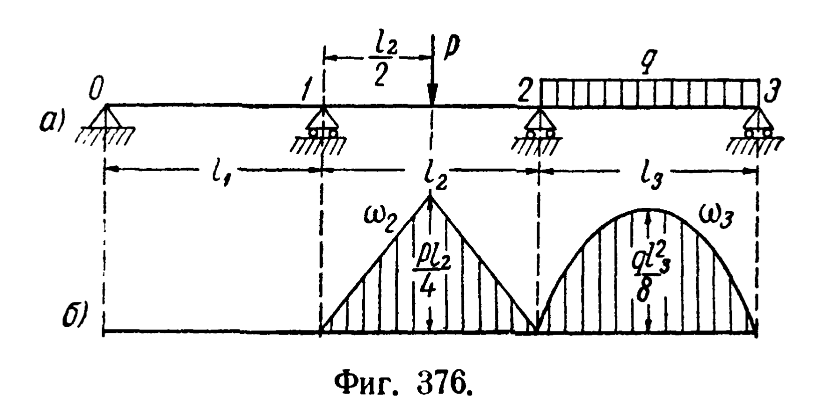
Величины R'_n и R''_n представляют собой реакции на опоре n левого и правого пролётов фиктивной балки; таким образом, теорема о трёх моментах кратко может быть сформулирована так: *сумма фиктивных реакций на каждой промежуточной опоре должна быть равна нулю.*

Представляют уравнение трёх моментов и в следующем виде:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6R_n^{\text{ф}}. \tag{23.18}$$

Под $R_n^{\text{ф}}$ подразумевается при этом *фиктивная опорная реакция* средней опоры (n) от эпюр $M(x)$ *заданной нагрузки* на обоих смежных пролётах.

Применим уравнение (23.16) к расчёту неразрезной трёхпролётной балки постоянного сечения, загружённой, как показано на фиг. 376. Перенумеруем опоры от левой руки к правой. Уравнение трёх моментов следует написать 2 раза: для опоры *1* и опоры *2*.



Фиг. 376.

Нам понадобятся площади эпюр изгибающих моментов от внешней нагрузки для основной системы. Эти эпюры построены на фиг. 376, *б*. Напишем уравнение трёх моментов для опоры *1*. Полагаем $n = 1$; тогда

$$M_{n-1} = M_0 = 0; \quad \omega_n = \omega_1 = 0;$$

$$\omega_{n+1} = \omega_2 = +\frac{1}{2}\frac{Pl_2}{4}l_2 = +\frac{Pl_2^2}{8}; \quad b_{n+1} = b_2 = \frac{l_2}{2}.$$

Уравнение имеет вид:

$$2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = -\frac{3}{8}Pl_2^2. \tag{23.19}$$

Переходим к опоре 2; полагаем $n=2$; тогда $M_{n+1}=M_3=0$;

$$\omega_n=\omega_2=+\frac{Pl_2^2}{8}; \quad \omega_{n+1}=\omega_3=+\frac{2}{3}l_3\cdot q\frac{l_3^2}{8}=+\frac{ql_3^3}{12};$$

$$a_n=a_2=\frac{l_2}{2}; \quad b_{n+1}=b_3=\frac{l_3}{2}.$$

Второе уравнение трёх моментов получает форму

$$M_1l_2+2M_2(l_2+l_3)=-\frac{3}{8}Pl_2^2-\frac{ql_3^3}{4}. \qquad (23.20)$$

Лишние неизвестные M_1 и M_2 определятся решением уравнений (23.19) и (23.20).

В частном случае, если принять $l_1=l_2=l_3=l$, эти два уравнения сведутся к следующим:

$$4M_1+M_2=-\frac{3}{8}Pl, \qquad (23.21)$$

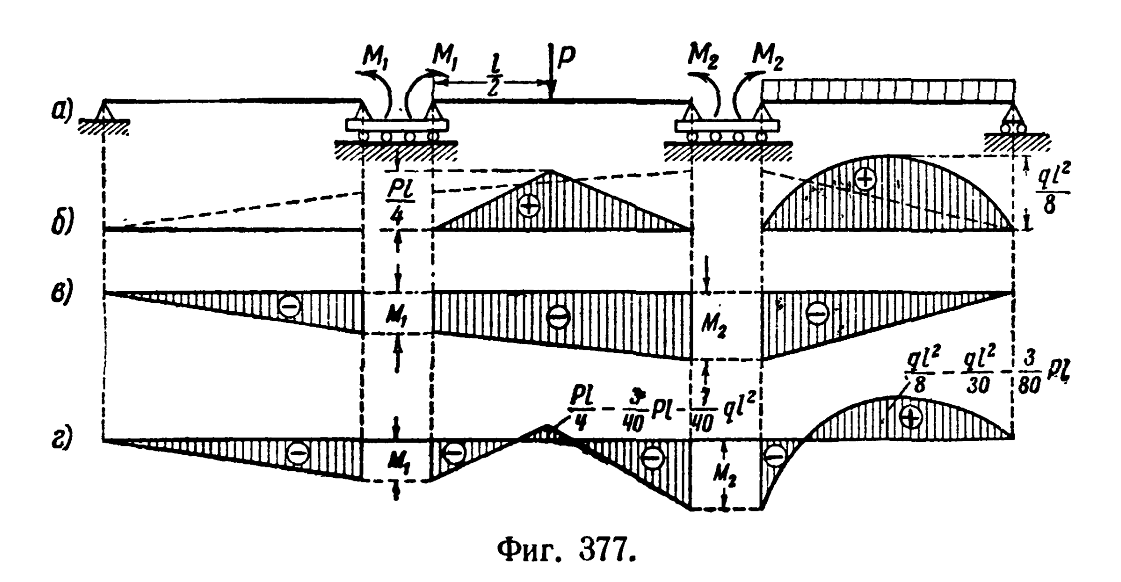
$$M_1+4M_2=-\frac{3}{8}Pl-\frac{ql^2}{4}. \qquad (23.22)$$

Решая их, получаем:

$$M_1=-\frac{3}{40}Pl+\frac{ql^2}{60}, \qquad (23.23)$$

$$M_2=-\frac{3}{40}Pl-\frac{ql^2}{15}. \qquad (23.24)$$

Зная величины опорных моментов, можно легко построить эпюру моментов для неразрезной балки, не делая дополнительных вычислений. Для этого вычерчиваем в основной системе эпюры изгибающего



Фиг. 377.

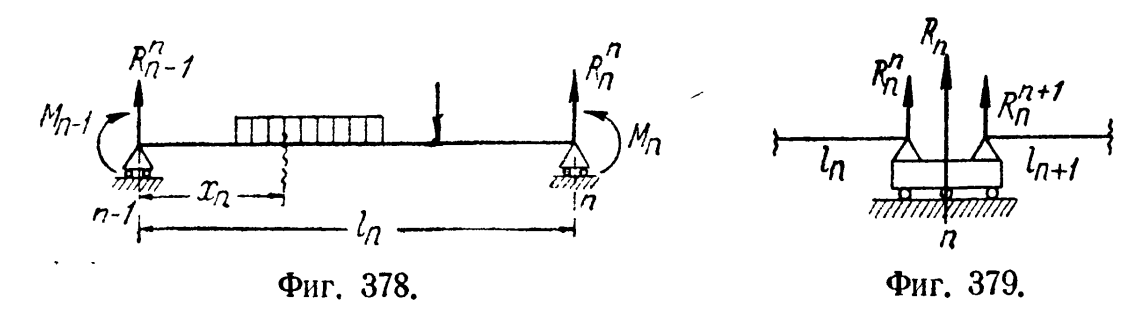
момента от заданной нагрузки (фиг. 377, *б*). Эпюры изгибающего момента от опорных моментов M_1 и M_2 (фиг. 377, *в*) наносятся пунктиром на фиг. 377, *б*; для сложения пограничных

ординат и ординат перелома эпюр следует все эпюры изображать в одном масштабе.

Суммарная эпюра с вычислением характерных ординат показана на фиг. 377, *г*. Всё построение можно производить и без раздвигания опорных сечений; в данном случае это было сделано лишь в целях большей наглядности.

§ 145. Вычисление опорных реакций и построение эпюр для неразрезных балок.

Возьмём n-й пролёт (фиг. 378); в основной системе он представляет собой шарнирно-опёртую балку, на которую действует какая-то внешняя нагрузка и уже известные опорные моменты M_{n-1} и M_n. Воспользуемся способом сложения действия сил; тогда опорные реакции n-го пролёта, левая R^n_{n-1} и правая R^n_n, будут содержать в себе по три слагаемых: первое, отражающее влияние внешней нагрузки, мы обозначим A^0_n и B^0_n; два других будут вызваны опорными моментами M_{n-1} и M_n.



Фиг. 378. Фиг. 379.

Индексы у буквы R (фиг. 378 и 379) означают: верхний — номер пролёта, нижний — номер опоры.

Каждая пара сил, приложенная к шарнирно-опёртой балке, вызывает равные и противоположно направленные реакции, равные моменту пары, делённому на пролёт. Считая опорные моменты M_{n-1} и M_n положительными, получим:

$$R^n_{n-1} = A^0_n - \frac{M_{n-1}}{l_n} + \frac{M_n}{l_n}, \tag{23.25}$$

$$R^n_n = B^0_n + \frac{M_{n-1}}{l_n} - \frac{M_n}{l_n}. \tag{23.26}$$

Эти формулы дают опорные реакции лишь одного пролёта; чтобы найти полные реакции каждой промежуточной опоры неразрезной балки, надо суммировать реакции смежных пролётов. Так, называя полные реакции буквой R с одним индексом внизу — номером опоры — получим для n-й опоры (фиг. 379):

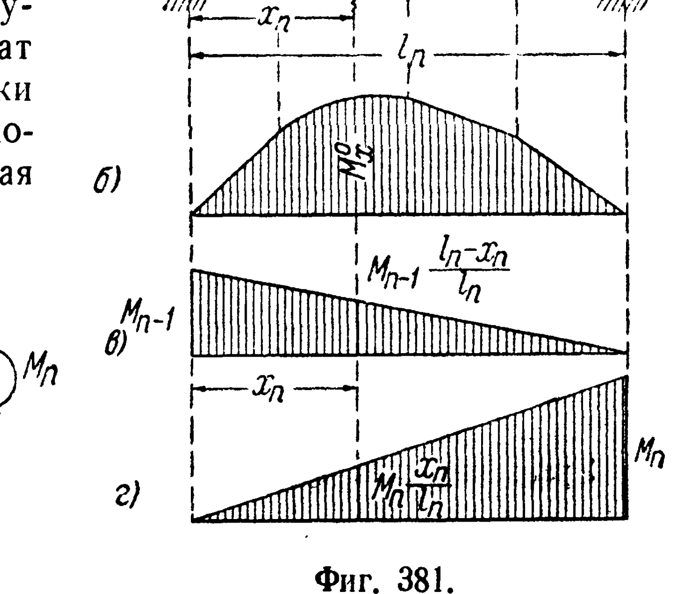
$$R_n = R^n_n + R^{n+1}_n. \tag{23.27}$$

Поперечная сила в любом сечении n-го пролёта неразрезной балки будет отличаться от поперечной силы $Q^0(x)$ простой балки только за счёт влияния реакций, вызванных опорными моментами; тогда (фиг. 380)

$$Q(x) = Q^0(x) - \frac{M_{n-1}}{l_n} + \frac{M_n}{l_n}. \qquad (23.28)$$

Заметим, что поперечные силы у опор n-го пролёта равны (с соответствующими знаками) опорным реакциям R^n_{n-1} и R^n_n (см. выше), как для всякой шарнирно-опёртой балки.

Ордината изгибающего момента в рассматриваемом сечении будет равна (фиг. 381) сумме ординат трёх эпюр: от внешней нагрузки (фиг. 381, *б*) и от опорных моментов (фиг. 381, *в* и *г*). Первая



Фиг. 380.

Фиг. 381.

нами обозначена $M^0(x)$ и вычисляется по обычным правилам, как для балки, опёртой по концам; ординаты же треугольных эпюр равны $M_n\frac{x_n}{l_n}$ и $M_{n-1}\frac{l_n - x_n}{l_n}$, тогда

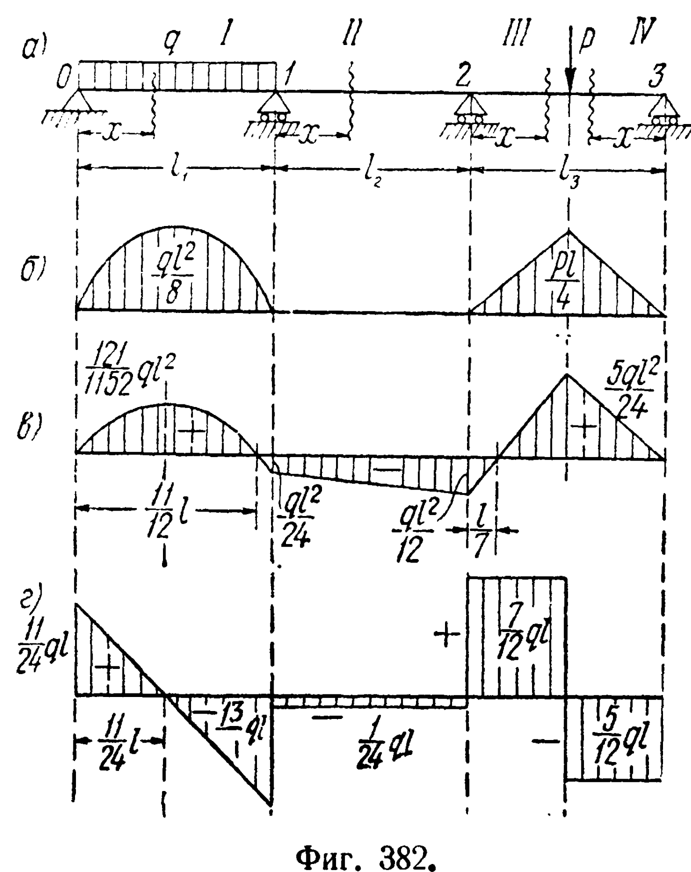
$$M(x) = M^0(x) + M_{n-1}\frac{l_n - x_n}{l_n} + M_n\frac{x_n}{l_n}. \qquad (23.29)$$

Формулы (23.25) — (23.29) полностью решают вопрос об определении реакций, поперечных сил и изгибающих моментов для неразрезных балок.

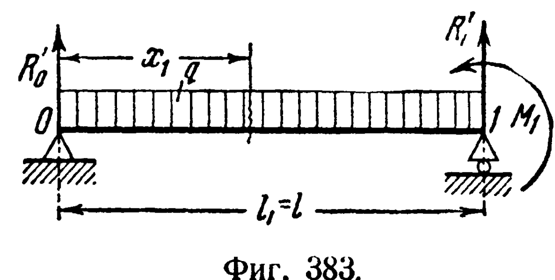
При вычислении опорных реакций, поперечных сил и изгибающих моментов для отдельно взятого пролёта балки вместо применения формул (23.28) и (23.29) можно (и это часто оказывается проще) пользоваться обычным способом вычисления $M(x)$ и $Q(x)$, применяемого для балок, свободно лежащих на двух опорах с известными уже нагрузками в пролёте и на опорах.

Пример 99. Определить опорные моменты, найти реакции опор и построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы для балки, изображённой на фиг. 382, *а*. Первый пролёт загружён равномерно распределённой нагрузкой q, а третий — сосредоточенной силой P посредине пролёта, причём P по числовой величине равно ql; пролёты балки одинаковы и равны l.

Эпюры изгибающего момента от внешней нагрузки для основной системы показаны на фиг. 382, *б*.



Фиг. 382.



Фиг. 383.

Уравнения трёх моментов имеют вид:

$$4M_1 + M_2 = -\frac{ql^2}{4}; \quad M_1 + 4M_2 = -\frac{3}{8}Pl = -\frac{3ql^2}{8}. \tag{23.30}$$

Отсюда

$$M_1 = -\frac{ql^2}{24} \quad \text{и} \quad M_2 = -\frac{ql^2}{12}. \tag{23.31}$$

Рассматриваем далее отдельные балки. Сначала выделяем балку *0—1* с действующей на ней нагрузкой q и M_1.

Вычисляем реакции, как для простой балки:

$$R_0' = \frac{ql}{2} + \frac{M_1}{l} = \frac{ql}{2} - \frac{ql}{24} = \frac{11}{24}ql;$$

$$R_1' = \frac{ql}{2} - \frac{M_1}{l} = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{24} = \frac{13}{24}ql.$$

Поперечная сила в сечении с абсциссой x_1 (фиг. 383) равна:

$$Q(x)_1 = R_0' - qx_1 = \frac{11}{24}ql - qx_1.$$

Изгибающий момент в том же сечении

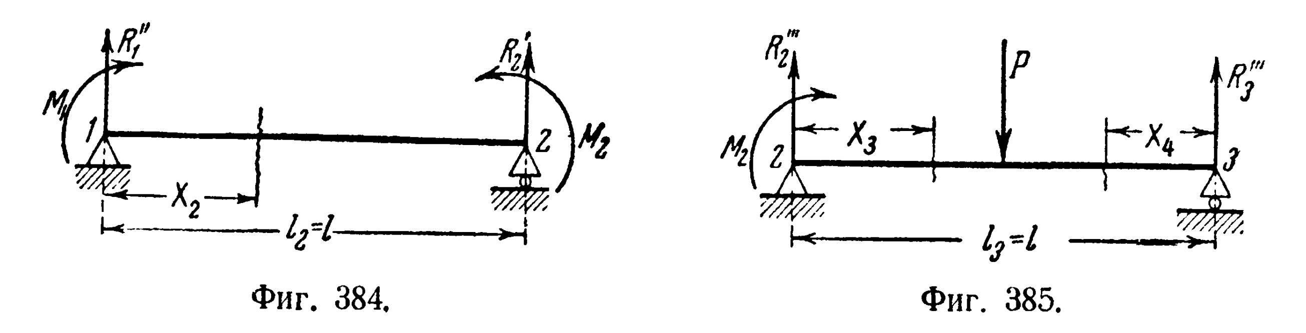
$$M(x)_1 = R_0'x_1 - \frac{qx_1^2}{2} = \frac{11}{24}qlx_1 - \frac{qx_1^2}{2}.$$

Выделяем второй пролёт в виде отдельной балки 1—2 (фиг. 384); он загружён только опорными моментами M_1 и M_2. Повторяем весь ход вычислений:

$$R_1'' = -\frac{M_1}{l} + \frac{M_2}{l} = \frac{ql}{24} - \frac{ql}{12} = -\frac{ql}{24};$$

$$R_2'' = \frac{M_1}{l} - \frac{M_2}{l} = -\frac{ql}{24} + \frac{ql}{12} = \frac{ql}{24};$$

$$Q(x)_2 = R_1'' = -\frac{ql}{24}; \quad M(x)_2 = R_1''x_2 + M_1 = -\frac{qlx_2}{24} - \frac{ql^2}{24}.$$



Фиг. 384. Фиг. 385.

Последний третий пролёт 2—3 имеет два участка (фиг. 385),

$$R_2''' = \frac{P}{2} - \frac{M_2}{l} = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{12} = \frac{7}{12}ql;$$

$$R_3''' = \frac{P}{2} + \frac{M_2}{l} = \frac{ql}{2} - \frac{ql}{12} = \frac{5}{12}ql;$$

$$Q(x)_3 = R_2''' = \frac{7}{12}ql; \quad M(x)_3 = R_2'''x_3 + M_2 = \frac{7}{12}qlx_3 - \frac{ql^2}{12};$$

$$Q(x)_4 = -R_3''' = -\frac{5}{12}ql; \quad M(x)_4 = R_3'''x_4 = \frac{5}{12}qlx_4.$$

Полные опорные реакции определятся суммированием опорных реакций на каждой опоре, вычисленных выше раздельно:

$$R_0 = R_0' = \frac{11}{24}ql;$$

$$R_1 = R_1' + R_1'' = \frac{13}{24}ql - \frac{ql}{24} = \frac{ql}{2};$$

$$R_2 = R_2'' + R_2''' = \frac{ql}{24} + \frac{7}{12}ql = \frac{15}{24}ql;$$

$$R_3 = R_3''' = \frac{5}{12}ql.$$

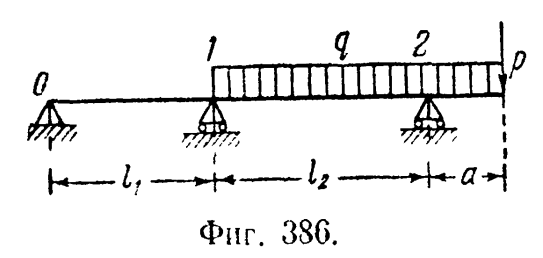
Сумма всех реакций равна заданной нагрузке: $P + ql = 2ql$.

Построенные по вычисленным данным эпюры изгибающего момента и поперечной силы показаны на фиг. 382, *в* и *г*. Наибольшими будут ордината M_{max} под грузом P, равная $\frac{5ql^2}{24}$, и максимальная ордината в первом пролёте, которая получится при $x = \frac{11}{24}l$, и будет равна $\frac{121}{1152}ql^2 \approx \frac{1}{10}ql^2$.

§ 146. Неразрезные балки с консолями. Балки с защемлёнными концами.

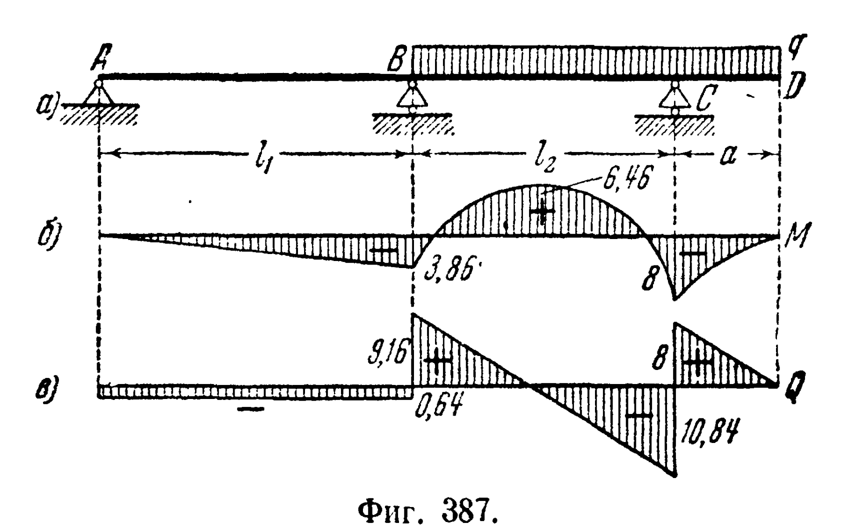
Теорему о трёх моментах легко распространить на те случаи, когда неразрезная балка имеет консоли или когда концы балки (один или оба) защемлены.

При наличии консоли длиной a (фиг. 386) в уравнении трёх моментов опорный момент M_2 следует считать известным и равным не нулю, а моменту в защемлении для консоли; т. е. в приведённом примере $M_2 = -Pa - \frac{qa^2}{2}$; не надо забывать о знаке этого момента. При вычислении реакций следует учесть влияние нагрузки, расположенной на консоли, т. е. рассматривать балку пролётом l_2 с консолью a.



Фиг. 386.

Для примера рассмотрим балку $ABCD$, нагружённую, как указано на фиг. 387, a; $l_1 = 6$ *м*; $l_2 = 5$ *м*; $a = 2$ *м*; $q = 4$ *т/м*.



Фиг. 387.

Для составления уравнения трёх моментов имеем:

$$M_{n-1} = M_0 = 0;\quad M_n = M_1 = ?;\quad M_{n+1} = M_2 = -\frac{qa^2}{2};\quad n = 1;$$

$$\omega_1 = 0;\quad \omega_2 = \frac{ql_2^3}{12}.$$

Уравнение имеет вид:

$$2M_1(l_1 + l_2) - \frac{qa^2}{2}\cdot l_2 = -6\frac{ql_2^3}{12}\cdot\frac{1}{2};$$

или

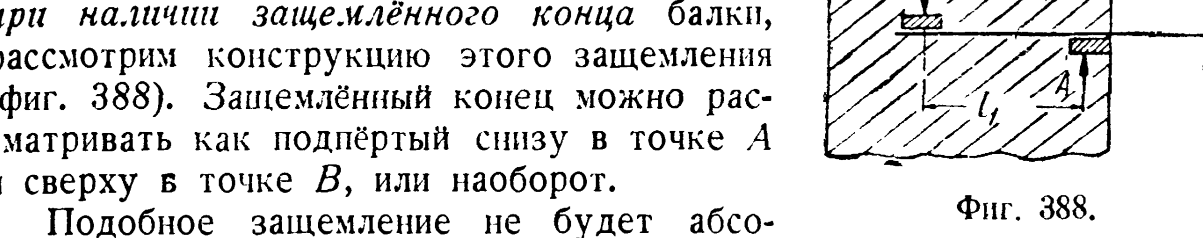
$$2M_1(l_1 + l_2) = \frac{qa^2 l_2}{2} - \frac{ql_2^3}{4};$$

откуда

$$M_1 = -3{,}86 \text{ тм}.$$

При определении реакций опор рекомендуется отдельно рассмотреть балку AB и отдельно балку с консолью BCD. Эпюры изгибающего момента и поперечной силы построены на фиг. 387, *б*, *в*.

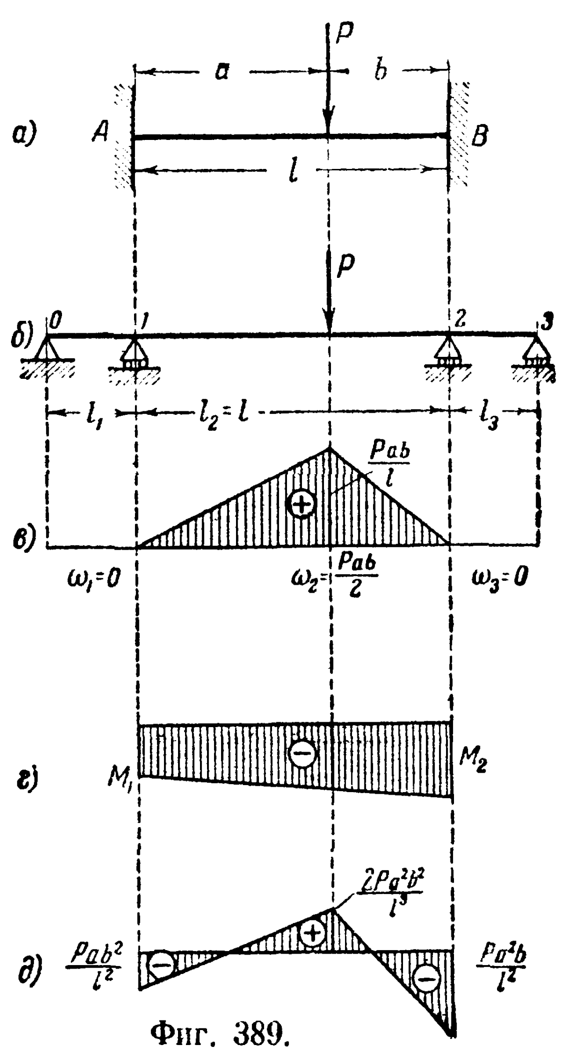
Чтобы выяснить, как следует поступить *при наличии защемлённого конца* балки, рассмотрим конструкцию этого защемления (фиг. 388). Защемлённый конец можно рассматривать как подпёртый снизу в точке A и сверху в точке B, или наоборот.



Фиг. 388.

Подобное защемление не будет абсолютно жёстким, ибо участок балки между точками A и B длиной l_1 имеет возможность несколько деформироваться, вследствие чего сечение балки, совпадающее с лицевой гранью стены, сможет поворачиваться. Чем короче будет участок l_1, чем больше его момент инерции и чем неподатливее стена, тем более жёстким будет защемление. Вполне защемлённый конец балки мы получим, полагая в пределе l_1 равным нулю (или $J_1=\infty$). При расчёте неразрезной балки с защемлённым концом необходимо вместо защемления добавить ещё пролёт, составить уравнения трёх моментов и перейти к пределу, полагая l_1 равным нулю (или $J_1=\infty$).

Рассмотрим балку с двумя защемлёнными концами, нагружённую силой P на расстояниях a и b от левой и правой опор (фиг. 389, *а*). Предполагается, что опоры A и B не препятствуют продольным деформациям балки. Вместо защемлённых концов добавляем слева и справа по пролёту и, таким образом, переходим к расчёту трёхпролётной неразрезной балки (фиг. 389, *б*).



Фиг. 389.

Данные к составлению уравнения трёх моментов для опоры *1*:

$$M_{n-1}=M_0=0;\quad \omega_n=\omega_1=0;\quad \omega_{n+1}\frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}=\frac{Pab}{6}\left(1+\frac{b}{l_2}\right).$$

Уравнение получает вид:

$$2M_1(l_1+l_2)+M_2l_2=-6\frac{Pab}{6}\left(1+\frac{b}{l_2}\right). \qquad (23.32)$$

Данные к уравнению трёх моментов для опоры 2 ($n=2$):

$$M_{n+1}=M_3=0;$$

$$\omega_n\frac{a_n}{l_n}=\frac{Pab}{6}\left(1+\frac{a}{l_2}\right);\quad \omega_{n+1}=\omega_3=0.$$

Тогда

$$M_1l_2+2M_2(l_2+l_3)=-6\frac{Pab}{6}\left(1+\frac{a}{l_2}\right). \qquad (23.33)$$

Теперь в уравнениях трёх моментов (23.32) и (23.33) положим $l_1=l_3=0$, а $l_2=l$; тогда получаем систему

$$2M_1l+M_2l=-Pab\left(1+\frac{b}{l}\right),$$

$$M_1l+2M_2l=-Pab\left(1+\frac{a}{l}\right).$$

Решая эту систему, находим:

$$M_1=-\frac{Pab^2}{l^2};\quad M_2=-\frac{Pa^2b}{l^2}.$$

Момент под грузом M_P равен при $x=a$:

$$M_P=P\frac{ab}{l}+\frac{M_1b}{l}+\frac{M_2a}{l}=\frac{2Pa^2b^2}{l^3}.$$

При действии на балку с защемлёнными концами равномерно распределённой нагрузки q (фиг. 390, *а*) опорные моменты M_1 и M_2 равны; заменяя защемление добавочным пролётом, составляем уравнение трёх моментов для опоры 1:

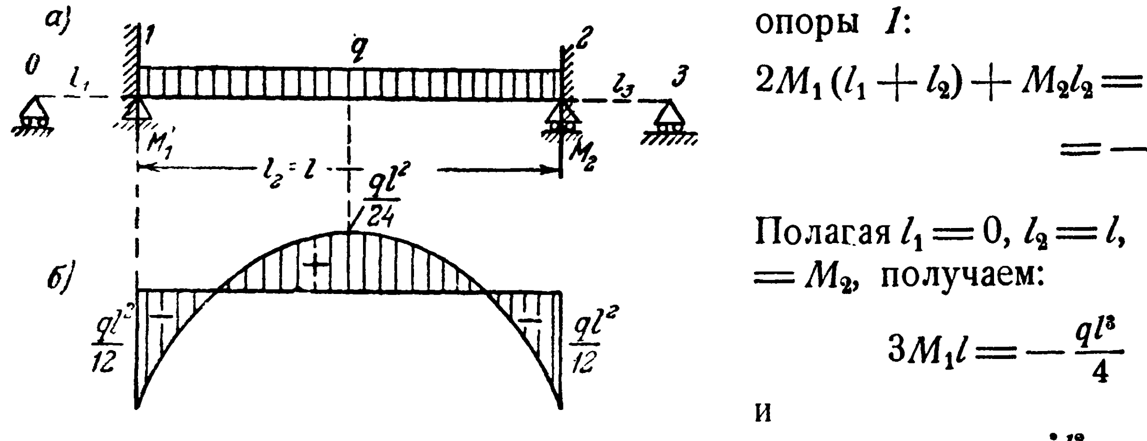
$$2M_1(l_1+l_2)+M_2l_2=-6\frac{ql_2^3}{24}.$$

Полагая $l_1=0$, $l_2=l$, $M_1=M_2$, получаем:

$$3M_1l=-\frac{ql^3}{4}$$

и

$$M_1=-\frac{ql^2}{12}.$$



Фиг. 390.

Наибольший положительный изгибающий момент будет посредине пролёта; он равен

$$M_{\frac{l}{2}}=\frac{ql^2}{8}-\frac{ql^2}{12}=+\frac{ql^2}{24}.$$

Эпюра моментов показана на фиг. 390, *б*.

§ 147. Примеры расчёта неразрезных балок.

Пример 100. Рассмотрим балку (фиг. 391, *а*). Единственной лишней неизвестной будет опорный момент M_1. Эпюрой от внешней нагрузки для основной системы будет парабола на протяжении второго пролёта с наибольшей ординатой $q\frac{l^2}{8}$. Уравнение трёх моментов имеет вид

$$2M_1\cdot 2l=-6\frac{ql^3}{24},\quad M_1=-\frac{ql^2}{16}.$$

Реакции опор равны:

$$R_0=-\frac{ql^2}{16l}=-\frac{ql}{16},\quad R_2=\frac{ql}{2}-\frac{ql^2}{16l}=+\frac{7}{16}ql,\quad R_1=\frac{5}{8}ql.$$

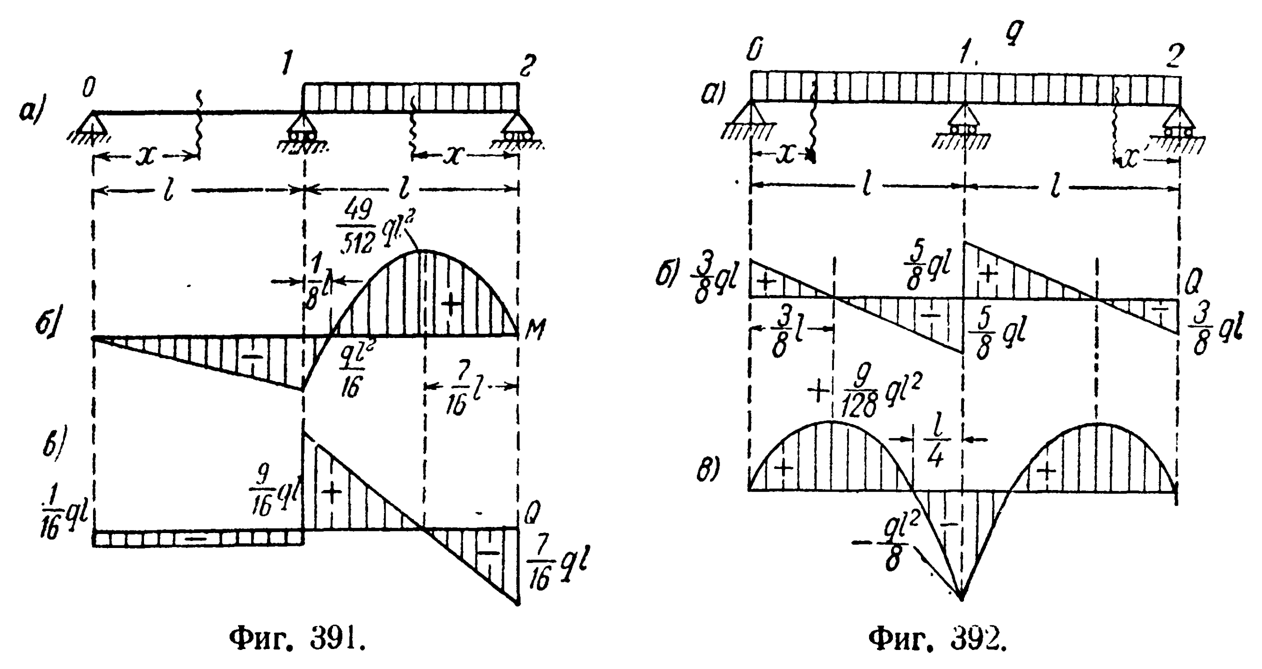
Вычисляем поперечные силы и изгибающие моменты:

$$Q(x)_1=+R_0=-\frac{ql}{16},\quad M(x)_1=+R_0x=-\frac{ql}{16}x;$$

$$Q(x)_2=-R_2+qx=-\frac{q}{16}(7l-16x),$$

$$M(x)_2=R_2x-\frac{qx^2}{2}=\frac{qx}{16}(7l-8x).$$

Изгибающий момент во втором пролёте обращается в нуль при $x=\frac{7}{8}l$ и пе-



Фиг. 391. Фиг. 392.

реходит через максимум при $x=\frac{7}{16}l$; максимальное значение момента равно

$$M_{\max}=+\frac{49ql^2}{512}.$$

Эпюры момента и поперечной силы показаны на фиг. 391, *б* и *в*.

Пример 101. Возьмём балку с нагрузкой q на обоих пролётах (фиг. 392, *а*).

Выдерживая тот же порядок вычислений, получим:

$$2M_1\cdot 2l=-6\frac{ql^3}{12};\quad M_1=-\frac{ql^2}{8};$$

естественно, что против предыдущего примера момент удвоился. Опорные реакции имеют значения:

$$R'_0 = \frac{ql}{2} - \frac{ql^2}{8l} = \frac{3}{8}ql = R''_2,$$

$$R_1 = R'_1 + R''_1 = \frac{10}{8}ql.$$

Поперечные силы и изгибающие моменты для левого пролёта выразятся формулами:

$$Q(x)_1 = R'_0 - qx = \frac{3}{8}ql - qx;$$

$$M(x)_1 = R'_0 x - \frac{qx^2}{2} = \frac{3}{8}qlx - \frac{qx^2}{2}.$$

Для правого пролёта решение аналогично.

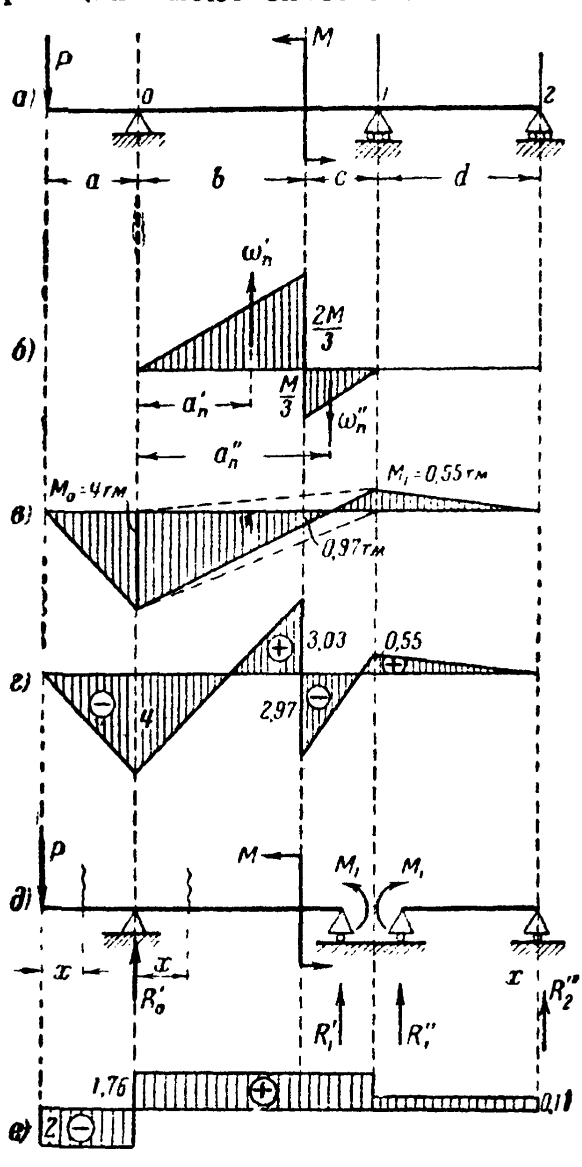
При $x = 3l/8$, т. е. при $Q(x) = 0$, моменты будут иметь наибольшее положительное значение:

$$M_{\max} = \frac{9}{128}ql^2 \cong \frac{1}{14}ql^2,$$

т. е. наибольшим по абсолютной величине будет изгибающий момент над опорой M_1. Эпюры показаны на фиг. 392, *б* и *в*.

Пример 102. Двухпролётная с консолью на левом конце балка загружена силой P на конце консоли и моментом M в двух третях первого пролёта (фиг. 393, *а*). Построить эпюры $M(x)$ и $Q(x)$. Числовые значения такие:

$$P = 2\ т;\quad M = 6\ тм;\quad a = 2\ м;$$
$$b = 4\ м;\quad c = 2\ м;\quad d = 5\ м.$$



Фиг. 393.

Составляем уравнение трёх моментов, пользуясь фигурой 393, *б*:

$$M_0(b+c) + 2M_1(b+c+d) = -6\left(\frac{\omega'_n a'_n}{l_n} - \frac{\omega''_n a''_n}{l_n}\right),$$

или

$$-Pa(b+c) + 2M_1(b+c+d) =$$
$$= -6\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}M\cdot b\frac{2}{3}\frac{b}{b+c} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}M\cdot c\frac{b+\frac{c}{3}}{b+c}\right).$$

Подставляя числовые значения

$$-2\cdot 2\cdot 6 + 2M_1(6+5) = -6\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot 2\frac{4+\frac{2}{3}}{4+2}\right),$$

и, решая, получаем

$$M_1 = 0{,}545\ тм \cong 0{,}55\ тм.$$

Эпюра опорных моментов показана на фиг. 393, *в*. Ордината *этой* эпюры под сечением, где приложен момент M, равна $-\frac{1}{3}M_0+\frac{2}{3}M_1=-0{,}97$ *тм*.

Складывая ординаты эпюр изгибающего момента от M (фиг. 393, *б*) и от совместного действия P и M_1 (фиг. 393, *в*), получаем суммарную эпюру изгибающего момента (фиг. 393, *г*). В сечении, где приложен заданный момент M, ординаты эпюры: положительная $\frac{2}{3}M-0{,}97=3{,}03$ *тм* и отрицательная $\frac{1}{3}M+0{,}97=2{,}97$ *тм*.

Опорные реакции находим, рассматривая схему фиг. 393, *д*:

$$R_0'=P\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{M_1+M}{b+c}=3{,}76\ т,\quad R_1'=-P\frac{a}{b+c}-\frac{M_1+M}{b+c}=-1{,}76\ т,$$

$$R_1''=-\frac{M_1}{d}=-0{,}11\ т;\quad R_2''=+\frac{M_1}{d}=0{,}11\ т.$$

Полные реакции равны:

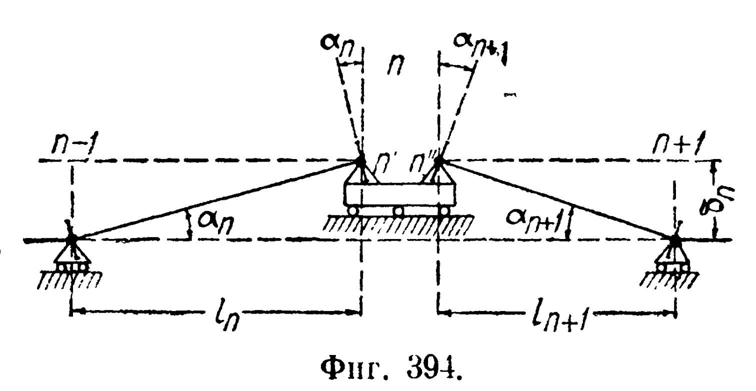
$$R_0=3{,}76\ т;\quad R_1=-1{,}87\ т;\quad R_2=0{,}11\ т.$$

Эпюра поперечной силы на фиг. 393, *е*.

§ 148. Влияние неточного расположения опор по высоте.

Изложенный выше метод расчёта неразрезных балок предполагает, что все опоры расположены на одном уровне. Практически при установке балки нельзя добиться совершенно точного выполнения этого требования; часть опор может оказаться несколько выше, часть — ниже проектного уровня.

Иногда расположение опор в разных уровнях может явиться следствием неодинаковой осадки опор. Иногда такое расположение может оказаться выгодным, и его делают умышленно. В статически определимой балке, например, в балке на двух опорах или с шарнирами в пролёте, такие неточности сборки не вызовут сколько-нибудь существенного изменения напряжений; в неразрезной же балке, как статически неопределимой системе, можно ожидать возникновения довольно значительных *начальных* напряжений от неточности расположения опор или от их неравномерной осадки.



Фиг. 394.

Выясним, как отразится осадка или повышение одной из опор, например n-й, на моментах и напряжениях в балке. Величину смещения n-й опоры будем обозначать δ_n. На фиг. 394 изображено влияние повышения n-й опоры на деформации основной системы в n-м и $(n+1)$-м пролётах. На остальные пролёты *основной системы* влияние этого повышения не распространяется.

Как видно из чертежа, повышение n-й опоры вызывает в основной системе над n-й опорой такие же углы поворота α, какие появились бы при изгибе этих пролётов положительными изгибающими моментами с площадями

эпюр ω_n и ω_{n+1}. Углы поворота опорных сечений (§ 144) от действия таких внешних нагрузок выражались формулами

$$\alpha_n = \frac{1}{EJ}\,\omega_n \frac{a_n}{l_n}$$

и

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{EJ}\,\omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

Так как углы поворота опорных сечений вызываются *повышением* n-й опоры, то, составляя уравнение трёх моментов для этой опоры, мы должны вместо слагаемого $\omega_n \frac{a_n}{l_n}$ поставить $\alpha_n EJ$ и вместо $\omega_{n+1} \frac{b_n}{l_n}$ величину $\alpha_{n+1} EJ$, т. е.

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6EJ(\alpha_n + \alpha_{n+1}).$$

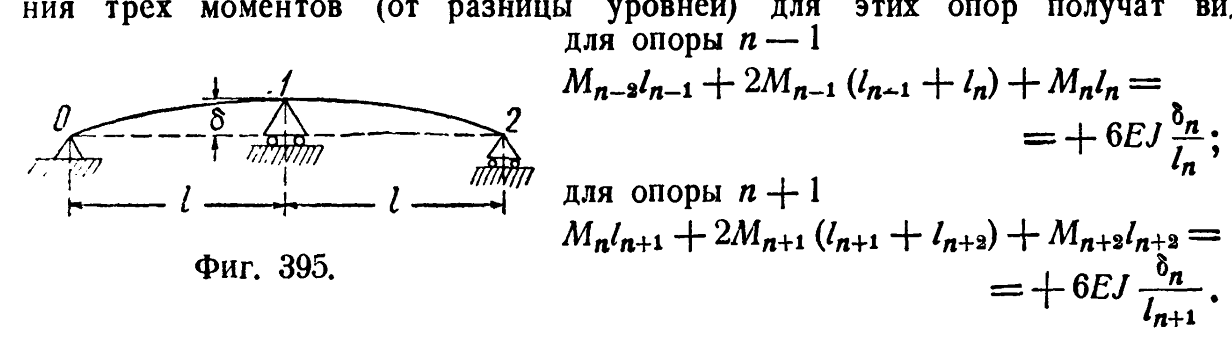
Тангенсы углов α_n и α_{n+1} по своей величине соответственно равны (фиг. 394)

$$\operatorname{tg}\alpha_n = \frac{\delta_n}{l_n} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha_{n+1} = \frac{\delta_n}{l_{n+1}};$$

вследствие малости этих величин принимаем тангенсы равными углам; тогда уравнение трёх моментов (23.16) для опоры n принимает вид

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6EJ\delta_n\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right).$$

Для смежных опор $n-1$ и $n+1$ мы будем иметь *понижение* δ_n этих опор по сравнению с опорой n; в соответствии с этим уравнения трёх моментов (от разницы уровней) для этих опор получат вид:



Фиг. 395.

для опоры $n-1$

$$M_{n-2}l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) + M_n l_n = +6EJ\frac{\delta_n}{l_n};$$

для опоры $n+1$

$$M_n l_{n+1} + 2M_{n+1}(l_{n+1} + l_{n+2}) + M_{n+2}l_{n+2} = +6EJ\frac{\delta_n}{l_{n+1}}.$$

Уравнения трёх моментов для остальных опор не будут зависеть от δ_n.

Определим опорные моменты от повышения δ средней опоры двухпролётной неразрезной балки (фиг. 395) постоянного сечения. Достаточно написать одно уравнение для опоры *1*:

$$2M_1 \cdot 2l = -6EJ\frac{2\delta}{l}.$$

Отсюда

$$M_1 = -\frac{3EJ\delta}{l^2};$$

наибольшее напряжение равно

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_1|}{W} = \frac{3EJ\delta}{l^2 W} = 3E\frac{\delta}{l}\frac{z_{\max}}{l}.$$

Ясно, что при *понижении* опоры *1* на δ опорный момент был бы равен $+\frac{3EJ\delta}{l^2}$. Так как в такой балке от внешней нагрузки опорный момент обычно бывает отрицательным, то искусственное понижение средней опоры могло бы снизить расчётную величину опорного момента и уравнять его с моментами в пролётах. Однако этот приём ещё не получил широкого распространения.

Величина дополнительного момента от разницы уровней опор пропорциональна жёсткости балки и может достигнуть большой величины. Так, для двухпролётной балки профиля № 60а с пролётами 6 *м* при повышении средней опоры по сравнению с крайними на 1/200 пролёта дополнительное напряжение

$$\sigma_{max} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^6}{200 \cdot 20} = 1500 \ кг/см^2.$$

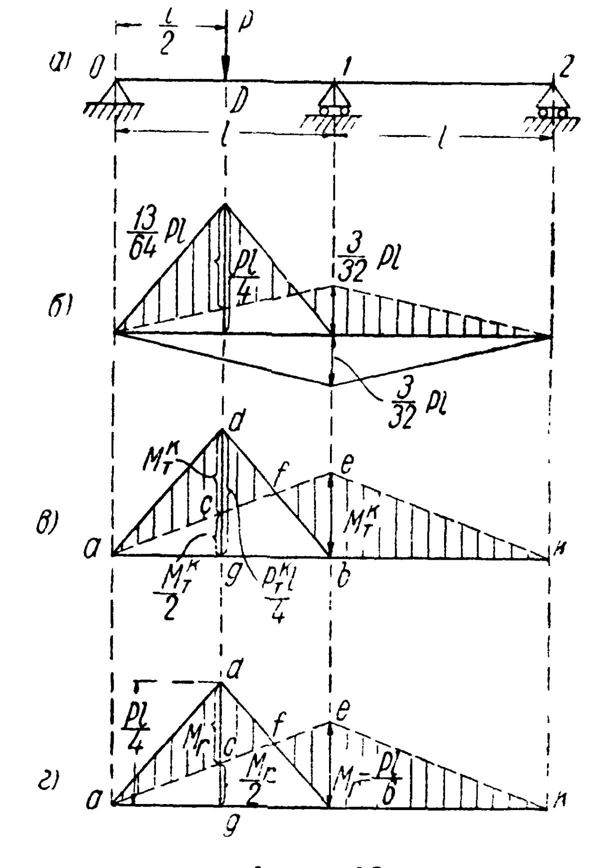
Таким образом, для неразрезных балок возможно более точное выполнение проектного расположения опор имеет очень большое значение.

ГЛАВА XXIV.

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАГРУЗКАМ.

§ 149. Общие понятия. Расчёт двухпролётной балки.

При расчёте по допускаемым напряжениям мы считаем опасным то состояние балки, когда наибольшие нормальные напряжения в наиболее напряжённом сечении дойдут до предела текучести $\sigma_{max} = \sigma_т$. Однако даже для статически определимой балки это состояние не будет соответствовать исчерпанию грузоподъёмности балки; необходимо, чтобы в опасном сечении образовался «пластический шарнир», передающий изгибающий момент $M_т^к = 2\sigma_т S_{max} = W n \sigma_т$. В этом случае при статически определимой балке дальнейшая деформация будет происходить без повышения нагрузки (§ 97).



Фиг. 396.

В статически неопределимой балке образования одного пластического шарнира недостаточно для исчерпания грузоподъёмности балки; для этого необходимо появление ещё по крайней мере одного пластического шарнира. Покажем это на примере.

Рассмотрим двухпролётную неразрезную балку постоянного сечения (фиг. 396, *а*); эпюра моментов для неё *при упругой работе* (фиг. 396, *б*) представляет собой разность эпюр от груза P и от опорного момента $M_1 = -\frac{3}{32} Pl$. Пунктиром показано графическое вычитание эпюр. Результирующая эпюра заштрихована. Наиболее

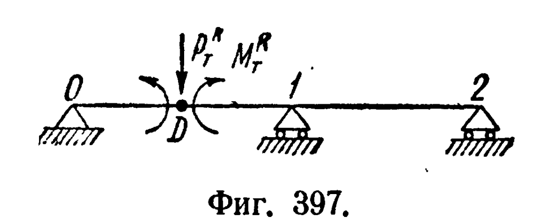
напряжёнными являются сечения под грузом с моментом $M_P = \frac{Pl}{4} - \frac{3}{64}Pl = \frac{13}{64}Pl$ и на средней опоре с моментом $M_1 = \left|\frac{3}{32}Pl\right| < \frac{13}{64}Pl$. При возрастании нагрузки напряжение дойдёт до предела текучести $\sigma_т$ прежде всего в крайних волокнах сечения под грузом при величине силы $P_т$, определяемой уравнением

$$\frac{13P_т l}{64W} = \sigma_т, \quad \text{откуда} \quad P_т = \frac{64W\sigma_т}{13l}.$$

При дальнейшем увеличении нагрузки в этом сечении образуется пластический «шарнир», когда изгибающий момент (§ 97) станет равным

$$M_т^к = 2\sigma_т S_{max} = \sigma_т n W.$$

Однако при такой нагрузке балка не утратит грузоподъёмности. Она обратится в статически определимую систему с шарниром в точке D, через который передаётся момент $M_т^к$ (фиг. 397); такая балка способна принять и дальнейшее увеличение нагрузки. При этом увеличении момент в сечении D останется постоянным, а момент над опорой будет увеличиваться, пока не дойдёт тоже до величины $M_т^к$; в опорном сечении образуется второй пластический шарнир, левый пролёт обратится в подвижную систему, и грузоподъёмность балки будет исчерпана при нагрузке $P_т^к$. Эпюра моментов для этого состояния балки показана на фиг. 396, *в* — это будет эпюра разрушающих моментов. Она представляет собой разность ординат треугольника adb с наибольшей ординатой под грузом $\frac{P_т^к l}{4}$ и ординат треугольника aek с ординатой на опоре $M_т^к$ и под грузом $\frac{M_т^к}{2}$. Величина разрушающего груза $P_т^к$ определяется из условия, что отрезок cd, равный $\frac{P_т^к l}{4} - \frac{M_т^к}{2}$, тоже должен быть равен $M_т^к$:



Фиг. 397.

$$\frac{P_т^к l}{4} - \frac{M_т^к}{2} = M_т^к.$$

Отсюда

$$M_т^к = \frac{P_т^к l}{6} = nW\sigma_т \quad \text{и} \quad P_т^к = \frac{6M_т^к}{l} = \frac{6nW\sigma_т}{l}. \qquad (24.1)$$

Условие прочности имеет вид (§ 27)

$$P \leqslant [P], \tag{24.2}$$

где P — заданная, а $[P]$ — допускаемая нагрузки.

Для получения $[P]$ делим обе части равенства (24.1) на коэффициент запаса k:

$$[P] = \frac{P_т^к}{k} = \frac{6M_т^к}{kl} = \frac{6nW\sigma_т}{kl} = \frac{6nW[\sigma]}{l}. \tag{24.3}$$

Подставляя это значение $[P]$ в (24.2), получаем

$$P \leqslant \frac{6nW[\sigma]}{l}.$$

Отсюда

$$W \geqslant \frac{Pl}{6n[\sigma]} = \frac{M_r}{n[\sigma]}, \tag{24.4}$$

где $M_r = \frac{Pl}{6}$ — расчётный изгибающий момент в сечениях 1 и D. Таким образом, подбор сечения балки в этом примере следует вести по расчётному моменту $M_r = \frac{Pl}{6}$ и по допускаемому напряжению $n[\sigma]$.

Как видно из формул для $M_r = \frac{Pl}{6}$ и $M_т^к = \frac{P_т^к l}{6}$, ординаты эпюры расчётных моментов (фиг. 396, *г*) пропорциональны ординатам эпюры разрушающих моментов и получаются из них заменой разрушающего груза $P_т^к$ действующей нагрузкой P.

Если вести расчёт по допускаемым напряжениям, то расчётный момент следовало бы взять (по фиг. 396, *б*) $M_{max} = \frac{13}{64}Pl > \frac{1}{6}Pl$, а за допускаемое напряжение — $[\sigma]$. Таким образом, для статически неопределимых балок переход на расчёт по допускаемым нагрузкам даёт двойную выгоду, — повышается, как и для статически определимых балок, допускаемое напряжение и *видоизменяется* расчётная эпюра изгибающего момента в сторону снижения её ординат.

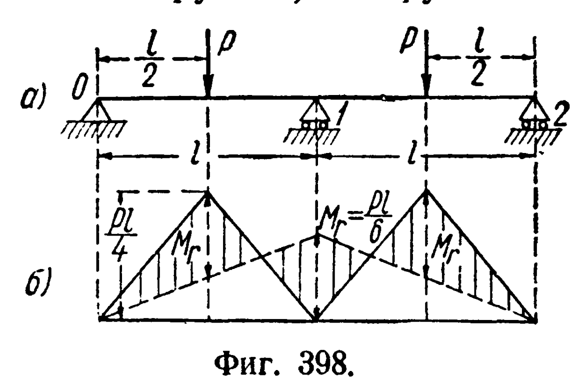
Полное повышение расчётной грузоподъёмности характеризуется отношением

$$\frac{P_т^к}{P_т} = \frac{6n\sigma_т W \cdot 13l}{l \cdot 64W\sigma_т} = \frac{78}{64}n.$$

Принимая $n = 1{,}15$ (для двутавровых балок, § 97), получаем, что *расчётная* грузоподъёмность балки возрастёт при переходе на новый метод расчёта в 1,4 раза, т. е. на 40%.

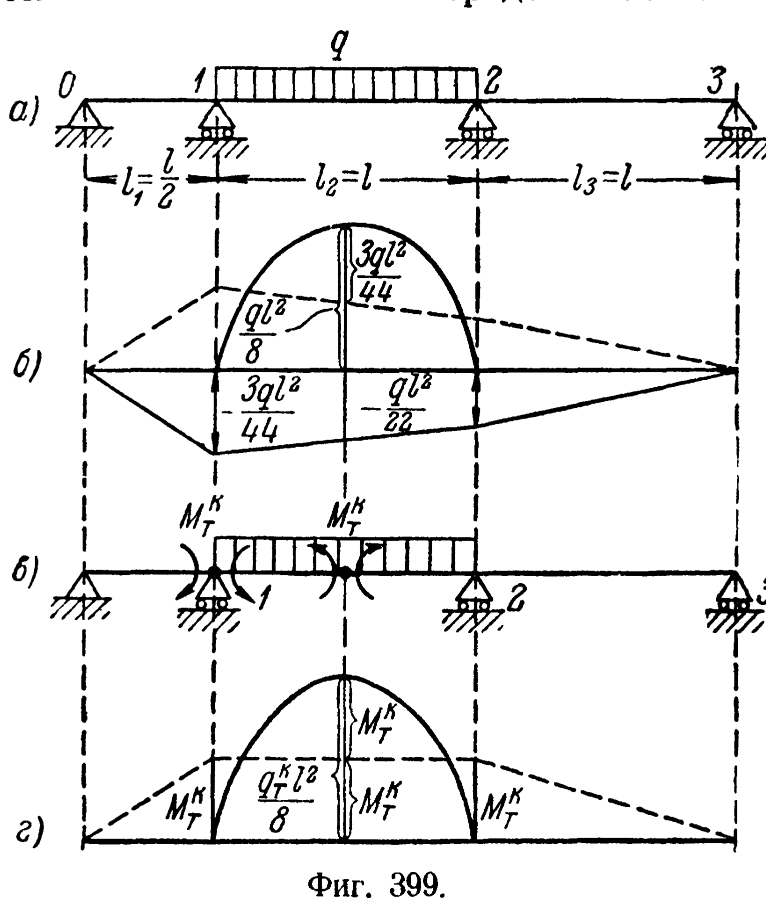
В рассмотренном примере расчётная эпюра моментов (фиг. 396, *в*) характеризовалась равенством изгибающих моментов в двух наиболее напряжённых сечениях. Поэтому этот способ расчёта при балке постоянного сечения иногда называют способом *уравнивания* моментов.

Имея это в виду, мы могли построить *расчётную* (по допускаемым нагрузкам) эпюру моментов графически: сначала изобразить эпюру от груза P для разрезной балки (Δadb), а затем построить линию опорных моментов aek так, чтобы $be = cd$; для этого разделим отрезок db пополам в точке f и проведём прямую afe.



Фиг. 398.

Если бы к рассмотренной балке был приложен ещё груз P посредине второго пролёта, то *расчётная* эпюра моментов (фиг. 398, *б*) не изменилась бы, т. е. добавление этого груза не потребовало бы усиления балки. Изменился бы лишь порядок появления пластических шарниров: сначала такой шарнир образовался бы в сечении над средней опорой, а уже потом — под обоими грузами.



Фиг. 399.

§ 150. Расчёт трёхпролётной балки.

Рассмотрим теперь балку, имеющую и средний промежуточный пролёт (фиг. 399, *а*). Эпюра моментов для этой балки при упругой работе изображена на фиг. 399, *б*. При постепенном возрастании нагрузки пластические шарниры образуются сначала над средней опорой *1* и посредине (приблизительно) среднего пролёта (фиг. 399, *в*); однако балка сможет и дальше воспринимать увеличение нагрузки, пока не образуется третий шарнир на опоре *2*. Выравненная эпюра разрушающих моментов показана на фиг. 399, *г*. Предельный момент равен

$$M_T^K = \frac{1}{2}\frac{q_T^K l^2}{8} = \frac{q_T^K l^2}{16},$$

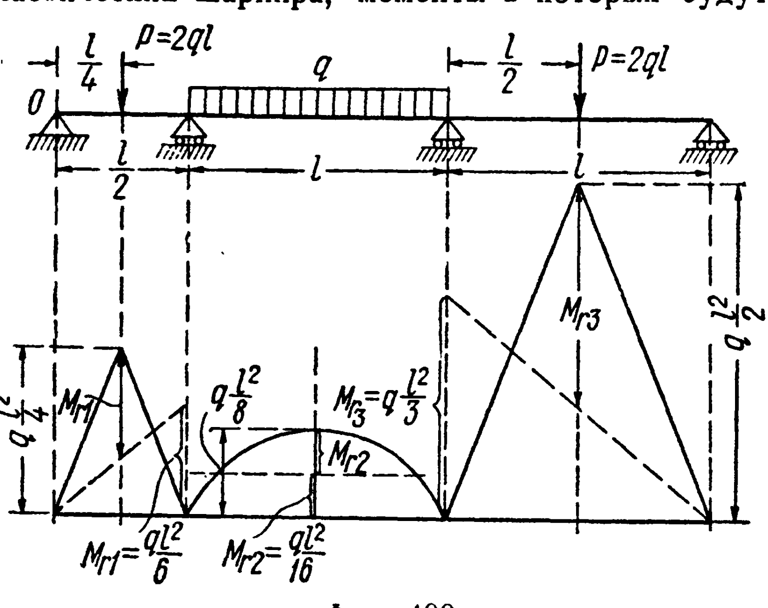
а расчётный

$$M_r = \frac{ql^2}{16}.$$

Необходимый момент сопротивления равен

$$W \geqslant \frac{M_r}{n[\sigma]} = \frac{ql^2}{16n[\sigma]}.$$

Таким образом, при возможности разрушения промежуточного пролёта должны образоваться три пластических шарнира, моменты в которых будут одинаковы. Если бы нагрузка была расположена на всех пролётах нашей балки, то следовало бы рассмотреть возможность разрушения каждого из пролётов, построить соответствующие эпюры *расчётных* моментов (путём *уравнивания* их величин в опасных сечениях) и подобрать W по наибольшему из полученных M_r. В качестве примера загрузим трёхпролётную балку (фиг. 400) равномерной нагрузкой q в среднем пролёте и сосредоточенными силами $P=2ql$ в серединах крайних пролётов. Определение расчётных моментов M_r для всех трёх пролётов показано на чертеже пунктиром; они равны



Фиг. 400.

$$M_{r1}=\frac{ql^2}{6};\quad M_{r2}=\frac{ql^2}{16};\quad M_{r3}=\frac{ql^2}{3}.$$

Подбор сечения балки следует вести по моменту $M_r=\frac{ql^2}{3}$; момент сопротивления равен $W\geqslant\frac{ql^2}{3n[\sigma]}$.

Подобным же образом следует проводить расчёт любой многопролётной неразрезной балки, оценивая возможность разрушения каждого из пролётов.

§ 151. Пример.

Пример 103. Подобрать двутавровое сечение по методу допускаемых напряжений и допускаемых нагрузок для трёхпролётной неразрезной балки (фиг. 401, *а*) постоянного сечения с равными пролётами $l=4$ *м*; балка нагружена в среднем пролёте сосредоточенной силой $P=10$ *т* на расстоянии $a=1$ *м* от левого конца среднего пролёта.

Фиг. 401.

Крайний правый пролёт загружён сплошной нагрузкой $q=2$ *т/пог. м*; $[\sigma]=1600$ *кг/см²*.

1. *Расчёт по допускаемым напряжениям.* Составляем уравнения трёх моментов

$$2M_1(l+l)+M_2 l=-6\frac{Pab}{6l}(l+b),$$

$$M_1 l+2M_2(l+l)=-6\left[\frac{Pab}{6l}(l+a)+\frac{ql^3}{24}\right].$$

Подставляя числовые значения, имеем:

$$16M_1+4M_2=-\frac{10\cdot 1\cdot 3}{4}(4+3)=-52{,}5,$$

$$4M_1+16M_2=-\frac{10\cdot 1\cdot 3}{4}(4+1)-\frac{2\cdot 4^3}{4}=-69{,}5;$$

откуда $M_1=-2{,}32$ *тм*; $M_2=-3{,}77$ *тм*.

Ординаты эпюр моментов для *основной* системы под грузом и посредине крайнего правого пролёта

$$M_P=\frac{Pab}{l}=\frac{10\cdot 1\cdot 3}{4}=7{,}5\ тм;\qquad M_q=\frac{ql^2}{8}=\frac{2\cdot 4^2}{8}=4\ тм.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на фиг. 401, *б*. Наибольший изгибающий момент

$$M_{max}=7{,}50-2{,}65=4{,}85\ тм,\quad M\geqslant\frac{485\,000}{1600}=303\ см^3.$$

Необходимо поставить двутавр № 24а с $W=317$ *см*^{3}.

2. *Расчёт по допускаемым нагрузкам.* Предельное состояние среднего пролёта будет при

$$M_1=M_2=M_r.$$

Расчётный момент в сечении под силой находим из уравнения:

$$M_r=\frac{Pab}{l}-M_r;$$

отсюда

$$M_r=\frac{Pab}{2l}.$$

Условие прочности

$$M_r\leqslant nW[\sigma]$$

приводит к ответу:

$$W\geqslant\frac{Pab}{2ln[\sigma]}=\frac{10\,000\cdot 100\cdot 300}{2\cdot 400\cdot 1{,}16\cdot 1600}=202\ см^3.$$

Необходимо поставить двутавр № 20а с $W=203$ *см*^{3}.

Расчётный момент для крайнего пролёта определяется из условия, что M_{max} в пролёте равен моменту на опоре; их величина и будет M_r. Выражение для $M(x)$ при предельном состоянии имеет вид

$$M(x)=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}-M_r\frac{x}{l}.$$

Приравнивая производную от этого выражения нулю, находим абсциссу x_0 сечения с моментом, равным M_{max}

$$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{M_r}{lq}.$$

Уравнение для определения M_r имеет вид

$$M_{max} = \frac{ql}{2} x_0 - \frac{q}{2} x_0^2 - \frac{M_r}{l} x_0 = M_r.$$

Подставляя числовые данные, имеем:

$$M_r = 3{,}39 \text{ тм} < \frac{Pab}{2l} = 3{,}75 \text{ тм}.$$

Сечение должно быть подобрано по M_r для среднего пролёта.

Описанный способ расчёта неразрезных балок требует ряда оговорок и ограничений. Во-первых, он относится к *статическим нагрузкам*. Во-вторых, физическая картина разрушения балки и при статической нагрузке гораздо сложнее той, весьма упрощённой, схемы образования пластических шарниров, о которой речь шла выше. Пластическая деформация не сосредоточивается в одном сечении, а распространяется и по длине балки. Затем исчерпание грузоподъёмности может произойти не только за счёт пластических деформаций, а и за счёт потери устойчивости как всей балки в целом, так и листов сжатого пояса или стенки балки. Таким образом, попытки перейти к практическому приложению этого метода расчёта даже при статических нагрузках требуют повышения внимания к проверкам балки на устойчивость.

Опыты над разрушением статически неопределимых балок при статической нагрузке показывают, что в тех случаях, когда исключается разрушение балок от *потери устойчивости*, величины разрушающей нагрузки, полученные экспериментально и теоретически описанным выше способом, сходятся очень хорошо.

ГЛАВА XXV.

БАЛКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ.

§ 152. Общие понятия.

К числу статически неопределимых балок может быть отнесена балка на упругом основании. Так называется балка, опирающаяся по всей своей длине (фиг. 402) на упругое основание, оказывающее в каждой точке на балку реакцию, пропорциональную y — прогибу балки в этой точке. Коэффициент пропорциональности обозначается буквой k.

Введение предположения о пропорциональности реакций прогибу является приближением, хотя и достаточно близким к действительным условиям.

Фиг. 402.

Предложение ввести в расчёт коэффициент пропорциональности k, именуемый «коэффициентом постели», было впервые сделано русским академиком Николаем Ивановичем Фуссом в 1801 году. Принимая это предположение, получаем, что *интенсивность* реакции основания в каждой точке равна ky и измеряется в единицах $\frac{\text{сила}}{\text{длина}}$; размерность коэффициента k при

этом будет $\frac{\text{сила}}{\text{длина}^2}$ (*кг/см*²). Будем считать, что основание оказывает реакцию при прогибах балки как вниз, так и вверх.

На практике задачи о расчёте балки на упругом основании встречаются в железнодорожном деле (рельс, шпала), в строительстве — фундаменты различных сооружений, передающие нагрузку на грунт.

Статически неопределимой такая балка будет потому, что условие статики — сумма нагрузок равна всей реакции основания — не даёт возможности установить *распределение* этой реакции по длине балки, а значит, вычислить изгибающие моменты и поперечные силы.

Интенсивность реакции в каждой точке связана с прогибами балки. Поэтому для решения задачи необходимо найти сначала уравнение изогнутой оси $y=f(x)$, а уже затем формулы для вычисления изгибающего момента и поперечной силы. Ход решения оказывается обратным обычному.

Найдём уравнение изогнутой оси для балки постоянного сечения, лежащей на упругом основании и нагружённой сосредоточенными силами P_1, P_2, ... (фиг. 402). Начало координат возьмём в любой точке, ось x направим вправо, ось y вертикально вверх. Направление нагрузок вверх будем считать положительным. Напишем обычное дифференциальное уравнение

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M(x).$$

Так как $M(x)$ нам неизвестен, то постараемся связать прогибы непосредственно с нагрузкой, для этого дифференцируем дважды предыдущее уравнение:

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=q(x), \tag{25.1}$$

где $q(x)$ — интенсивность сплошной нагрузки, действующей на балку в сечении с абсциссой x.

Сплошной нагрузкой для нашей балки является лишь реакция упругого основания. Интенсивность её пропорциональна прогибам; эта нагрузка направлена *вверх*, т. е. *положительна*, когда прогибы идут *вниз*, т. е. отрицательны, и наоборот. Таким образом, эта нагрузка имеет знак, обратный знаку прогибов:

$$q(x)=-ky.$$

Тогда

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=-ky, \tag{25.2}$$

или

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{k}{EJ}y=0. \tag{25.3}$$

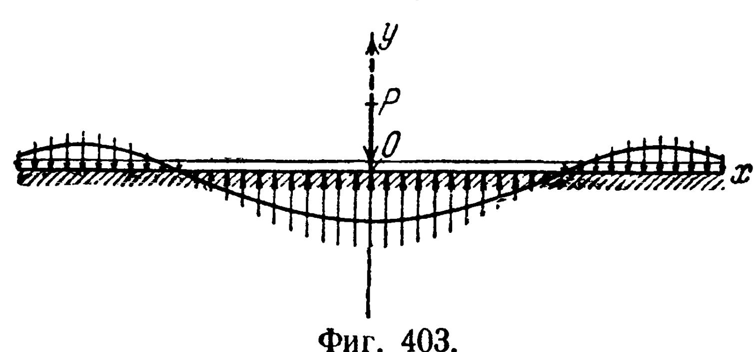
Если обозначить $\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}=\beta$, то общий интеграл уравнения (25.3) имеет вид:

$$y=e^{+\beta x}(A\sin\beta x+B\cos\beta x)+e^{-\beta x}(C\sin\beta x+D\cos\beta x). \tag{25.4}$$

Постоянные A, B, C, D должны быть определены в каждом частном случае нагрузки и длины балки. Величина β имеет измерение $\frac{1}{\text{длина}}$.

§ 153. Расчёт бесконечно длинной балки на упругом основании, загружённой одной силой P.

Наиболее просто решается задача об изгибе бесконечно длинной балки, нагружённой одной сосредоточенной силой (фиг. 403). Помимо непосредственного практического значения решение этой задачи позволит путём последовательных приближений рассчитывать и балки конечной длины.



Фиг. 403.

Начало координат расположим в точке приложения силы P. Определим постоянные A, B, C и D. Так как вся реакция основания, равная силе P, должна быть конечной величиной, то прогибы балки в точках, бесконечно удалённых от точки приложения силы, должны обращаться в нуль:

$$y_{x\to\infty}=0. \tag{25.5}$$

При бесконечно больших значениях x два вторых слагаемых в правой части формулы (25.4) обращаются в нуль благодаря множителю $e^{-\beta x}$, два же первых могут обратиться в нуль лишь при

$$A=0 \quad \text{и} \quad B=0;$$

таким образом,

$$y=e^{-\beta x}(C\sin\beta x+D\cos\beta x). \tag{25.6}$$

Далее, по симметрии нагрузки и реакции основания, касательная к изогнутой оси в точке приложения силы должна итти параллельно оси абсцисс:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=0.$$

Дифференцируя (25.6), получаем:

$$\frac{dy}{dx}=\theta=-\beta e^{-\beta x}[\sin\beta x\,(C+D)+\cos\beta x\,(D-C)].$$

Подставляя в это выражение $x=0$ и приравнивая результат нулю, находим:

$$D-C=0 \quad \text{и} \quad C=D;$$

таким образом, уравнения будут:

$$y=e^{-\beta x}C(\sin\beta x+\cos\beta x), \tag{25.7}$$

$$\frac{dy}{dx}=\theta=-2e^{-\beta x}C\beta\sin\beta x. \tag{25.8}$$

Для определения последней постоянной C имеем ещё одно уравнение: нам известна величина поперечной силы в начале координат.

Разрезав балку сечением в точке O справа от силы P и рассматривая правую часть балки, видим, что поперечная сила в этом сечении равна реакции основания, действующей на *правую половину* балки со знаком минус;

так как реакция направлена *вверх* (для правой половины) и вся реакция основания равна P, значит, поперечная сила в сечении при $x=0$ равна

$$Q(x)_{x=0} = -\frac{P}{2}.$$

Но, с другой стороны,

$$EJ\frac{d^3y}{dx^3} = Q(x). \tag{25.9}$$

Таким образом,

$$EJ\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} = -\frac{P}{2}. \tag{25.10}$$

Вычисляем, пользуясь (25.8), $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $\frac{d^3y}{dx^3}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2C\beta^2 e^{-\beta x}[\cos\beta x - \sin\beta x], \tag{25.11}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = +4C\beta^3 e^{-\beta x}\cos\beta x. \tag{25.12}$$

Подставляя (25.12) в (25.10) и приравнивая x нулю, получаем:

$$4EJC\beta^3 = -\frac{P}{2} \text{ и } C = -\frac{P}{8EJ\beta^3}. \tag{25.13}$$

Теперь значения y и её производных получают вид

$$y = -\frac{P}{8EJ\beta^3}e^{-\beta x}(\sin\beta x + \cos\beta x) = -\frac{P}{8EJ\beta^3}\cdot\eta, \tag{25.14}$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta = +\frac{P}{4EJ\beta^2}e^{-\beta x}\sin\beta x = +\frac{P}{4EJ\beta^2}\cdot\eta_3, \tag{25.15}$$

$$M(x) = EJ\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{P}{4\beta}e^{-\beta x}[\cos\beta x - \sin\beta x] = \frac{P}{4\beta}\cdot\eta_1, \tag{25.16}$$

$$Q(x) = EJ\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{P}{2}e^{-\beta x}\cos\beta x = -\frac{P}{2}\cdot\eta_2. \tag{25.17}$$

Таким образом, напряжённое состояние и деформации балки на упругом основании всецело определяются нагрузкой и коэффициентом β, зависящим от соотношения жёсткостей балки и упругого основания.

Значения величин η, η_1, η_2, η_3 в функции аргумента βx приведены в таблице 24.

Значения коэффициента k колеблются довольно сильно в зависимости от рода основания; называя ширину балки b, можем представить этот коэффициент в виде $k=k_1 b$, где k_1 — так называемый коэффициент податливости основания; он равен силе, которую надо приложить к единице площади основания, чтобы дать ему осадку, равную единице длины.

Для грунта средней плотности k_1 колеблется в пределах от 0,5 до 5 *кг/см*³; для плотного грунта от 5 до 10 *кг/см*³; для каменной кладки, как основания под балку, от 400 до 600 *кг/см*³ и для бетона от 800 до 1500 *кг/см*³. Так как в выражение для β входит $\sqrt[4]{k}$, то даже значительные колебания величины k_1 отражаются сравнительно слабо на результатах расчёта.

Таблица 24. Значения функций η, η_1, η_2 и η_3.

$$\eta = e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x); \quad \eta_2 = e^{-\beta x}\cos\beta x,$$

$$\eta_1 = e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x); \quad \eta_3 = e^{-\beta x}\sin\beta x.$$

βx	η	η_3	η_1	η_2	βx
0,0	*1,0000*	*0,0000*	*1,0000*	*+ 1,0000*	0,0
0,1	0,9907	+ 0,0903	0,8100	+ 0,9003	0,1
0,2	0,9651	+ 0,1627	0,6398	+ 0,8024	0,2
0,3	0,9267	+ 0,2189	0,4888	+ 0,7077	0,3
0,4	0,8784	+ 0,2610	0,3564	+ 0,6174	0,4
0,5	0,8231	+ 0,2908	0,2415	+ 0,5323	0,5
0,6	0,7628	+ 0,3099	0,1431	+ 0,4530	0,6
0,7	0,6997	+ 0,3199	0,0599	+ 0,3708	0,7
$1/4\pi$	*0,6448*	*+ 0,3224*	*0,0000*	*+ 0,3224*	*0,785*
0,8	0,6354	+ 0,3223	— 0,0093	+ 0,3131	0,8
0,9	0,5712	+ 0,3185	— 0,0657	+ 0,2527	0,9
1,0	0,5083	+ 0,3096	— 0,1108	+ 0,1988	1,0
1,1	0,4476	+ 0,2967	— 0,1457	+ 0,1510	1,1
1,2	0,3899	+ 0,2807	— 0,1716	+ 0,1091	1,2
1,3	0,3355	+ 0,2626	— 0,1897	+ 0,0729	1,3
1,4	0,2849	+ 0,2430	— 0,2011	+ 0,0419	1,4
1,5	0,2384	+ 0,2226	— 0,2068	+ 0,0158	1,5
$1/2\pi$	*0,2079*	*+ 0,2079*	*— 0,2079*	*0,0000*	*1,571*
1,6	0,1959	+ 0,2018	— 0,2077	— 0,0059	1,6
1,7	0,1576	+ 0,1812	— 0,2047	— 0,0235	1,7
1,8	0,1234	+ 0,1610	— 0,1985	— 0,0376	1,8
1,9	0,0932	+ 0,1415	— 0,1899	— 0,0484	1,9
2,0	0,0667	+ 0,1231	— 0,1794	— 0,0563	2,0
2,1	0,0439	+ 0,1057	— 0,1675	— 0,0618	2,1
2,2	0,0244	+ 0,0896	— 0,1548	— 0,0652	2,2
2,3	0,0080	+ 0,0748	— 0,1416	— 0,0668	2,3
$3/4\pi$	*0,0000*	*+ 0,0670*	*— 0,1340*	*— 0,0670*	*2,356*
2,4	— 0,0056	+ 0,0613	— 0,1282	— 0,0669	2,4
2,5	— 0,0166	+ 0,0491	— 0,1149	— 0,0658	2,5
2,6	— 0,0254	+ 0,0383	— 0,1019	— 0,0636	2,6
2,7	— 0,0320	+ 0,0287	— 0,0895	— 0,0608	2,7
2,8	— 0,0369	+ 0,0204	— 0,0777	— 0,0573	2,8
2,9	— 0,0403	+ 0,0132	— 0,0666	— 0,0534	2,9
3,0	— 0,04226	+ 0,00703	— 0,05632	— 0,04929	3,0
3,1	— 0,04314	+ 0,00187	— 0,04688	— 0,04501	3,1
π	*— 0,04321*	*+ 0,00000*	*— 0,04321*	*— 0,04321*	*3,142*
3,2	— 0,04307	— 0,00238	— 0,03831	— 0,04069	3,2
3,3	— 0,04224	— 0,00582	— 0,03060	— 0,03642	3,3
3,4	— 0,04079	— 0,00853	— 0,02374	— 0,03227	3,4
3,5	— 0,03887	— 0,01059	— 0,01769	— 0,02828	3,5
3,6	— 0,03659	— 0,01209	— 0,01241	— 0,02450	3,6
3,7	— 0,03407	— 0,01310	— 0,00787	— 0,02097	3,7

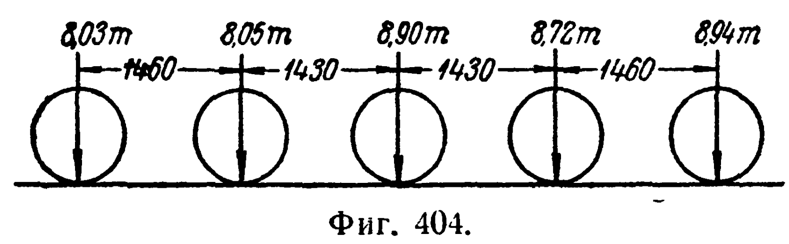
Продолжение табл. 24.

βx	η	η_3	η_1	η_2	βx
3,8	— 0,03138	— 0,01369	— 0,00401	— 0,01770	3,8
3,9	— 0,02862	— 0,01392	— 0,00077	— 0,01469	3,9
5/4π	*— 0,02786*	*— 0,01393*	*0,00000*	*— 0,01393*	*3,927*
4,0	— 0,02583	— 0,01386	+ 0,00189	— 0,01197	4,0
4,1	— 0,02309	— 0,01356	0,00403	— 0,00953	4,1
4,2	— 0,02042	— 0,01307	0,00572	— 0,00735	4,2
4,3	— 0,01787	— 0,01243	0,00699	— 0,00544	4,3
4,4	— 0,01546	— 0,01168	0,00791	— 0,00377	4,4
4,5	— 0,01320	— 0,01086	0,00852	— 0,00234	4,5
4,6	— 0,01112	— 0,00999	0,00786	— 0,00113	4,6
4,7	— 0,00921	— 0,00909	0,00898	— 0,00011	4,7
6/4π	*— 0,00898*	*— 0,00898*	*0,00898*	*0,00000*	*4,712*
4,8	— 0,00748	— 0,00820	0,00892	+ 0,00072	4,8
4,9	— 0,00593	— 0,00732	0,00870	0,00139	4,9
5,0	— 0,00455	— 0,00646	0,00837	0,00191	5,0
5,1	— 0,00334	— 0,00564	0,00795	0,00230	5,1
5,2	— 0,00229	— 0,00487	0,00746	0,00259	5,2
5,3	— 0,00139	— 0,00415	0,00692	0,00277	5,3
5,4	— 0,00063	— 0,00349	0,00636	0,00287	5,4
7/4π	*0,00000*	*— 0,00290*	*0,00579*	*0,00290*	*5,498*
5,5	+ 0,00001	— 0,00288	0,00578	0,00290	5,5
5,6	0,00053	— 0,00233	0,00520	0,00287	5,6
5,7	0,00095	— 0,00184	0,00464	0,00279	5,7
5,8	0,00127	— 0,00141	0,00409	0,00268	5,8
5,9	0,00152	— 0,00102	0,00356	0,00254	5,9
6,0	0,00169	— 0,00069	0,00307	0,00238	6,0
6,1	0,00180	— 0,00069	0,00261	0,00221	6,1
6,2	0,00185	— 0,00017	0,00219	0,00202	6,2
8/4π	*0,00187*	*0,00000*	*0,00187*	*0,00187*	*6,283*
6,3	0,00187	+ 0,00003	0,00181	0,00184	6,3
6,4	0,00184	0,00019	0,00146	0,00165	6,4
6,5	0,00179	0,00032	0,00115	0,00147	6,5
6,6	0,00172	0,00042	0,00087	0,00129	6,6
6,7	0,00162	0,00050	0,00063	0,00113	6,7
6,8	0,00152	0,00055	0,00042	0,00097	6,8
6,9	0,00141	0,00058	0,00024	0,00082	6,9
7,0	0,00129	0,00060	0,00009	0,00069	7,0
9/4π	*0,00120*	*0,00060*	*0,00000*	*0,00060*	*7,069*

§ 154. Пример.

Пример 104. Определить напряжение σ в железнодорожном рельсе типа II А от статической нагрузки паровозом Э^{м}. Схема нагрузки дана на фиг. 404. Определим изгибающий момент в сечении под средним колесом как сумму моментов от действия отдельных грузов. Для того чтобы воспольз-

зоваться формулой (25.16), необходимо при учёте влияния каждого колеса располагать начало координат под ним, а за абсциссу x принимать расстояние от этого колеса до того сечения, где вычисляется момент.



Фиг. 404.

Коэффициент k может быть принят равным 300 *кг/мм²*. Жёсткость рельса $EJ = 2 \times 10^6 \cdot 1223$ *кг·см²*; тогда $\beta = \frac{1}{24} \cdot 1/см$. Изгибающий момент в сечении рельса под третьим колесом равен

$$M = \Sigma \frac{P}{4\beta} \eta_1;$$

расстояния x от этого сечения до каждого колеса и, соответственно, величины βx равны

$$x_1 = 289 \text{ см}; \; x_2 = 143 \text{ см}; \; x_3 = 0; \; x_4 = 143 \text{ см}; \; x_5 = 289 \text{ см};$$

$$\beta x_1 = \frac{289}{24} = 12{,}0; \; \beta x_2 = \frac{143}{24} = 5{,}9; \; \beta x_3 = 0; \; \beta x_4 = 5{,}9; \; \beta x_5 = 12{,}0.$$

При $\beta x > 7$ величинами η_1 практически можно пренебречь.

Таким образом, давление крайних колёс не вызывает напряжений в рассматриваемом сечении. Влияние остальных колёс характеризуется величинами

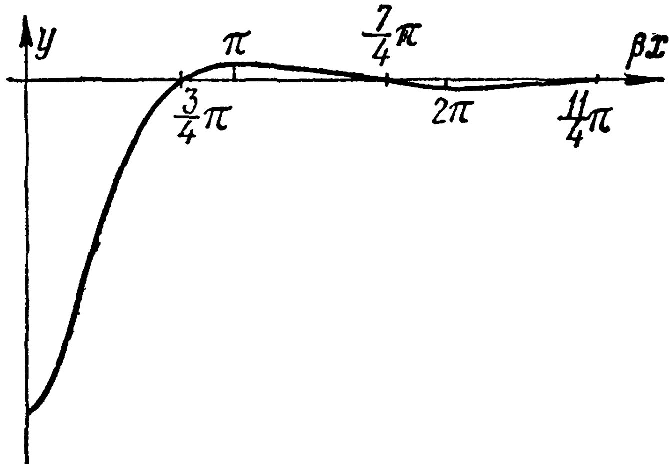
$$\eta_1^{II} = 0{,}00356 = \eta_1^{IV}; \; \eta_1^{III} = 1{,}0.$$

Таким образом,

$$M = \frac{24}{4} [(8720 + 8050) \cdot 0{,}00356 + 8900 \cdot 1] = 53\,800 \text{ кгсм}.$$

Наибольшее воздействие оказывает колесо, стоящее над рассматриваемым сечением; смежные колёса, даже сравнительно близко расположенные, оказывают ничтожное влияние на напряжение в этом сечении.

Так как $W = 180$ *см³*, то $\sigma = 299$ *кг/см²*.



Фиг. 405.

§ 155. Расчёты балок конечной длины.

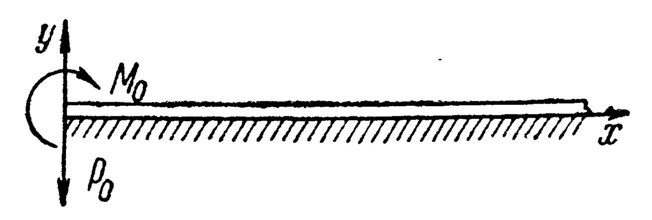
Для решения вопроса, в какой мере полученные выше результаты могут быть применены к балкам конечной длины, рассмотрим изображённую на фиг. 405 половину изогнутой оси бесконечно длинной балки, нагружённой сосредоточенной силой P. Эта ось представляет собой волнообразную кривую с постепенно затухающими ординатами. Для большей общности по горизонтали отложены отвлечённые величины βx вместо абсцисс x.

Длина полуволны этой кривой равна $l_0 = \pi/\beta$; из таблицы 24 мы видим, что уже на расстоянии двух полуволн $2l_0$ от начала координат наибольший

прогиб равен всего $\sim 0{,}2\%$ от прогиба под грузом. Таким образом, практически прогибы обращаются в нуль не при $x=\infty$, а при $x=2l_0$.

Поэтому полученными формулами можно смело пользоваться при расчётах симметричных балок с длиной $l \geqslant 4l_0$, а если учесть, что при $x=l_0$ прогиб равен 4% от наибольшего, то и для балок при $l \geqslant 2l_0$ часто ими пользуются.

Для более коротких балок можно применить метод последовательных приближений. Для этого нам потребуется уметь вычислять $M(x)$ и $Q(x)$ в бесконечно длинной балке, нагружённой на одном конце силой P_0 и



Фиг. 406.

парой M_0. Начало координат принимаем на нагружённом конце, направление осей координат оставляем прежним (фиг. 406).

Начальными условиями, определяющими постоянные в выражении (25.4) будут:

1) при $x=\infty$ прогиб $y=0$; отсюда $A=B=0$;

2) при $x=0$ изгибающий момент $M(x)=EJ\dfrac{d^2y}{dx^2}=+M_0$;

3) при $x=0$ поперечная сила $Q(x)=EJ\dfrac{d^3y}{dx^3}=-P_0$.

Опускаем промежуточные вычисления; при помощи второго условия получаем

$$C=-\frac{M_0}{2\beta^2 EJ},$$

а из третьего условия

$$D=-\frac{1}{2EJ\beta^3}[P_0-M_0\beta].$$

Тогда

$$M(x)=-\frac{e^{-\beta x}}{\beta}[P_0\sin\beta x-M_0\beta(\cos\beta x+\sin\beta x)]=-\frac{1}{\beta}[P_0\eta_3-M_0\beta\eta],\quad(25.18)$$

$$Q(x)=-e^{-\beta x}[P_0(\cos\beta x-\sin\beta x)+2M_0\beta\sin\beta x]=-[P_0\eta_1+2M_0\beta\eta_3].\quad(25.19)$$

Теперь готов весь аппарат для расчёта балки любой длины на упругом основании под сосредоточенной нагрузкой.

Рассмотрим балку AB длиной $l<2l_0$, нагружённую сосредоточенной силой P на расстоянии a от левого и b от правого конца (фиг. 407, *а*).

Для расчёта такой балки заменим её бесконечно длинной балкой (фиг. 407, *б*). Для такой балки мы можем найти напряжения в любом сечении, в том числе и в сечениях A_1 и B_1, соответствующих концам нашей короткой балки.

Таким образом, средняя часть A_1B_1 (фиг. 407, *в*) бесконечно длинной балки окажется под действием силы P и усилий по сечениям A_1 и B_1 —

M_a, M_b и Q_a, Q_b; показанные на чертеже направления усилий соответствуют их положительным значениям.

Чтобы работа выделенной части балки A_1B_1 совпала с работой заданной балки AB, надо к сечению A_1 приложить внешние: силу $-Q_a$ и пару $-M_a$, а к сечению B_1: $-Q_b$ и $-M_b$, так как в действительной балке в сечениях A и B напряжений нет.

Таким образом, в *первом приближении* напряжения в балке AB могут быть вычислены как сумма напряжений в точках участка A_1B_1 трёх балок I, II, III (фиг. 407). Изгибающие моменты и поперечные силы в сечениях правой части балки I равны $M'_x=+\frac{P}{4\beta}\eta_1$; $Q'_x=-\frac{P}{2}\eta_2$; для сечений левой части должен быть изменён знак у η_2. Для подсчёта $M''(x)$ и $Q''(x)$ во второй балке можно воспользоваться формулами (25.18) и (25.19), положив $P_0=-Q_b$, $M_0=-M_b$ и переменив знак в выражении для $Q''(x)$, так как изменено направление оси x по сравнению с фиг. 406, к которой относятся эти формулы. Таким образом,

$$M''(x)=+\frac{1}{\beta}\left[+Q_b\eta_3-M_b\beta\eta\right]$$

и

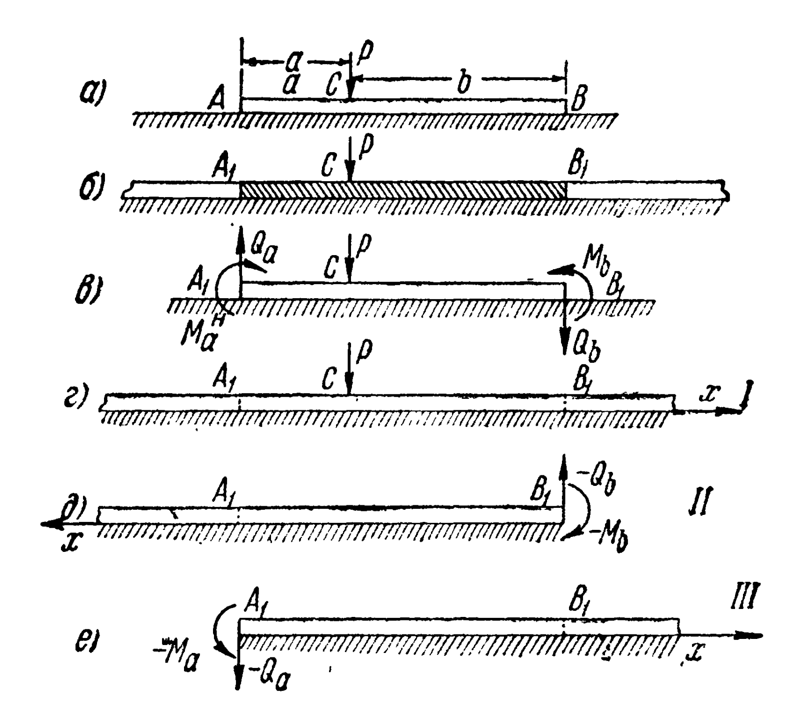
$$Q''(x)=-\left[Q_b\eta_1+2M_b\eta_3\right].$$

Для третьей балки следует положить $M_0=-M_a$ и $P_0=+Q_a$; таким образом,

$$M'''(x)=-\frac{1}{\beta}\left[Q_a\eta_3+M_a\beta\eta\right]$$

и

$$Q'''(x)=-\left[Q_a\eta_1-2M_a\beta\eta_3\right].$$



Фиг. 407.

Что касается величин усилий в сечениях A и B, то они численно равны изгибающим моментам и поперечным силам в этих сечениях. Если при их вычислениях пользоваться таблицей 24, то для поперечной силы в сечении A придётся переменить знак.

Таким образом, вычисляя поправки $M''(x)$, $M'''(x)$, $Q''(x)$ *и* $Q'''(x)$ *при помощи таблицы 24, надо для основной балки вычислить по этой же таблице* M_a, Q_a *при* $x=a$ и M_b, Q_b *при* $x=b$, *а затем воспользоваться формулами* (25.18) и (25.19), положив $M_0=-M_a$ или $-M_b$, а $P_0=-Q_a$ или $-Q_b$. Так как при подсчёте поправок мы допустим новую погрешность — в сечении A_1 балки II и в сечении B_1 балки III усилия получаются, хотя и малыми, но не равными нулю, то указанным путём можно внести и дальнейшие поправки, однако это обычно уже является излишним.

Задача расчёта балок на упругом основании изучалась многими советскими учёными, в том числе академиком А. Н. Крыловым, профессорами Н. П. Пузыревским, П. Л. Пастернаком, В. В. Кречмером, доцентом Г. Д. Дутовым, профессорами Н. К. Снитко, Б. Г. Кореневым, В. А. Киселёвым, А. А. Уманским, С. С. Голушкевичем, Л. В. Канторовичем, К. С. Завриевым, П. Ф. Папковичем, Я. А. Пратусевичем, А. П. Коробовым и др.

Был разработан (1923 г.) эффективный метод расчёта, позволяющий обойтись без описанного здесь приёма последовательных приближений; он назван методом начальных параметров и позволяет через четыре начальных параметра y_0, θ_0, M_0 и Q_0, действующих в выбранном начале координат, выразить прогиб $y(x)$, угол поворота $\theta(x)$, момент $M(x)$ и поперечную силу $Q(x)$ для любого сечения.

Приведём лишь уравнение $y(x)$, так как остальные легко получить дифференцированием

$$y(x) = y_0 A(x) + \theta_0 \frac{B(x)}{\beta} + \frac{M_0}{EJ} \frac{C(x)}{\beta^2} + \frac{Q_0}{EJ} \frac{D(x)}{\beta^3}. \qquad (25.20)$$

Исследования изгиба балок, не следующих закону (25.20), принадлежат профессорам Г. Э. Проктору, Н. М. Герсеванову, Я. А. Мачерету, Б. Н. Жемочкину, М. И. Горбунову-Посадову, А. П. Филиппову, И. Г. Альперину, М. М. Филоненко-Бородичу и др.

ОТДЕЛ VIII.
СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.

ГЛАВА XXVI.
КОСОЙ ИЗГИБ.

§ 156. Основные понятия.

До сих пор мы рассматривали задачи, где стержни конструкции испытывали одну из простейших деформаций: осевое растяжение или сжатие, кручение, плоский изгиб. На практике же большинство элементов конструкций и машин подвергается действиям сил, вызывающих одновременно не одну из указанных деформаций, а две и более.

Валы машин подвергаются действию кручения и изгиба; стержни ферм (стропильных, мостовых, крановых), помимо растяжения или сжатия, испытывают ещё и изгиб, вызываемый устройством в узлах сварных или клёпаных соединений взамен шарниров, предполагающихся при выполнении расчётов. Все такие случаи сопротивления стержней, когда мы имеем дело с комбинацией простейших деформаций, называются *сложным сопротивлением.*

При расчётах на сложное сопротивление обычно исходят из так называемого *принципа независимости действия сил,* т. е. предполагают, что влиянием деформаций, вызванных одной из приложенных к упругой системе нагрузок, на расположение, а следовательно, и на результаты действия остальных нагрузок можно пренебречь. Опыт показывает, что пока деформации системы малы этот принцип может быть использован (исключительные случаи, когда он вообще не применим, будут рассмотрены ниже); а поэтому для нахождения полных напряжений и деформаций, возникающих в упругой системе в результате действия на неё любой сложной системы нагрузок, можно применять способ сложения действия сил, т. е. геометрически суммировать напряжения и перемещения, соответствующие различным видам простейших деформаций.

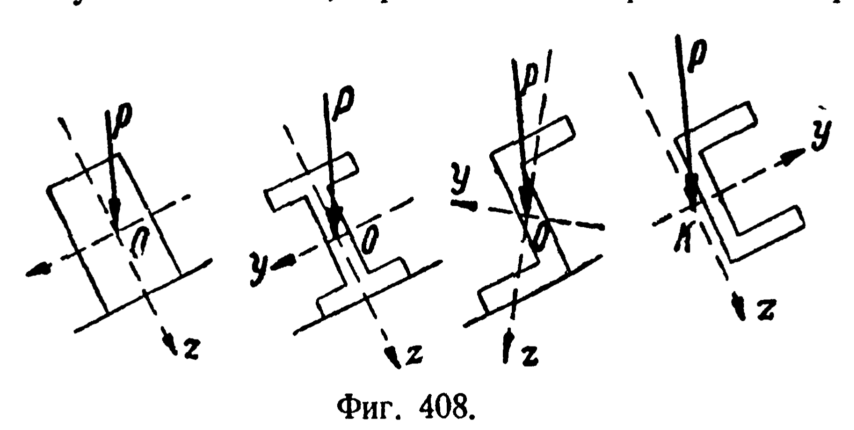
Вначале рассмотрим решение частных задач сложного сопротивления, а затем и самый общий случай действия сил на упругую систему.

§ 157. Косой изгиб. Вычисление напряжений.

Для вычисления нормальных напряжений при изгибе мы до сих пор пользовались формулой: $\sigma = \frac{Mz}{J_y}$. Однако нормальные напряжения в каком-либо сечении балки полностью определяются по этой

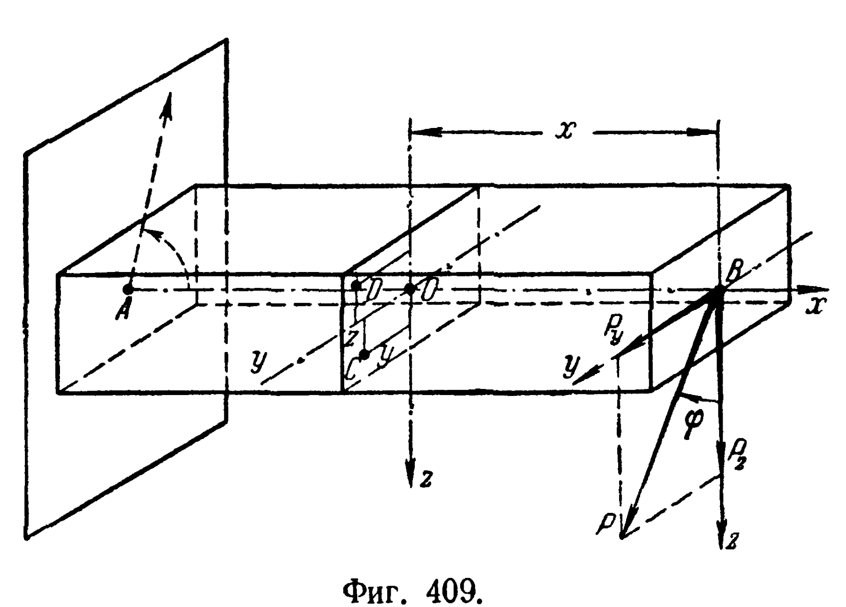
формуле только в случае плоского изгиба [1]), когда искривление оси балки происходит в плоскости действия сил и нейтральной осью является главная ось инерции поперечного сечения, перпендикулярная к плоскости нагрузки.

На практике часто встречаются случаи, когда плоскость действия сил, перпендикулярных оси стержня, не совпадает ни с одной из двух плоскостей, проходящих через ось стержня и главные оси инерции поперечных сечений стержня. Опыт показывает, что изогнутая ось стержня при этом уже не будет лежать в плоскости действия сил, и мы будем иметь случай так называемого *косого изгиба.*



Фиг. 408.

Обрешетины кровли обычно подвергаются нагрузкам, плоскость действия которых составляет довольно значительный угол с главными осями (фиг. 408); довольно часто встречаются и случаи, когда направление нагрузок лишь слегка отклоняется от главных осей инерции.



Фиг. 409.

Покажем на примере метод проверки прочности и вычисления деформаций балок при косом изгибе.

Рассмотрим балку, защемлённую одним концом и нагружённую на другом силой P, лежащей в плоскости торца балки и направленной под углом φ к главной оси Bz (фиг. 409). Вторая главная ось By пойдёт перпендикулярно к первой; направления этих осей выберем так, чтобы сила P проходила в первом квадранте координатной системы.

Для проверки прочности необходимо найти точку с наибольшим нормальным напряжением. Выведем сначала формулу для вычисления

[1]) Говоря более точно, это будет иметь место, когда все силы лежат в одной из главных плоскостей инерции стержня, проходящей через центр изгиба; в целом ряде случаев последний совпадает с центром тяжести поперечного сечения (§ 96).

нормального напряжения в любой точке произвольного сечения, отстоящего в расстоянии x от свободного конца балки.

Разложим силу P на составляющие P_z и P_y, направленные по *главным* осям инерции сечения Bz и By. Величины этих составляющих определяются формулами

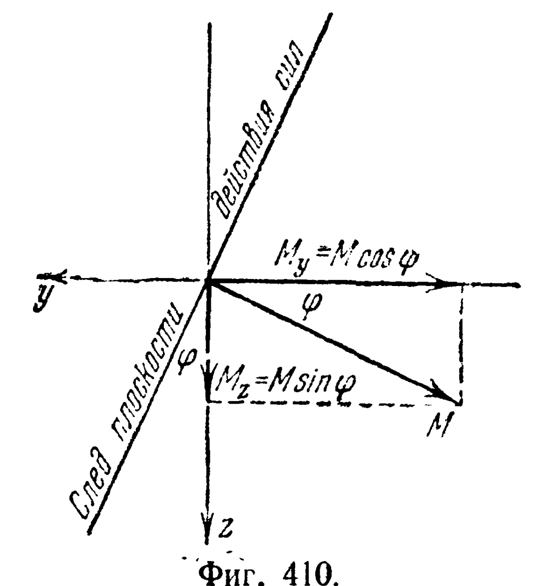
$$P_z = P\cos\varphi \text{ и } P_y = P\sin\varphi.$$

Таким образом, мы привели случай косого изгиба к комбинации двух плоских изгибов, вызванных силами P_z и P_y, расположенными в главных плоскостях инерции балки. Суммируя напряжения и деформации, соответствующие каждому из этих изгибов, мы получим решение и для косого изгиба.

Изгибающие моменты в сечении с абсциссой x от сил P_z и P_y будут равны

$$\left.\begin{aligned} |M_y| &= P_z x = Px\cos\varphi = M\cos\varphi, \\ |M_z| &= P_y x = Px\sin\varphi = M\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (26.1)$$

Значки y и z при M обозначают главные оси, относительно которых берутся моменты; буквой M обозначен изгибающий момент в плоскости действия силы P, для проведённого сечения равный Px. Применяя векторное изображение моментов, видим, что для вычисления изгибающих моментов M_y и M_z можно было непосредственно разложить полный изгибающий момент M по главным осям (фиг. 410).



Фиг. 410.

Для установления знаков изгибающих моментов следовало бы ввести дополнительные условия, определяющие эти знаки в связи с переходом к пространственной задаче. Это и будет сделано ниже; сейчас же ограничимся лишь вычислением абсолютной величины изгибающих моментов, влияние же направления моментов на знаки напряжений учтём при вычислении последних.

Вычислим напряжения в какой-либо точке C (с координатами y и z), расположенной в первом квадранте (фиг. 409). Мы имеем возможность вычислить для этой точки нормальные напряжения, вызванные отдельно моментами M_y и M_z, изгибающими балку в главных плоскостях xz и xy; в этом случае применимы формулы, полученные для плоского изгиба.

Нормальное напряжение в точке C от изгиба моментом M_y является сжимающим (отрицательным) и выражается формулой

$-\frac{M_y \cdot z}{J_y} = -\frac{M \cdot z}{J_y}\cos\varphi$, где J_y — момент инерции относительно оси y, которая при изгибе моментом M_y будет нейтральной осью. Момент M_z вызывает в этой точке тоже сжимающее напряжение, равное $-\frac{M_z y}{J_z} = -\frac{My}{J_z}\sin\varphi$; J_z — момент инерции сечения относительно оси z. Полное напряжение в точке C находим как алгебраическую сумму полученных напряжений:

$$\sigma = -\frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z} = -M\left(\frac{z\cos\varphi}{J_y} + \frac{y\sin\varphi}{J_z}\right). \qquad (26.2)$$

В данном случае этой формулой можно пользоваться при вычислении напряжений в любой точке каждого сечения балки. Так как формула выведена для точки с положительными координатами y и z, то, подставляя в неё значения координат с соответствующими знаками, будем всегда получать по формуле (26.2) правильный знак напряжения.

Так, для точки D (фиг. 409) координата y будет положительна, а z — отрицательна; в соответствии с этим первое слагаемое в формуле (26.2) представит собой положительное (растягивающее) напряжение, а второе — попрежнему сжимающее.

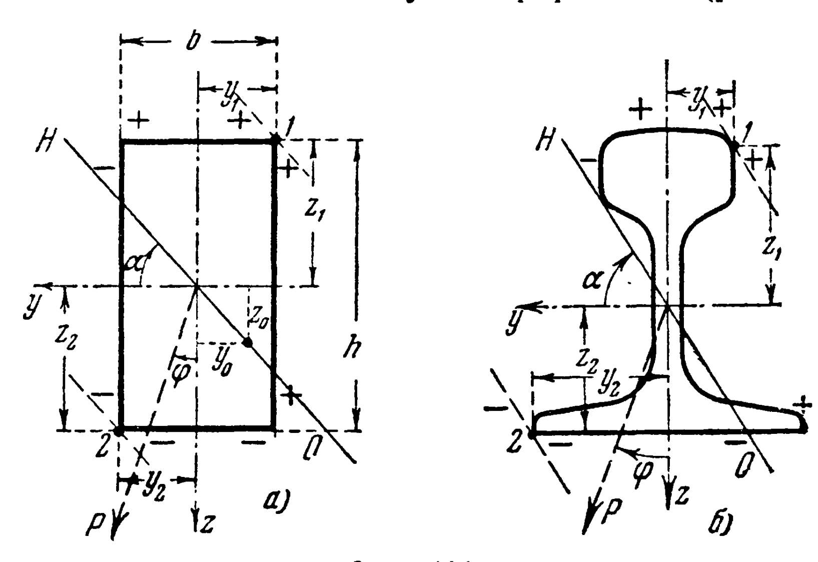
Хотя формула (26.2) и получена из рассмотрения частного случая косого изгиба балки, защемлённой одним концом и нагружённой на другом сосредоточенной силой P, однако, как нетрудно заметить, она является общей формулой для вычисления напряжений при косом изгибе. Для балок иначе нагружённых и закреплённых нужно лишь договориться о правиле знаков. Если положительное направление главных центральных осей инерции поперечного сечения балки всегда выбирать так, чтобы след плоскости действия сил в сечении проходил через первый квадрант, то знак перед правой частью формулы (26.2) необходимо назначать по тому действию, которое изгибающий момент M (или, что равноценно, его компоненты) оказывают на любую площадку первого квадранта (при растяжении ставить плюс, при сжатии — минус). Тогда для получения по формуле (26.2) правильного знака напряжения на любой другой площадке поперечного сечения достаточно учитывать знаки координат y и z.

Для нахождения наибольшего нормального напряжения надо отыскать опасное сечение балки и в нём наиболее напряжённую точку. Из формулы (26.2) видно, что опасным сечением будет то, где изгибающий момент M достигнет наибольшей величины.

Для нахождения опасной точки учтём, что при *плоском* изгибе деформация, соответствующая нормальным напряжениям, сводится к относительному повороту сечений вокруг нейтральных осей. При косом изгибе, являющемся комбинацией двух плоских изгибов, мы имеем

одновременный относительный поворот сечений вокруг двух осей, пересекающихся в центре тяжести сечения.

Из кинематики известно, что вращение фигуры вокруг двух пересекающихся осей может быть заменено вращением вокруг оси, проходящей через точку пересечения. Таким образом, и при косом изгибе мы в каждом сечении будем иметь линию, проходящую через центр тяжести, вокруг которой будет происходить поворот сечения при деформации балки. Эта ось и будет нейтральной; волокна, расположенные в её плоскости, не будут удлиняться или укорачиваться, и нормальные напряжения в точках нейтральной оси будут равны нулю. При относительном повороте сечений наибольшую деформацию (растяжение или сжатие) испытывают волокна, наиболее удалённые от нейтральной оси.



Фиг. 411.

Поэтому нахождение опасных точек при косом изгибе сводится к определению положения нейтральной оси и отысканию точек, наиболее далеко от неё отстоящих.

Уравнение нейтральной оси получим из условия, что нормальные напряжения в точках, лежащих на этой оси, равны нулю. Обозначим координаты этих точек y_0 и z_0; подставив эти величины вместо y и z в формулу (26.2), мы должны получить для σ значение, равное нулю:

$$0 = -\frac{M\cos\varphi \cdot z_0}{J_y} - \frac{M\sin\varphi \cdot y_0}{J_z}.$$

Сокращая на $-M$, имеем:

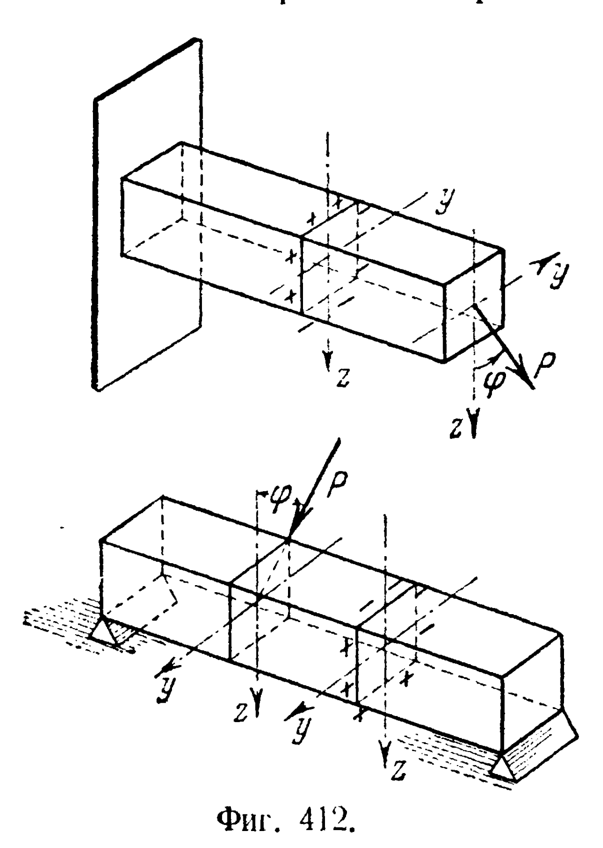
$$\frac{\cos\varphi \cdot z_0}{J_y} + \frac{\sin\varphi \cdot y_0}{J_z} = 0. \qquad (26.3)$$

Это и есть уравнение нейтральной оси; она является прямой, проходящей через центр тяжести сечения (при $y_0 = 0$ и $z_0 = 0$).

На фиг. 411 изображены два поперечных сечения балок; оси y и z являются главными осями инерции. В предположении, что балки нагружены по схеме фиг. 409, на каждом сечении показана проекция силы P и для каждого квадранта сечения приведены знаки нормальных напряжений; знаки выше и ниже сечения относятся к напряжениям от изгиба моментом M_y, знаки справа и слева от сечения — к напряжениям от изгиба моментом M_z. Для балки, иным

образом нагружённой и закреплённой (фиг. 412), знаки напряжений соответственно будут другими.

На фиг. 411 нанесено примерное расположение нейтральной оси. Так как она проходит через центр тяжести сечения, то для определения её положения достаточно знать угол α, составленный ею с осью y. Из фиг. 411 видно, что тангенс этого угла равен абсолютной величине отношения z_0 к y_0:



Фиг. 412.

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{z_0}{y_0}\right|.$$

Из уравнения (26.3) получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{z_0}{y_0}\right|=\operatorname{tg}\varphi\frac{J_y}{J_z}. \quad (26.4)$$

Таким образом, положение нейтральной оси не зависит от величины силы P, а лишь от угла наклона плоскости внешних сил к оси z и от формы сечения.

Вычислив по формуле (26.4) величину угла α, строим на чертеже нейтральную ось, а проводя к сечению касательные, параллельно ей, находим наиболее напряжённые точки, как наиболее удалённые от нейтральной оси (точки *1* и *2* на фиг. 411).

Подставляя в формулу (26.2) координаты этих точек (y_1 и z_1 или y_2 и z_2) с учётом их знаков, находим величины наибольшего растягивающего и наибольшего сжимающего напряжений. Условие прочности получает такой вид:

$$|\sigma_{\max}|=M_{\max}\left[\frac{\cos\varphi}{J_y}z_1+\frac{\sin\varphi}{J_z}y_1\right]\leqslant[\sigma], \quad (26.5)$$

где y_1 и z_1 (или y_2 и z_2) — координаты точки (в системе главных центральных осей), наиболее удалённой от нейтральной оси.

Для поперечных сечений с выступающими углами, у которых обе главные оси инерции являются осями симметрии (прямоугольник, двутавр)

$$|y_1|=|y_2|=|y_{\max}| \quad \text{и} \quad |z_1|=|z_2|=|z_{\max}|;$$

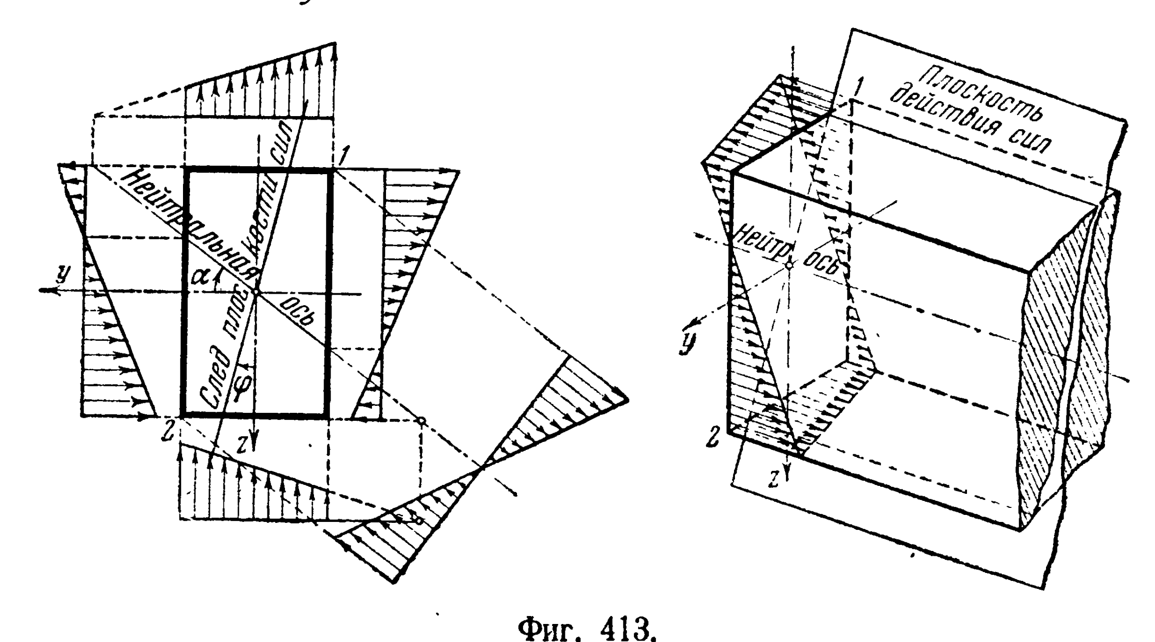
формула (26.5) упрощается; для $\sigma_{(1,2)}$ имеем:

$$\sigma_{(1,2)}=\pm M\left(\frac{\cos\varphi}{W_y}+\frac{\sin\varphi}{W_z}\right)=\pm\frac{M}{W_y}\left(\cos\varphi+\frac{W_y}{W_z}\sin\varphi\right). \quad (26.6)$$

Условие прочности для таких сечений принимает вид:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_{\max}}{W_y}\left(\cos\varphi + \frac{W_y}{W_z}\sin\varphi\right) \leqslant [\sigma]. \tag{26.7}$$

При подборе сечений приходится задаваться отношением $\frac{W_y}{W_z}$ и, зная $[\sigma]$, $M_{\max}$ и угол φ, путём последовательных попыток искать значения W_y и W_z, удовлетворяющие условию прочности (26.7). В случае несимметричных сечений, не имеющих выступающих углов, т. е. при использовании условия прочности (26.5), при каждой новой попытке подбора сечения необходимо предварительно вновь найти положение нейтральной линии и координаты наиболее удалённой точки (y_1 и z_1). В случае прямоугольного сечения $\frac{W_y}{W_z} = \frac{h}{b}$; поэтому, задаваясь отношением $\frac{h}{b}$, из условия (26.7) без затруднений можно найти величину W_y и размеры поперечного сечения.



Фиг. 413.

На фиг. 413 изображены эпюры распределения напряжений для балки прямоугольного сечения.

Уравнение (26.4) показывает, что углы α и φ не равны, т. е. нейтральная линия *не перпендикулярна* к плоскости внешних сил, как это было при плоском изгибе. Эта перпендикулярность имеет место лишь при

$$J_y = J_z, \tag{26.8}$$

но в этом случае все оси главные, и косой изгиб невозможен; в какой бы плоскости ни была расположена нагрузка, мы будем иметь дело с плоским изгибом. Это будет соблюдаться для сечений квадратного, круглого, являющихся правильными фигурами, и любых других, для которых будет выполнено условие (26.8).

Что касается касательных напряжений, то и их можно вычислить тем же приёмом, которым мы пользовались при вычислении нормальных; суммарное напряжение будет равно геометрической сумме касательных напряжений от изгиба в каждой из главных плоскостей. Практического значения определение этих напряжений обычно не имеет.

§ 158. Определение деформаций при косом изгибе.

Для определения прогибов в различных сечениях балки при косом изгибе опять применим способ сложения действия сил. Возвращаясь к примеру, рассмотренному в предыдущем параграфе, находим сначала прогиб точки B (свободного конца балки) только от действия силы P_z; этот прогиб f_z будет направлен по оси z и равен

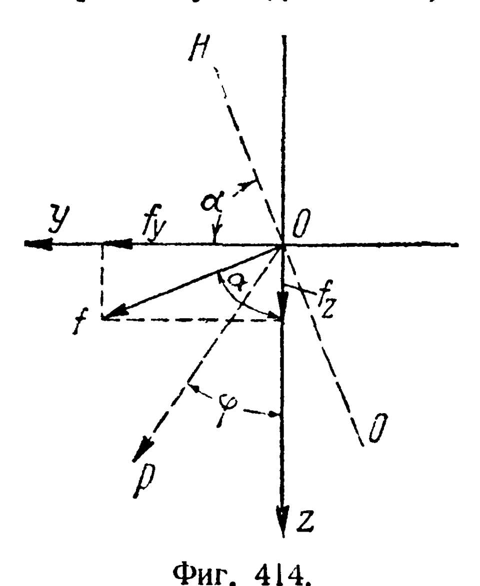
$$f_z = \frac{P_z l^3}{3EJ_y} = \frac{P\cos\varphi\, l^3}{3EJ_y},$$

где l — пролёт балки. Аналогично прогиб точки B от одной силы P_y будет направлен по оси y и выразится формулой

$$f_y = \frac{P_y l^3}{3EJ_z} = \frac{P\sin\varphi\, l^3}{3EJ_z}.$$

Полный прогиб f конца балки будет представлять собой геометрическую (фиг. 414) сумму обоих этих прогибов; он равен

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}. \qquad (26.9)$$



Фиг. 414.

При этом

$$\frac{f_y}{f_z} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\frac{J_y}{J_z} = \operatorname{tg}\varphi\frac{J_y}{J_z} = \operatorname{tg}\alpha \qquad (26.10)$$

и

$$f = \frac{f_y}{\sin\alpha} = \frac{f_z}{\cos\alpha}.$$

Отсюда следует, что угол, составленный полным прогибом f с осью z, равен углу α, т. е. прогиб f направлен *перпендикулярно к нейтральной оси.* Изгиб балки происходит не в плоскости действия внешних сил, а в плоскости, перпендикулярной к нейтральной оси (фиг. 414).

Условимся принимать за ось y главную ось с наибольшим моментом инерции; тогда плоскость xOz будет плоскостью *наибольшей жёсткости*, поскольку прогибы при изгибе балки в этой плоскости будут наименьшими. Так как при $J_y > J_z$, как в рассмотренных примерах, и $\alpha > \varphi$, то *плоскость изгиба* отклоняется от плоскости наибольшей жёсткости больше, чем *плоскость внешних сил.* Эта разница будет тем большей, чем больше отношение $\frac{J_y}{J_z}$. Значит, для узких и высоких сечений, у которых отношение главных моментов

инерции может быть весьма велико, уже *небольшое отклонение* плоскости действия внешних сил от плоскости наибольшей жёсткости вызывает весьма значительное отклонение плоскости изгиба балки.

Пока для балки такого сечения внешние силы расположены в плоскости наибольшей жёсткости xOz, прогибы будут лежать в той же плоскости и будут небольшими, так как момент инерции J_y будет значительным. Стоит дать плоскости внешних сил отклонение от оси Oz на небольшой угол φ, как сейчас же возникнут уже большие прогибы в направлении оси y, на которые очень часто конструктор и не рассчитывает. Прогибы же в направлении оси z будут оставаться почти без изменения. Для оценки этого явления рассмотрим числовой пример. Возьмём деревянную балку с сечением (фиг. 409), имеющим высоту $h=20$ *см*, ширину $b=6$ *см*; тогда

$$J_y=\frac{20^3\cdot 6}{12}=4000\ см^4;\quad J_z=\frac{6^3\cdot 20}{12}=360\ см^4.$$

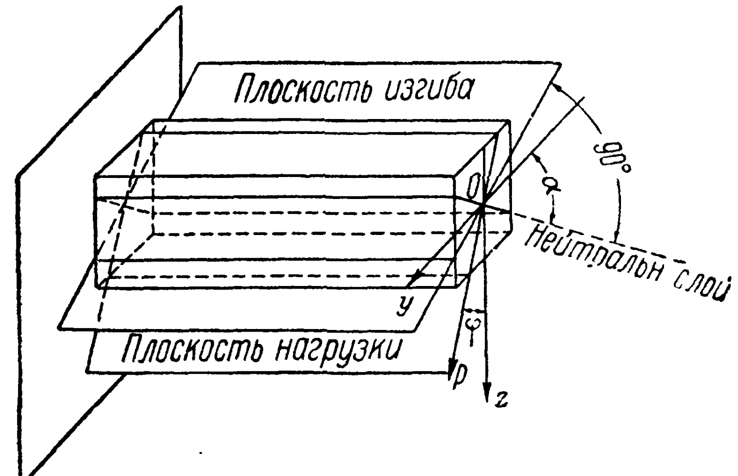
Отношение моментов инерции равно

$$\frac{J_y}{J_z}=\frac{4000}{360}\approx 11.$$

Тогда при отклонении плоскости действия внешних сил от оси z всего на 5° будем иметь:

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\varphi\frac{J_y}{J_z}=$$
$$=0{,}0875\cdot 11=0{,}963$$

и $\alpha\approx 44°$.



Фиг. 415.

Прогибы в направлении оси y будут почти равны прогибам в направлении оси z:

$$f_y=f_z\operatorname{tg}\alpha=0{,}963f_z.$$

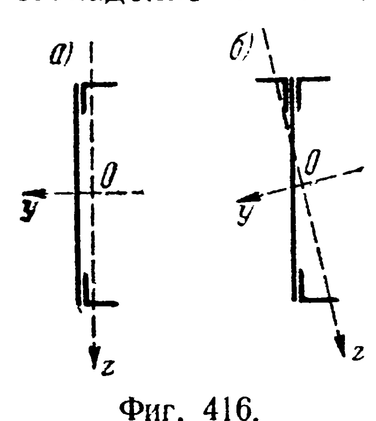
Вместе с тем, при отклонении силы от плоскости наибольшей жёсткости произойдёт и значительное повышение нормальных напряжений. Так, в рассмотренном выше примере наибольшие нормальные напряжения (по сравнению со случаем плоского изгиба при $\varphi=0$) увеличатся в отношении (см. формулу 26.6):

$$\frac{\frac{M}{W_y}\left(\cos\varphi+\frac{W_y}{W_z}\sin\varphi\right)}{\frac{M}{W_y}}=\left(1+\frac{h}{b}\operatorname{tg}\varphi\right)\cos\varphi\approx\left(1+\frac{20}{6}0{,}0875\right)1=1{,}29.$$

На фиг. 415 изображено относительное расположение плоскостей нагрузки, изгиба и нейтральной.

Балки, главные моменты инерции сечений которых значительно отличаются друг от друга, будут хорошо работать при изгибе в плоскости наибольшей жёсткости (высокие прямоугольники, двутавры,

швеллеры), но окажутся невыгодными при косом изгибе. Поэтому в тех случаях, когда трудно рассчитывать на достаточно точное совпадение плоскости внешних сил с главной плоскостью балки, конструктор должен избегать применения подобных сечений или принимать дополнительные конструктивные меры (постановка связей), чтобы воспрепятствовать боковым деформациям балок при наличии косого изгиба.



Фиг. 416.

Особенно опасным может явиться неосторожное усиление существующих конструкций. Нам известен случай, когда балка швеллерного сечения из листа и двух уголков (фиг. 416, *а*), работавшая на нагрузку, расположенную в плоскости xOz, была усилена приваркой дополнительного уголка (фиг. 416, *б*). Это вызвало наклон главных осей к плоскости внешних сил и совершенно непредусмотренные деформации балки в боковом направлении.

§ 159. Примеры расчётов при косом изгибе.

Пример 105. Подобрать сечение деревянной обрешетины высотой h и шириной b и определить перемещение середины её пролёта; принято отношение $h/b=2$; пролёт обрешетины (расстояние между стропильными фермами) равен $l=4$ *м*, а угол наклона кровли к горизонту 25°; нагрузка от снега и собственного веса перекрытия является равномерно распределённой с интенсивностью $q=400$ *кг/м*. Обрешетина устроена как балка, шарнирно-опёртая по концам. Допускаемое напряжение равно 100 *кг/см*², модуль упругости материала $E=10^5$ *кг/см*².

Наибольший изгибающий момент M_{max} будет посредине пролёта; он равен

$$M_{max}=\frac{ql^2}{8}=\frac{400\cdot 16}{8}=800\ кгм.$$

Так как угол φ равен углу наклона кровли, т. е. 25°, то из формулы (26.7) и условия $h/b=2$ следует, что

$$W_y=\frac{bh^2}{6}=\frac{h^3}{12}\geqslant\frac{M_{max}}{[\sigma]}\left(\cos\varphi+\frac{h}{b}\sin\varphi\right)=\frac{80\,000}{100}(0{,}906+2\cdot 0{,}423)=1402\,см^3.$$

Отсюда $h\geqslant\sqrt[3]{12\cdot 1402}=25{,}6\approx 26$ *см* и $b=13$ *см*.

Наибольший прогиб обрешетины будет посредине пролёта. Моменты инерции сечения равны

$$J_y=\frac{bh^3}{12}=\frac{13\cdot 26^3}{12}=19\,050\,см^4,\quad J_z=\frac{b^3h}{12}=\frac{13^3\cdot 26}{12}=4760\ см^4.$$

Угол наклона нейтральной оси α определится условием

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\varphi\frac{J_y}{J_z}=\operatorname{tg}25^\circ\cdot\frac{19\,050}{4760}=1{,}865;$$

отсюда $\alpha=61^\circ 50'$ и угол, составленный плоскостью изгиба с плоскостью внешних сил, равен $\alpha-\varphi=61^\circ 50'-25^\circ=36^\circ 50'$.

Прогиб в плоскости наибольшей жёсткости равен

$$f_z=\frac{5ql^4\cos\varphi}{384J_yE}=\frac{5\cdot 4\cdot 4^4\cdot 10^8\cdot 0{,}906}{384\cdot 19\,050\cdot 10^5}=0{,}64\ см.$$

Полный прогиб равен

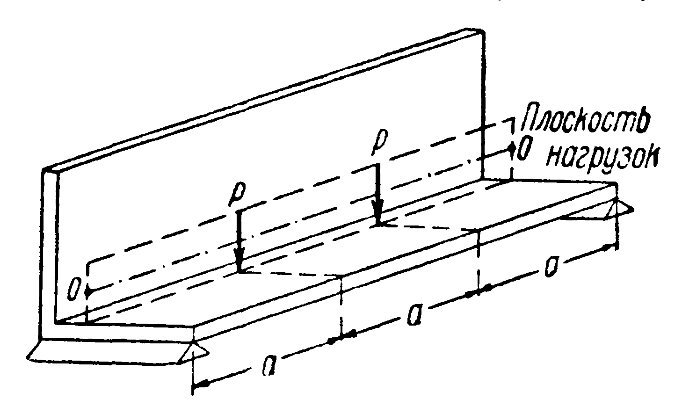
$$f = \frac{f_z}{\cos\alpha} = \frac{0,64}{0,472} = 1,35 \text{ см}.$$

Прогиб в направлении оси y (параллельно стороне b) равен

$$f_y = f_z \operatorname{tg}\alpha = 0,64 \cdot 1,865 = 1,19 \text{ см}.$$

Таким образом в рассмотренном случае прогиб в направлении оси Oy гораздо больше, чем в направлении оси Oz, и почти равен полному прогибу.

Пример 106. Уголок размерами $160 \times 160 \times 16$ *мм* работает как балка, шарнирно опёртая по концам (фиг. 417). Он нагружен двумя одинаковыми силами $P = 1000$ *кг*, расположенными симметрично в третях пролёта, равного $l = 3$ *м*; плоскость действия сил параллельна одной из сторон уголка и проходит через центр тяжести сечения. Найдём наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения в уголке.



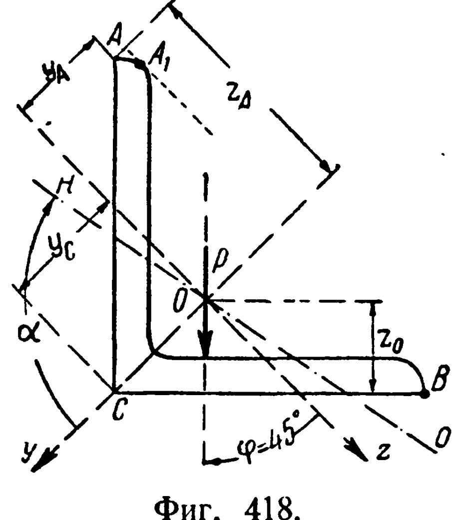
Фиг. 417.

Так как средняя часть уголка с наибольшим изгибающим моментом испытывает чистый изгиб, то на результатах вычисления напряжений не отразится то обстоятельство, что плоскость действия нагрузок не проходит через центр изгиба, расположенный на пересечении средних линий обеих полок.

Наибольший изгибающий момент равен

$$M_{\max} = P\frac{l}{3} = 1000 \cdot 100 = 10^5 \text{ кгсм}.$$

Вследствие симметрии сечения главные оси составляют углы 45° с направлениями полок. Следовательно:



Фиг. 418.

$$M_y = M_z = M = M_{\max}\cos 45° =$$
$$= 10^5 \cdot 0,707 = 7,07 \cdot 10^4 \text{ кгсм}.$$

По сортаменту главные моменты инерции равны: $J_y = 1866$ *см*^{4} и $J_z = 485$ *см*^{4}. Угол α определяется формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{J_y}{J_z}\operatorname{tg}\varphi = \frac{1866}{485} \cdot 1 = 3,85 \quad \text{и} \quad \alpha = 75°26'.$$

Положение нейтральной линии показано на фиг. 418; из неё видно, что опасными точками, наиболее удалёнными от нейтральной оси, являются A_1 и C. Для упрощения расчётов вместо точки A_1 в качестве опасной точки допустимо рассматривать расположенную вблизи от неё точку A. Координаты точек A и C равны:

$$z_A = 16\cos 45° = 11,3 \text{ см}; \qquad z_C = 0;$$

$$y_A = z_A - \frac{z_0}{\cos 45°} = 11,3 - \frac{4,55}{0,707} = 4,9 \text{ см}; \quad y_C = \frac{z_0}{\cos 45°} = \frac{4,55}{0,707} = 6,4 \text{ см}.$$

Здесь $z_0 = 4,55$ *см* — расстояние от центра тяжести уголка до наружных кромок (по сортаменту).

Напряжения определяются формулой

$$\sigma = \frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z} = M\left(\frac{z}{J_y} + \frac{y}{J_z}\right).$$

Для точки A напряжения от обоих изгибов представляют сжатие:

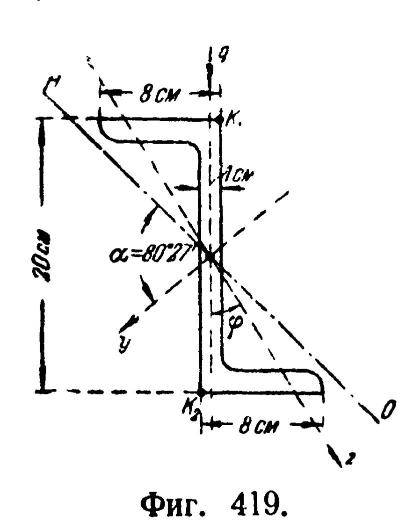
$$\sigma_A = -7{,}07 \cdot 10^4 \left(\frac{11{,}3}{1866} + \frac{4{,}9}{485}\right) = -1143 \text{ кг/см}^2.$$

В точке C будет растяжение

$$\sigma_C = +7{,}07 \cdot 10^4 \frac{6{,}4}{485} = +933 \text{ кг/см}^2.$$

Так как точка C лежит на одной из главных осей инерции, то второе слагаемое в формуле для напряжений равно нулю.

Пример 107. Стержень зетобразного сечения пролётом $l = 3$ *м* шарнирно опёрт по концам; он нагружён равномерно распределённой нагрузкой $q = 500$ *кг/м*; размеры поперечного сечения и расположение грузовой плоскости даны на фиг. 419. Главные моменты инерции сечения равны $J_y = 2765$ *см*^{4}, $J_z = 160$ *см*^{4}; угол, составленный плоскостью наибольшей жёсткости со стенкой зета, равен 18°. Толщина стенки 1 *см*. Найти наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб.



Фиг. 419.

Наибольший момент $\max M = \frac{ql^2}{8} = \frac{500 \cdot 3^2}{8} = 562$ *кгм*. Угол $\varphi = 18°$, $\sin\varphi = 0{,}309$; $\cos\varphi = 0{,}951$. Положение нейтральной оси определяется отклонением её от оси y на угол α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi \frac{J_y}{J_z} = \operatorname{tg} 18° \cdot \frac{2765}{160}; \ \operatorname{tg}\alpha = 5{,}95;$$

$$\alpha = 80°27'.$$

Построение показывает, что опасными точками являются k_1 и k_2. Вычислим координаты этих точек z_k и y_k:

$$z_k = 10 \cos 18° - 0{,}5 \sin 18° = 9{,}51 - 0{,}5 \cdot 0{,}309 = 9{,}36 \text{ см};$$
$$y_k = 10 \sin 18° + 0{,}5 \cos 18° = 3{,}09 + 0{,}5 \cdot 0{,}951 = 3{,}57 \text{ см}.$$

Наибольшее напряжение равно

$$\max\sigma = \pm \max M \left[\frac{\cos\varphi\, z_k}{J_y} + \frac{\sin\varphi\, y_k}{J_z}\right] =$$
$$= \pm 56\,200 \left[\frac{0{,}951 \cdot 9{,}36}{2765} + \frac{0{,}309 \cdot 3{,}57}{160}\right] =$$
$$= \pm 56\,200\,[0{,}0032 + 0{,}0069] = \pm 568 \text{ кг/см}^2.$$

Прогиб в направлении оси z равен

$$f_z = \frac{5ql^4 \cos\varphi}{384EJ_y} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 3^4 \cdot 10^8 \cdot 0{,}951}{384 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2765} = 0{,}091 \text{ см}.$$

Полный прогиб

$$f = \frac{f_z}{\cos\alpha} = \frac{0{,}091}{0{,}175} = 0{,}52 \text{ см}.$$

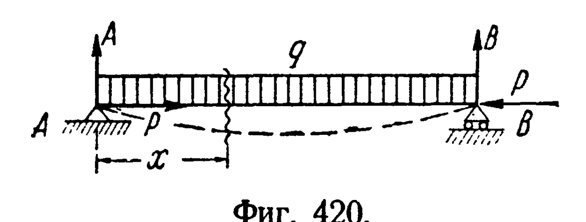
ГЛАВА XXVII.

СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И РАСТЯЖЕНИЯ ИЛИ СЖАТИЯ.

§ 160. Изгиб балки при действии продольных и поперечных сил.

На практике очень часто встречаются случаи совместной работы стержня на изгиб и на растяжение или сжатие. Подобного рода деформация может вызываться или совместным действием на балку продольных и поперечных сил, или только одними продольными силами.

Первый случай изображён на фиг. 420. На балку AB действуют равномерно распределённая нагрузка q и продольные сжимающие



Фиг. 420.

силы P. Предположим, что прогибами балки по сравнению с размерами поперечного сечения можно пренебречь; тогда с достаточной для практики степенью точности можно считать, что и после деформации силы P будут вызывать лишь осевое сжатие балки.

Применяя способ сложения действия сил, мы можем найти нормальное напряжение в любой точке каждого поперечного сечения балки как алгебраическую сумму напряжений, вызванных силами P и нагрузкой q.

Сжимающие напряжения σ_P от сил P равномерно распределены по площади F поперечного сечения и одинаковы для всех сечений:

$$\sigma_P = -\frac{P}{F};$$

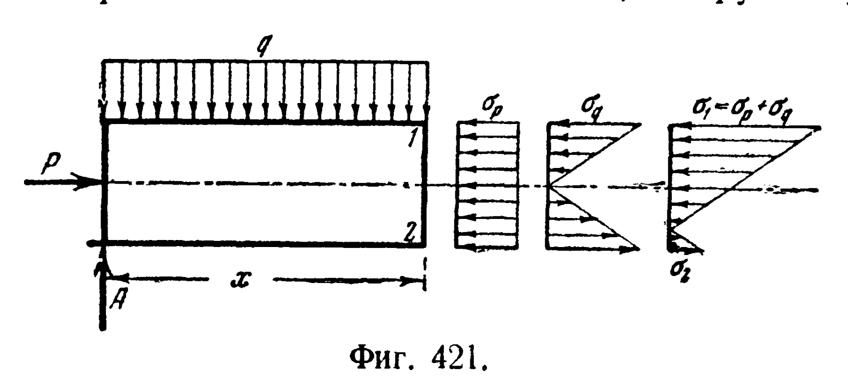
нормальные напряжения от изгиба в вертикальной плоскости в сечении с абсциссой x, которая отсчитана, скажем, от левого конца балки, выражаются формулой

$$\sigma_q = \frac{M(x)\,z}{J_y}.$$

Таким образом, полное напряжение в точке с координатой z (считая от нейтральной оси) для этого сечения равно

$$\sigma = \sigma_P + \sigma_q = -\frac{P}{F} + \frac{M(x)\,z}{J_y}.$$

На фиг. 421 изображены эпюры распределения напряжений в рассматриваемом сечении от сил P, нагрузки q и суммарная эпюра. Наибольшее напряжение в этом сечении будет в верхних волокнах, где оба вида деформации вызывают сжатие; в нижних волокнах может быть или сжатие или растяжение в зависимости от числовых величин напряжений σ_P и σ_q. Для составления условия прочности найдём наибольшее нормальное напряжение.



Фиг. 421.

Так как напряжения от сил P во всех сечениях одинаковы и равномерно распределены, то опасными будут волокна, наиболее напряжённые от изгиба. Такими являются крайние волокна в сечении с наибольшим изгибающим моментом; для них

$$\sigma_{q\max} = \pm \frac{M_{\max}}{W}.$$

Таким образом, напряжения в крайних волокнах *1* и *2* (фиг. 421) среднего сечения балки выражаются формулой

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = -\frac{P}{F} \mp \frac{M_{\max}}{W},$$

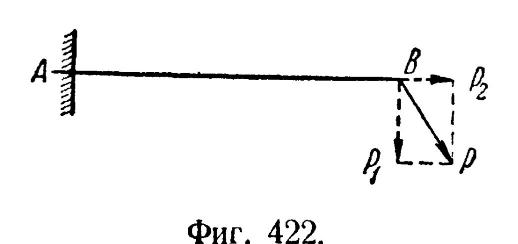
и расчётное напряжение будет равно

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_1| = \left|\frac{P}{F} + \frac{M_{\max}}{W}\right|.$$

Если бы силы P были растягивающими, то знак первого слагаемого изменился бы, опасными были бы нижние волокна балки.

Обозначая буквой N сжимающую или растягивающую силу, можем написать общую формулу для проверки прочности:

$$\sigma_{\max} = \pm\left[\frac{N}{F} + \frac{M_{\max}}{W}\right] \leqslant [\sigma]. \qquad (27.1)$$



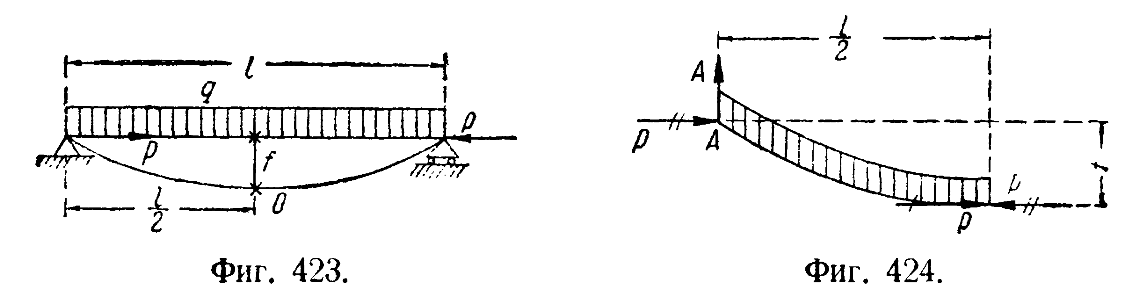
Фиг. 422.

При составлении формулы (27.1) предполагалось, что сечение симметрично относительно нейтральной оси и материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию.

Описанный ход расчёта применяется и при действии на балку наклонных сил (фиг. 422); такую силу можно разложить на нормальную к оси, изгибающую балку, и продольную, сжимающую или растягивающую.

§ 161. Учёт деформаций балки.

Если прогибами балки нельзя пренебречь по сравнению с размерами сечения, то следует учитывать не только равномерно распределённые напряжения сжатия или растяжения, но и изгиб от продольных сил. На фиг. 423 изображена изогнутая ось балки, рассмотренной в предыдущем параграфе; наибольший прогиб посредине пролёта обозначен буквой f.



Фиг. 423. Фиг. 424.

Разрежем балку в опасном сечении посредине пролёта, оставим левую часть (фиг. 424) и вычислим изгибающий момент. На отсечённую часть помимо сплошной нагрузки q и вызванной ею реакции A будет действовать приложенная в точке A горизонтальная сила P. Прикладывая в центре тяжести O проведённого сечения две равные и противоположные силы P, получаем, что однажды зачёркнутая сила P вызывает в проведённом сечении уравновешивающую силу, создающую осевое сжатие, а две дважды перечёркнутые силы P дают пару с плечом f, добавляющуюся к изгибающему моменту M_0, вызванному поперечной нагрузкой. Таким образом, полный изгибающий момент в рассмотренном сечении равен

$$M_{max} = M_{0max} + Pf. \tag{27.2}$$

Наибольшее нормальное напряжение выражается формулой

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_{0max} + Pf}{W}.$$

Прогиб f зависит от изгибающих моментов, вызванных не только поперечными нагрузками, но и продольными силами P; поэтому для его определения следует составить и интегрировать дифференциальное уравнение изогнутой оси с учётом всех сил, действующих на стержень.

Здесь мы встречаемся с тем случаем, для которого принцип независимости действия сил уже неприменим. Более подробно этот вопрос рассматривается ниже, в § 209. Однако на практике необходимо уметь оценить, следует ли учитывать добавочный изгибающий момент от продольных сил или им можно пренебречь и ограничиться проверкой прочности, описанной в предыдущем параграфе.

Принимая во внимание, что момент Pf является лишь поправкой, можно её вычислить путём последовательных приближений. Сначала найдём прогиб f от одной только поперечной нагрузки; в рассматриваемом примере он будет равен

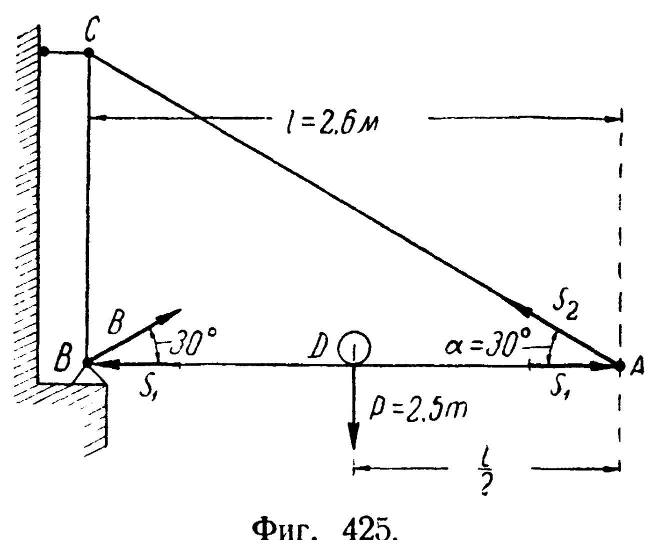
$$f = \frac{5ql^4}{384EJ} = \frac{5M_{0max}l^2}{48FJ}, \tag{27.3}$$

так как $M_{0max} = \frac{ql^2}{8}$; вычислим теперь $M_{max} = M_{0max} + Pf$ и подставим полученное значение вместо M_{0max} в формулу (27.3); получим улучшенное значение прогиба f; при желании эту операцию можно повторить ещё раз.

Таким образом можно приближённо оценить влияние добавочного изгибающего момента Pf.

§ 162. Примеры.

Пример 108. Консольный кран (фиг. 425), состоящий из двутавровой балки AB и тяги AC, несёт груз $P=2{,}5$ *т*, расположенный посредине пролёта балки AB. Пролёт балки равен $l=2{,}6$ *мм*, угол между тягой и балкой $\alpha=30^\circ$. Подберём сечение балки AB.



Фиг. 425.

Балка AB подвергается действию изгибающих и сжимающих усилий. Наибольший изгибающий момент для балки AB в точке D только от P равен

$$M_{0\max}=\frac{Pl}{4}=\frac{2{,}5\cdot 2{,}6}{4}=1{,}625\ \textit{тм}.$$

Балка AB находится в равновесии под действием трёх сил: P, реакции опоры B и усилия S_2 в тяге AC. Сумма моментов всех сил, действующих на балку AB, относительно точки B должна быть равна нулю:

$$\sum M_B=P\frac{l}{2}-S_2 l\sin\alpha=0,$$

откуда $S_2=P$.

Стержень AB будет сжиматься усилиями S_1, равными горизонтальным составляющим B и S_2:

$$S_1=S_2\cos 30^\circ=P\cos 30^\circ=2{,}5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2{,}16\ \textit{т}.$$

Допускаемое напряжение $[\sigma]$ возьмём равным 1000 *кг/см²*. Тогда, пренебрегая в первом приближении сжимающей силой, получаем для момента сопротивления балки величину

$$W=\frac{162\,500}{1000}=162{,}5\ \textit{см}^3.$$

Этому соответствует профиль двутавр № 20 с $F=26{,}8$ *см²* и $W=184$ *см³*. Вычислим теперь наибольшее нормальное напряжение в балке этого профиля с учётом как изгибающего момента $M_{\max}$, так и нормальной силы S_1:

$$|\sigma_{\max}|=\left|\frac{S_1}{F}+\frac{M_{\max}}{W}\right|=\frac{2160}{26{,}8}+\frac{162\,500}{184}=81+883=964\ \textit{кг/см}^2.$$

Таким образом, сечение балки можно оставить без изменения.

Определим теперь, какую погрешность мы допустили, пренебрегая моментом от продольных сил. Прогиб балки от одной поперечной нагрузки

$$f_0=\frac{Pl^3}{48EJ}=\frac{2500\cdot 2{,}6^3\cdot 10^6}{48\cdot 2\cdot 10^6\cdot 1840}=0{,}249\ \textit{см}=\frac{M_{0\max}l^3}{12EJ}.$$

Наибольший изгибающий момент приблизительно равен по (27.2):

$$M_{0\max}+S_1 f_0=162\,500+2160\cdot 0{,}249=163\,040\ \textit{кгсм}.$$

Исправленное значение прогиба

$$f=\frac{(M_{0max}+S_1f_0)\,l^3}{12EJ}=f_0\,\frac{M_{0max}+S_1f_0}{M_{0max}}=0{,}249\,\frac{163\,040}{162\,500}=0{,}250\ см.$$

Изгибающий момент от продольных сил

$$S_1f=2160\cdot 0{,}250=540\ кгсм,$$

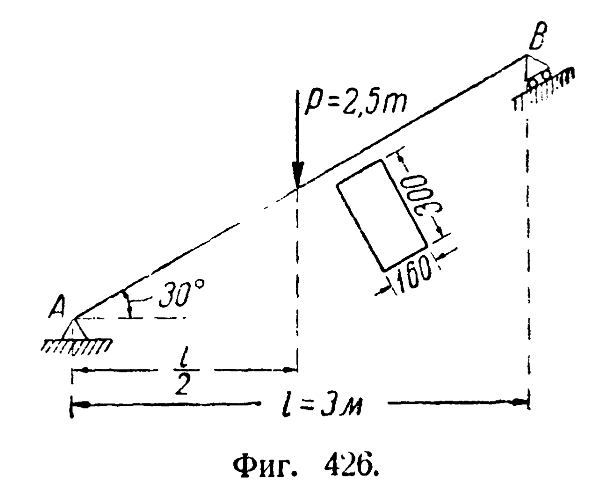
что составляет всего $^1/_3\%$ от изгибающего момента, вызванного одними поперечными нагрузками. Таким образом, в данном случае этой величиной вполне можно пренебречь.

Пример 109. Наклонная балка (фиг. 426) нагружена посредине своей длины силой $P=2{,}5$ *т*; найти наибольшее сжимающее напряжение в балке.

Верхняя половина балки только изгибается; нижняя изгибается и сжимается. Изгиб вызывает сила $P\cos 30°$, а сжатие — сила $P\sin 30°$. Наибольший изгибающий момент равен

$$M_{max}=\frac{P\cos 30°\left(\frac{l}{\cos 30°}\right)}{4}=$$

$$=\frac{Pl}{4}=\frac{2{,}5\cdot 3}{4}=1{,}875\ тм.$$



Фиг. 426.

Момент сопротивления сечения и площадь поперечного сечения соответственно равны:

$$W=\frac{bh^2}{6}=\frac{16\cdot 30^2}{6}=2400\ см^3;\quad F=16\cdot 30=480\ см^2.$$

Наибольшие сжимающие напряжения (в верхних волокнах балки, в сечении слева от силы) равны:

$$\sigma=-\frac{P\sin 30°}{F}-\frac{M_{max}}{W}=-\frac{2500}{2\cdot 480}-\frac{187\,500}{2400}=-2{,}6-78{,}1=-80{,}7\ кг/см^2.$$

§ 163. Внецентренное сжатие или растяжение.

Вторым практически важным случаем сложения деформаций от изгиба и от продольных сил является так называемое внецентренное сжатие или растяжение, вызываемое одними продольными силами. Этот вид деформации получается при действии на стержень двух равных и прямопротивоположных сил P, направленных по прямой AA, параллельной оси стержня (фиг. 427). Расстояние точки A от центра тяжести сечения $OA=e$ называется *эксцентриситетом.*

Рассмотрим сначала случай внецентренного сжатия, как имеющий большее практическое значение.

Нашей задачей явится нахождение наибольших напряжений в материале стержня и проверка прочности. Для решения этой задачи приложим в точках O по две равные и противоположные

силы P (фиг. 428). Это не нарушит равновесия стержня в целом и не изменит напряжений в его сечениях.

Силы P, зачёркнутые один раз, вызовут осевое сжатие, а пары сил P, зачёркнутые дважды, вызовут чистый изгиб моментами $M_0 = Pe$. Расчётная схема стержня показана на фиг. 429. Так как плоскость действия изгибающих пар OA может не совпадать ни с одной из главных плоскостей инерции стержня, то в общем случае имеет место комбинация продольного сжатия и чистого косого изгиба.

Так как при осевом сжатии и чистом изгибе напряжения во всех сечениях одинаковы, то проверку прочности можно произвести для любого сечения, хотя бы $C - C$ (фиг. 429).

Отбросим верхнюю часть стержня и оставим нижнюю (фиг. 430). Пусть оси Oy и Oz будут

Фиг. 427. Фиг. 428. Фиг. 429. Фиг. 430.

главными осями инерции сечения. Координаты точки A, — точки пересечения линии действия сил P с плоскостью сечения, — пусть будут y_p и z_p. Условимся выбирать положительные направления осей Oy и Oz таким образом, чтобы точка A оказалась в первом квадранте. Тогда y_p и z_p будут положительны.

Для того чтобы отыскать наиболее опасную точку в выбранном сечении, найдём нормальное напряжение σ в любой точке B с координатами z и y. Напряжения в сечении $C - C$ будут складываться из напряжений осевого сжатия силой P и напряжений от чистого косого изгиба парами с моментом Pe, где $e = OA$. Сжимающие напряжения от осевых сил P в любой точке равны $\frac{P}{F}$, где F — площадь поперечного сечения стержня; что касается косого изгиба, то

заменим его действием изгибающих моментов в главных плоскостях. Изгиб в плоскости xOy вокруг нейтральной оси Oz будет вызываться моментом Py_P и даст в точке B нормальное сжимающее напряжение $\frac{Py_P \cdot y}{J_z}$.

Точно так же нормальное напряжение в точке B от изгиба в главной плоскости xOz, вызванное моментом Pz_P, будет сжимающим и выразится формулой $\frac{Pz_P \cdot z}{J_y}$.

Суммируя напряжения от осевого сжатия и двух плоских изгибов и считая сжимающие напряжения отрицательными, получаем такую формулу для напряжения в точке B:

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{Py_P y}{J_z} - \frac{Pz_P z}{J_y} = -P\left(\frac{1}{F} + \frac{y_P y}{J_z} + \frac{z_P z}{J_y}\right). \qquad (27.4)$$

Эта формула годится для вычисления напряжений в любой точке любого сечения стержня, стоит только вместо y и z подставить координаты точки относительно главных осей с их знаками.

В случае внецентренного растяжения знаки всех составляющих нормального напряжения в точке B изменятся на обратные. Поэтому для того, чтобы по формуле (27.4) получать правильный знак напряжений как при внецентренном сжатии, так и при внецентренном растяжении, нужно, кроме знаков координат y и z, учитывать также и знак силы P; при растяжении перед выражением

$$P\left(\frac{1}{F} + \frac{y_P y}{J_z} + \frac{z_P z}{J_y}\right)$$

должен стоять знак плюс, при сжатии — минус.

Полученной формуле можно придать несколько иной вид; вынесем за скобку множитель $\frac{P}{F}$; получим:

$$-\frac{P}{F}\left[1 + \frac{y_P y}{i_z^2} + \frac{z_P z}{i_y^2}\right]. \qquad (27.5)$$

Здесь i_z и i_y — радиусы инерции сечения относительно главных осей (вспомним, что $J_z = i_z^2 \cdot F$ и $J_y = i_y^2 \cdot F$).

Для отыскания точек с наибольшими напряжениями следует так выбирать y и z, чтобы σ достигло наибольшей величины. Переменными в формулах (27.4) и (27.5) являются два последних слагаемых, отражающих влияние изгиба. А так как при изгибе наибольшие напряжения получаются в точках, наиболее удалённых от нейтральной оси, то здесь, как и при косом изгибе, надо отыскать положение нейтральной оси.

Обозначим координаты точек этой линии через y_0 и z_0; так как в точках нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю, то после подстановки в формулу (27.5) значений y_0 и z_0 получаем:

$$0=-\frac{P}{F}\left[1+\frac{y_P y_0}{i_z^2}+\frac{z_P z_0}{i_y^2}\right],$$

или

$$1+\frac{y_P y_0}{i_z^2}+\frac{z_P z_0}{i_y^2}=0. \qquad (27.6)$$

Это и будет уравнение нейтральной оси; очевидно, мы получили уравнение прямой, не проходящей через центр тяжести сечения.

Чтобы построить эту прямую, проще всего вычислить отрезки, отсекаемые ею на осях координат. Обозначим эти отрезки a_y и a_z. Чтобы найти отрезок a_y, отсекаемый на оси Oy, надо в уравнении (27.6) положить

$$z_0=0; \quad y_0=a_y;$$

тогда мы получаем:

$$1+\frac{y_P a_y}{i_z^2}=0 \quad \text{и} \quad a_y=-\frac{i_z^2}{y_P}; \qquad (27.7)$$

подобным же образом, полагая

$$y_0=0; \quad z_0=a_z,$$

получаем:

$$a_z=-\frac{i_y^2}{z_P}. \qquad (27.8)$$

Если величины y_P и z_P положительны, то отрезки a_y и a_z будут отрицательны, т. е. нейтральная ось будет расположена по другую сторону центра тяжести сечения, чем точка A (фиг. 430).

Нейтральная ось делит сечение на две части — сжатую и растянутую; на фиг. 430 растянутая часть сечения заштрихована. Проводя к контуру сечения касательные, параллельные нейтральной оси, получаем две точки D_1 и D_2, в которых будут наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения.

Измеряя координаты y и z этих точек и подставляя их значения в формулу (27.4), вычисляем величины наибольших напряжений в точках D_1 и D_2:

$$\sigma_{(1,2)}=-P\left[\frac{1}{F}+\frac{y_P y_{(1,2)}}{J_z}+\frac{z_P z_{(1,2)}}{J_y}\right]. \qquad (27.9)$$

Если материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности получает такой вид:

$$|\sigma_{\max}|=P\left[\frac{1}{F}+\frac{y_P y_1}{J_z}+\frac{z_P z_1}{J_y}\right]\leqslant[\sigma]. \qquad (27.10)$$

Для поперечных сечений с выступающими углами, у которых обе главные оси инерции являются осями симметрии (прямоугольник, двутавр и др.) $y_1 = y_{max}$ и $z_1 = z_{max}$; поэтому формула (27.10) упрощается, и мы имеем

$$|\sigma_{max}| = P\left[\frac{1}{F} + \frac{y_P}{W_z} + \frac{z_P}{W_y}\right] \leqslant [\sigma]. \qquad (27.11)$$

Если же материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо проверить прочность стержня как в растянутой, так и в сжатой зонах.

Однако может случиться, что и для таких материалов будет достаточно одной проверки прочности. Из формул (27.7) и (27.8) видно, что положение точки A приложения силы и положение нейтральной оси связаны: чем ближе подходит точка A к центру сечения, тем меньше величины y_P и z_P и тем больше отрезки a_y и a_z. Таким образом, с *приближением* точки A к центру тяжести сечения нейтральная ось *удаляется* от него, и наоборот. Поэтому при некоторых положениях точки A нейтральная ось будет проходить *вне* сечения и всё сечение будет работать на напряжения одного знака. Очевидно в этом случае всегда достаточно проверить прочность материала в точке D_1.

Фиг. 431.

Разберём практически важный случай, когда к стержню прямоугольного сечения (фиг. 431) приложена внецентренно сила P в точке A, лежащей на главной оси сечения Oy. Эксцентриситет OA равен e, размеры сечения b и d. Применяя полученные выше формулы, имеем:

$$y_P = +e; \quad z_P = 0.$$

Напряжение в любой точке B равно

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_P y F}{J_z}\right) = \frac{P}{bd}\left(1 + \frac{12ey}{b^2}\right), \qquad (27.12)$$

так как

$$\frac{F}{J_z} = \frac{12bd}{b^3 d} = \frac{12}{b^2}.$$

Напряжения во всех точках линии, параллельной оси Oz, одинаковы. Положение нейтральной оси определяется отрезками

$$a_y = -\frac{i_z^2}{e} = -\frac{b^2}{12e}; \quad a_z = \infty. \qquad (27.13)$$

Нейтральная ось параллельна оси Oz; точки с наибольшими растягивающими и сжимающими напряжениями расположены на сторонах 1—1 и 3—3.

Значения σ_{max} и σ_{min} получатся, если в формулу (27.12) подставить вместо y его значения $\pm\frac{b}{2}$. Тогда

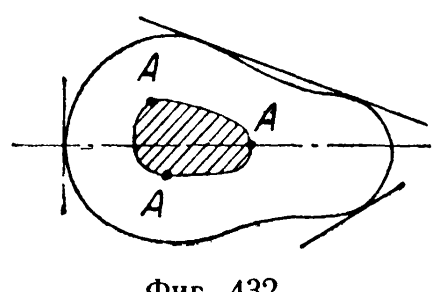
$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{P}{bd}\left[1\pm\frac{6e}{b}\right]. \qquad (27.14)$$

§ 164. Ядро сечения.

При конструировании стержней из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (бетон, камень), весьма желательно добиться того, чтобы всё сечение работало лишь на сжатие. Этого можно достигнуть, не давая точке приложения силы P слишком далеко отходить от центра тяжести сечения, ограничивая величину эксцентриситета.

Конструктору желательно заранее знать, какой эксцентриситет при выбранном типе сечения можно допустить, не рискуя вызвать в сечениях стержня напряжений разных знаков. Здесь вводится понятие о так называемом *ядре сечения.* Этим термином обозначается *некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы P, не вызывая в сечении напряжений разного знака.*

Пока точка A располагается внутри ядра, нейтральная ось не пересекает контура сечения, всё оно лежит по *одну* сторону от нейтральной оси и, стало быть, работает лишь на сжатие. При удалении точки A от центра тяжести сечения нейтральная ось будет приближаться к контуру; граница ядра определится тем, что при расположении точки A на этой границе нейтральная ось подойдёт вплотную к сечению, коснётся его.



Фиг. 432.

Таким образом, если мы будем перемещать точку A так, чтобы нейтральная ось *катилась* по контуру сечения, не пересекая его (фиг. 432), то точка A обойдёт по границе ядра сечения. Если контур сечения имеет «впадины», то нейтральная ось будет катиться по огибающей контура.

Чтобы получить очертание ядра, необходимо дать нейтральной оси несколько положений, касательных к контуру сечения, определить для этих положений отрезки a_y и a_z и вычислить координаты y_P и z_P точки приложения силы по формулам, вытекающим

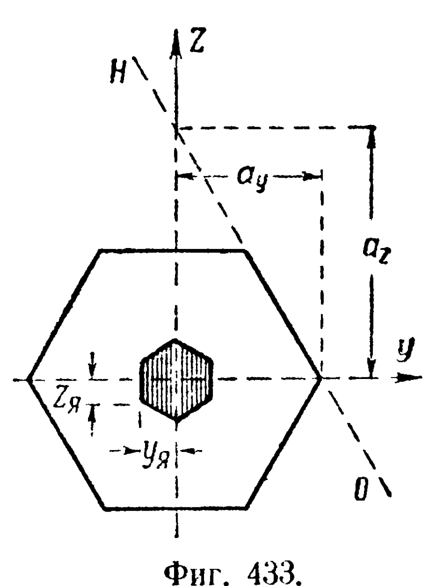
из зависимостей (27.7) и (27.8):

$$y_P = -\frac{i_z^2}{a_y}; \quad z_P = -\frac{i_y^2}{a_z}; \tag{27.15}$$

это и будут координаты точек контура ядра $y_я$ и $z_я$.

При *многоугольной* форме контура сечения (фиг. 433), совмещая последовательно нейтральную ось с каждой из сторон, многоугольника, мы по отрезкам a_y и a_z определим координаты $y_я$ и $z_я$ точек границы ядра, соответствующих этим сторонам.

При переходе от одной стороны контура сечения к другой нейтральная ось будет *вращаться* вокруг вершины, разделяющей эти стороны; точка приложения силы будет перемещаться по границе ядра между полученными уже точками. Установим, как должна перемещаться сила P, чтобы нейтральная ось проходила всё время через одну и ту же точку $B(y_B, z_B)$ — вращалась бы около неё. Подставляя координаты этой точки нейтральной оси в уравнение (27.6)

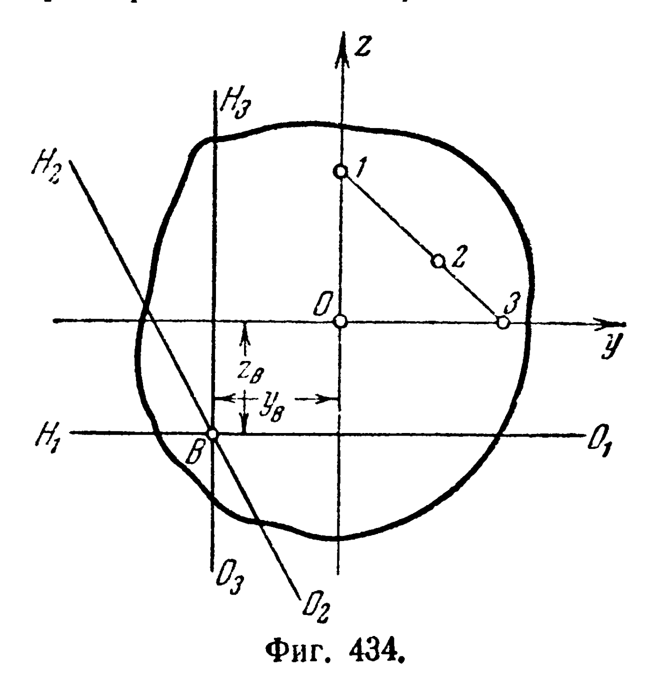


Фиг. 433.

$$1 + \frac{y_P y_B}{i_z^2} + \frac{z_P z_B}{i_y^2} = 0,$$

видим, что координаты y_P и z_P точки A приложения силы P связаны *линейно*. Таким образом, *при вращении нейтральной оси около постоянной точки B точка A приложения силы движется по прямой*. Обратно, перемещение силы P по прямой связано с вращением нейтральной оси около постоянной точки.

На фиг. 434 изображены три положения точки приложения силы на этой прямой и соответственно три положения нейтральной оси. Таким образом, при многоугольной форме контура сечения очертание ядра между точками, соответствующими сторонам многоугольника, будет состоять из отрезков прямых линий.



Фиг. 434.

Если контур сечения целиком или частично ограничен кривыми линиями, то построение границы ядра можно вести по точкам (формулы 27.15). Рассмотрим несколько простых примеров построения ядра сечения.

При выполнении этого построения для прямоугольного поперечного сечения (фиг. 431 и 435) воспользуемся формулами, выведенными в конце предыдущего параграфа.

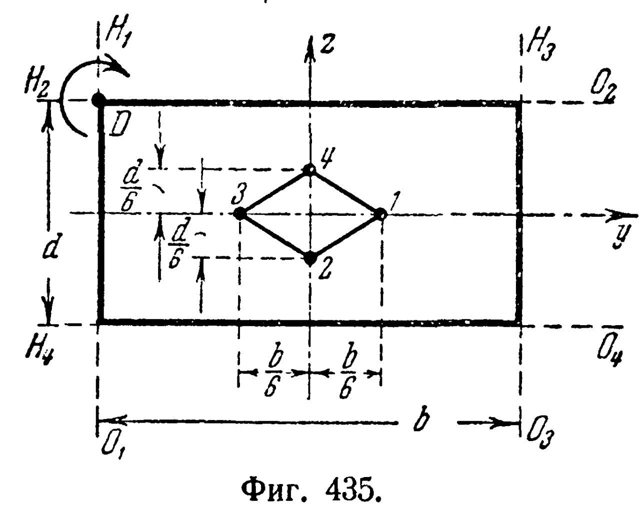
Для определения границ ядра сечения при движении точки A по оси Oy найдём то значение $e=e_0$, при котором нейтральная ось займёт положение H_1O_1 (фиг. 435). Имеем по формуле (27.13):

$$a_y=-\frac{b}{2}=-\frac{b^2}{12e_0},$$

откуда

$$e_0=\frac{b}{6}. \qquad (27.16)$$

Таким образом, границы ядра по оси Oy будут отстоять от центра сечения на $1/6$ величины b (фиг. 435, точки *1* и *3*); по оси Oz границы ядра определятся расстояниями $\frac{d}{6}$ (точки *2* и *4*).

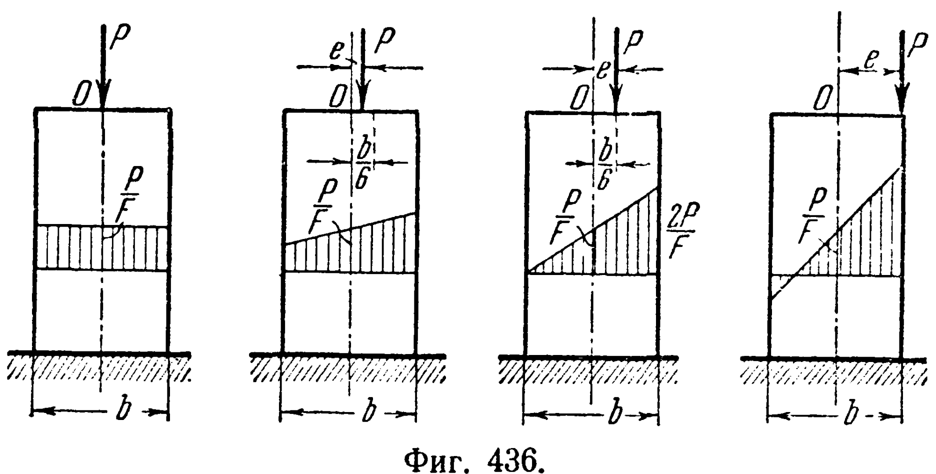


Фиг. 435.

Для получения очертания ядра целиком изобразим положения нейтральной оси H_1O_1 и H_2O_2, соответствующие граничным точкам *1* и *2*.

При перемещении силы из точки *1* в точку *2* по границе ядра нейтральная ось должна перейти из положения H_1O_1 в положение H_2O_2, всё время касаясь сечения, т. е. поворачиваясь вокруг точки D. Для этого сила должна двигаться по прямой *1—2*. Точно так же можно доказать, что остальными границами ядра будут линии *2—3*, *3—4* и *4—1*.

Таким образом, для прямоугольного сечения ядро будет ромбом с диагоналями, равными *одной трети* соответствующей стороны



Фиг. 436.

сечения. Поэтому прямоугольное сечение при расположении силы по главной оси работает на напряжения одного знака, если точка приложения силы не выходит за пределы *средней трети* стороны сечения.

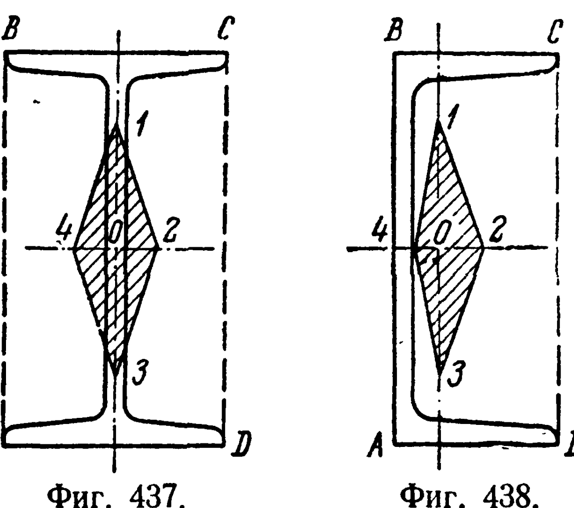
Эпюры распределения нормальных напряжений по прямоугольному сечению при эксцентриситете, равном нулю, меньшем, равном и большем одной шестой ширины сечения, изображены на фиг. 436. Отметим, что при всех положениях силы P напряжение в центре тяжести сечения (точка O) одинаково и равно $\frac{P}{F}$ и что сила P не имеет эксцентриситета по второй главной оси.

Для круглого сечения радиуса r очертание ядра будет по симметрии кругом радиуса r_0. Возьмём какое-либо положение нейтральной оси, касательное к контуру. Ось Oy расположим перпендикулярно к этой касательной. Тогда

$$a_y = r; \quad a_z = \infty; \quad z_я = 0;$$

$$y_я = r_0 = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{\frac{\pi r^4}{4 \cdot \pi r^2}}{r} = -\frac{r}{4}.$$

Таким образом, ядро представляет собой круг с радиусом, вчетверо меньшим, чем радиус сечения.



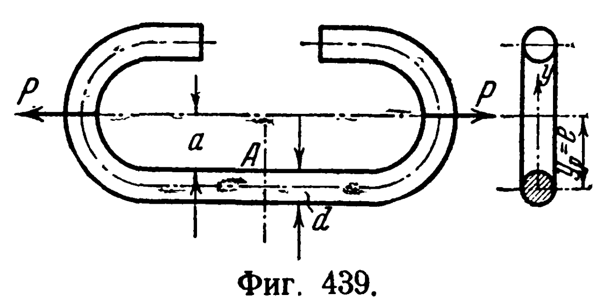
Фиг. 437. Фиг. 438.

Для двутавра нейтральная ось при обходе контура не будет пересекать площади поперечного сечения, если будет касаться прямоугольного контура $ABCD$, описанного около двутавра (фиг. 437). Следовательно, очертание ядра для двутавра имеет форму ромба, как и для прямоугольника, но с другими размерами.

Для швеллера, как и для двутавра, точки *1*, *2*, *3*, *4* контура ядра (фиг. 438) соответствуют совпадению нейтральной оси со сторонами прямоугольника $ABCD$. Расстояния определятся по формулам (27.15).

§ 165. Примеры.

Пример 110. Разрезанное звено цепи (фиг. 439) сделано из стального стержня диаметром $d = 50$ *мм*; $a = 60$ *мм*. Если допускаемое напряжение на растяжение в сечении A принято равным $[\sigma] = 1200$ *кг/см²*, какую величину можно допустить для силы P?



Фиг. 439.

Материал стержня в рассматриваемом сечении будет испытывать внецентренное растяжение. Эксцентриситет e равен $a + d/2$. Выбирая

ось Oy в плоскости, проходящей через силы P и ось прямой части стержня, имеем:

$$z_P = 0; \quad y_P = e = a + \frac{d}{2}.$$

Напряжение в любой точке сечения равно

$$\sigma = + \frac{P}{F} + \frac{P\left(a + \frac{d}{2}\right) y}{J_z}.$$

Подставляя вместо y его крайние значения $\pm \frac{d}{2}$, находим наибольшее и наименьшее напряжения:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max} \\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{4P}{\pi d^2} \pm \frac{64\,Pde}{2\pi d^4} = \frac{4P}{\pi d^2}\left[1 \pm \frac{8e}{d}\right] = \frac{4P}{\pi d^2}\left[1 \pm \frac{8\left(a + \frac{d}{2}\right)}{d}\right].$$

Условие прочности имеет вид:

$$\frac{4P}{\pi d^2}\left[1 + \frac{8\left(a + \frac{d}{2}\right)}{d}\right] = \frac{4P}{\pi d^3}(8a + 5d) \leqslant [\sigma];$$

отсюда

$$P = \frac{\pi d^3 [\sigma]}{4(8a + 5d)} = \frac{3{,}14 \cdot 5^3 \cdot 1200}{4(8 \cdot 6 + 5 \cdot 5)} \approx 1610 \text{ кг}.$$

Пример 111. Длинная подпорная стенка высотой $h = 3$ *м* и толщиной $b = 2$ *м* (фиг. 440) поддерживает земляную насыпь. Давление земли на погонный метр длины стены равно $H = 3$ *т* и приложено на высоте $\frac{h}{3}$ от основания. Объёмный вес кладки γ равен 2 *т/м*³. Найти крайние значения напряжений в сечении по обрезу фундамента.

Фиг. 440.

Выделив из стены по её длине участок в 1 *м* (фиг. 440), мы можем рассматривать эту часть стены как стержень, защемлённый концом, изгибаемый давлением земли и сжимаемый собственным весом. Так как наиболее напряжённым будет сечение в защемлении, по обрезу фундамента, то необходимо лишь его и проверить. Определение напряжений в этом сечении можно свести к задаче одновременного сжатия и изгиба. Силы, передающиеся через это сечение, сводятся к собственному весу выделенной части стены $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ *т* и давлению земли $H = 3$ *т*. Изгибающий момент от силы H в этом сечении равен $M = H\frac{h}{3} = 3 \cdot \frac{3}{3} = 3$ *тм*.

Для вычисления наибольших нормальных напряжений в сечении по обрезу фундамента воспользуемся формулой (27.1). Проверяемое сечение имеет прямоугольную форму с размерами $b = 2$ *м* и $d = 1$ *м*; поэтому наибольшие

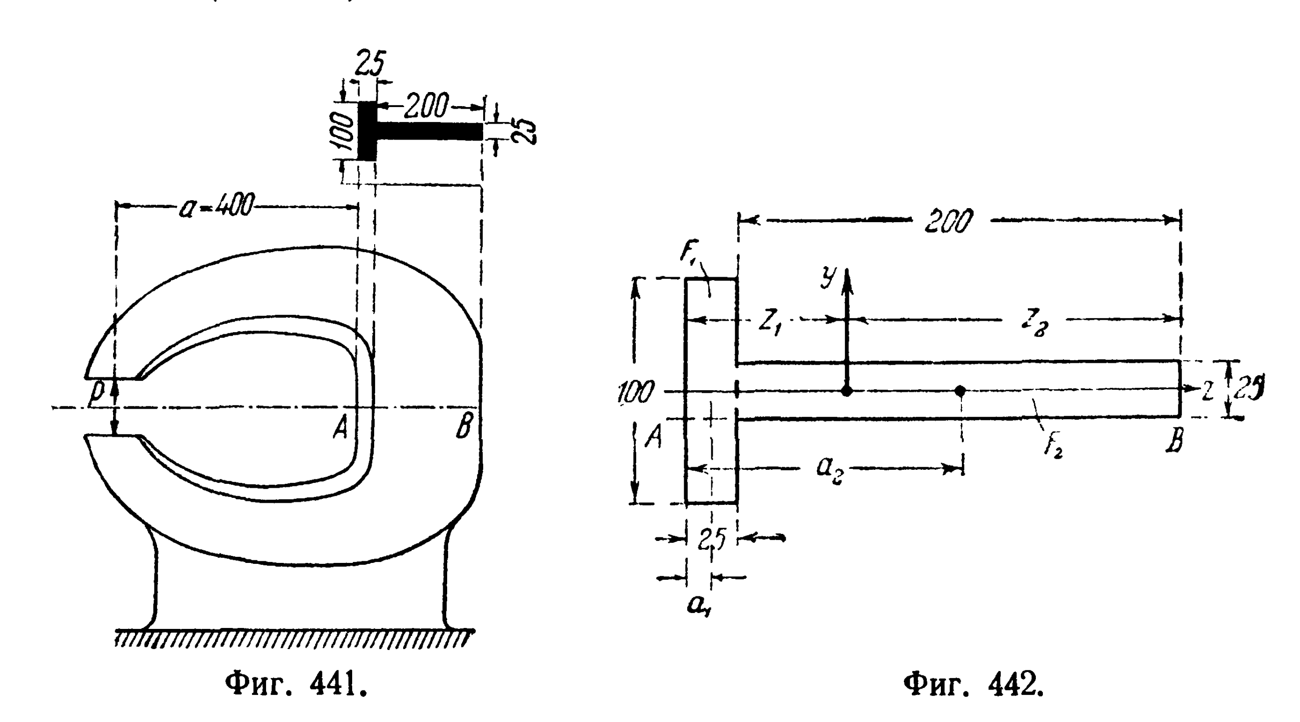
сжимающие напряжения в точках на стороне *1—1* этого сечения равны

$$\sigma_{\max} = -\frac{H}{F} - \frac{M}{W} = -\frac{12}{2 \cdot 1} - \frac{6 \cdot 3}{1 \cdot 2^2} = -6 - 4{,}5 =$$
$$= -10{,}5\ т/м^2 = -1{,}05\ кг/см^2.$$

Сжимающие напряжения в точках на стороне *2—2* сечения равны

$$\sigma_{\min} = -\frac{N}{F} + \frac{M}{W} = -6 + 4{,}5 = -1{,}5\ т/м^2 = -0{,}15\ кг/см^2.$$

Пример 112. Рама клепальной машины (фиг. 441) подвергается действию двух сил P, равных каждая 1000 *кг*. Найти напряжения в точках A и B сечения (фиг. 442).



Фиг. 441. Фиг. 442.

Расстояние z_1 центра тяжести сечения от края полки равно

$$z_1 = \frac{F_1 a_1 + F_2 a_2}{F_1 + F_2} = \frac{2{,}5 \cdot 10 \cdot 1{,}25 + 2{,}5 \cdot 20 \cdot 12{,}5}{2{,}5 \cdot 10 + 2{,}5 \cdot 20} = 8{,}75\ см.$$

Расстояние $z_2 = 22{,}5 - 8{,}75 = 13{,}75$ *см*.

Момент инерции сечения относительно оси y равен

$$J_y = \frac{10 \cdot 2{,}5^3}{12} + 25\,(8{,}75 - 1{,}25)^2 + \frac{2{,}5 \cdot 20^3}{12} + 50\,(13{,}75 - 10)^2 = 3788\ см^4.$$

Эксцентриситет $e = a + z_1 = 40 + 8{,}75 = 48{,}75$ *см*. Напряжения равны

$$\sigma_A = +\frac{P}{F} + \frac{Pez_1}{J_y} = \frac{1000}{75} + \frac{1000 \cdot 48{,}75 \cdot 8{,}75}{3788} = +125\ кг/см^2\ (растяжение),$$

$$\sigma_B = +\frac{P}{F} - \frac{Pez_2}{J_y} = \frac{1000}{75} - \frac{1000 \cdot 48{,}75 \cdot 13{,}75}{3788} = -163\ кг/см^2\ (сжатие).$$

ГЛАВА XXVIII.

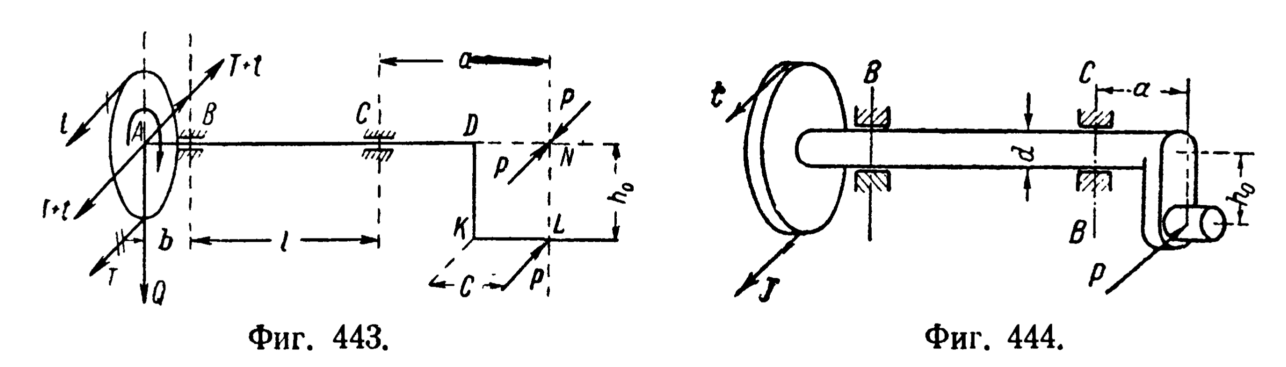
СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА.

§ 166. Определение изгибающих и крутящих моментов.

В главе XI была разобрана задача проверки прочности при кручении. Однако такие части машины, как валы, редко работают на чистое скручивание. Даже прямой вал при работе изгибается собственным весом, весом шкивов, натяжением ремней. Таким образом, большинство скручиваемых элементов машин работает на совместное действие кручения и изгиба. К числу подобных же деталей относятся и коленчатые валы.

При расчёте элементов, работающих одновременно на изгиб и кручение, в первую очередь надо выяснить расчётные значения изгибающих $M_и$ и крутящих $M_к$ моментов.

Покажем это на примере прямого вала круглого сечения со шкивом и кривошипом. Схема вала изображена на фиг. 443 и 444. На



Фиг. 443. Фиг. 444.

левом конце вала расположен шкив весом Q; на него действуют натяжения ремня T и t $(T > t)$; на правом конце на палец кривошипа действует горизонтальная сила P; рассмотрим момент, когда кривошип расположен вертикально. Размеры конструкции даны на чертеже.

Определим изгибающие и крутящие моменты для вала AD. Силы T и t (натяжения ремня), действующие на шкив, заменяем силой $T+t$, приложенной в центре шкива, и парой $(T-t)R_0$, где R_0 — радиус шкива. Сила $T+t$ вместе с весом шкива Q производит изгиб вала; пара же $(T-t)R_0$, скручивая вал, уравновешивается парой, приложенной к его правому концу.

Заменяем силу P, действующую на палец кривошипа, такой же силой P, приложенной к валу на продолжении его оси в точке N, и парой с моментом Ph_0. Таким образом, к концам вала приложены пары Ph_0 и $(T-t)R_0$; при равновесии, равномерном ходе машины, моменты этих пар равны и дают скручивающий момент $M_к = Ph_0 = (T-t)R_0$.

Если известны число оборотов вала в единицу времени n и передаваемая шкивом мощность N, то величина крутящего момента $M_к$

может быть найдена по формуле (11.3) § 56:

$$M_к = \frac{716{,}2\,N}{n}; \quad \text{тогда } P = \frac{M_к}{h_c}$$

и

$$T = \frac{M_к}{R_0(1-m)}, \text{ где } m = \frac{t}{T}.$$

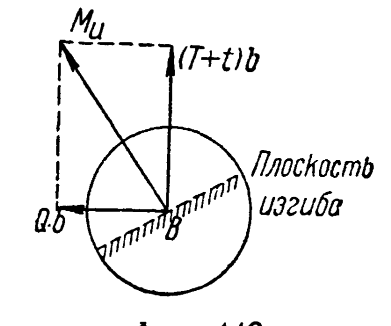
Что же касается изгиба, то на вал действуют и вертикальные (Q) и горизонтальные ($T+t$, P) силы. Поэтому построим эпюры моментов для тех и других (фиг. 445, *а* и *б*), считая опоры вала в подшипниках B и C шарнирными; одна из них имеет продольную подвижность.

Имея эпюры моментов от вертикальных и горизонтальных нагрузок, можем для каждого сечения вала найти полный изгибающий момент $M_и$ как геометрическую сумму обеих составляющих; на фиг. 446 показано такое геометрическое сложение векторов, изображающих изгибающие моменты для сечения B; для него полный изгибающий момент будет равен

$$M_и = b\sqrt{Q^2 + (T+t)^2}.$$

Фиг. 445.

Для каждого сечения мы будем иметь *свою плоскость* действия изгибающего момента; но так как вал имеет круглое поперечное сечение, у которого моменты сопротивления относительно всех центральных осей одинаковы, то без влияния на результаты расчёта мы можем совместить плоскости изгибающих моментов для всех сечений и построить суммарную эпюру, располагая её в плоскости чертежа. Это и сделано на фиг. 445, *в*. Не приводя доказательства, заметим, что между сечениями B и C эпюра полного изгибающего момента $M_и$ будет ограничена кривой, не имеющей максимума.

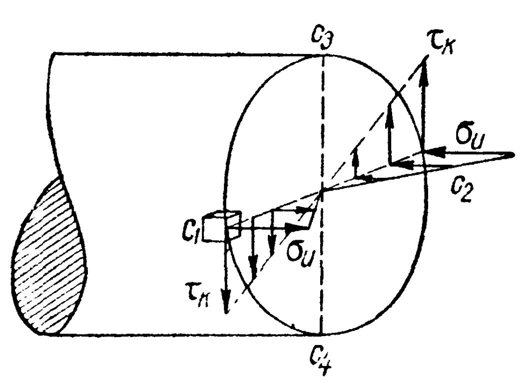


Фиг. 446.

Из очертания эпюры видно, что опасное сечение будет либо в подшипнике B, либо в подшипнике C в зависимости от соотношения числовых данных.

§ 167. Определение напряжений и проверка прочности при изгибе с кручением.

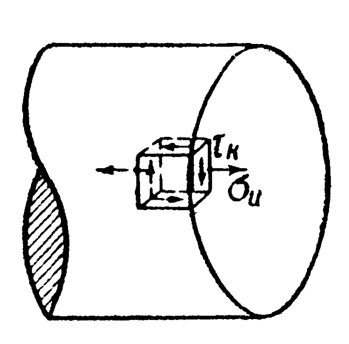
Вычислив наибольший изгибающий момент $M_{и}$ и крутящий $M_{к}$, можем теперь найти наибольшие напряжения в материале вала и составить условие прочности. Предполагая, что опасным является сечение C, разрежем вал в этом сечении (фиг. 447) и воспользуемся способом сложения действия сил. Вычислим напряжения в поперечном сечении от действия изгибающего момента и присоединим к ним напряжения от скручивания.



Фиг. 447.

Изгибающий момент действует в горизонтальной плоскости; нейтральная ось будет вертикальна, а наибольшие нормальные напряжения $\sigma_{и}$ будут в точках c_1 и c_2 на концах горизонтального диаметра. Крутящий момент вызывает лишь касательные напряжения, которые достигнут наибольшего значения $\tau_{к}$ в точках у контура.

Таким образом, в точках c_1 и c_2 будут действовать по плоскости сечения и наибольшие нормальные и наибольшие касательные напряжения. В точках c_3 и c_4 на концах вертикального диаметра к наибольшим касательным напряжениям от кручения добавятся касательные напряжения от изгиба; однако эти напряжения будут невелики и результаты подсчётов показывают, что напряжённое состояние материала будет опаснее в точках c_1 и c_2. Выделим у этих точек элементы материала кубической формы (фиг. 447); по четырём граням этих элементов будут действовать касательные напряжения $\tau_{к}$; к двум из этих четырёх будут приложены ещё нормальные напряжения, две грани кубика будут свободны от напряжений (фиг. 448). Таким образом, выделенный элемент материала испытывает плоское напряжённое состояние. Как известно (§§ 43 и 94), для проверки прочности материала в этом случае необходимо найти главные напряжения σ_1 и σ_3 и подставить их в условие прочности, составленное на основе той или иной теории прочности.



Фиг. 448.

Подобное плоское напряжённое состояние испытывает элемент материала, вырезанный в изогнутой балке на расстоянии z от нейтральной оси. Проверку прочности такого элемента мы рассмотрели выше (§ 94), при решении задачи о полной проверке прочности балки. Разница лишь в том, что в балке и нормальные σ и касательные τ напряжения вызывались лишь изгибом.

Для проверки прочности элемента, вырезанного из вала, мы можем прямо применить выведенные в § 94 формулы, подставляя в них вместо σ и τ величины $\sigma_и$ и $\tau_к$. Тогда получим следующие условия прочности (по четырём теориям):

Теория наибольших нормальных напряжений:

$$\frac{1}{2}[\sigma_и + \sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2}] \leqslant [\sigma].$$

Теория наибольших удлинений:

$$[0,35\sigma_и + 0,65\sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2}] \leqslant [\sigma].$$

Теория наибольших касательных напряжений:

$$\sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2} \leqslant [\sigma].$$

Энергетическая теория:

$$\sqrt{\sigma_и^2 + 3\tau_к^2} \leqslant [\sigma]. \qquad (28.1)$$

Чтобы связать эту проверку прочности с величинами моментов $M_к$ и $M_и$ и размерами вала, надо вычислить напряжения $\sigma_и$ и $\tau_к$. Напряжение $\sigma_и$, как наибольшее нормальное напряжение при изгибе моментом $M_и$, равно

$$\sigma_и = \frac{M_и}{W},$$

где для вала круглого сечения $W = \frac{\pi r^3}{4}$; буквой r обозначен радиус поперечного сечения вала.

С другой стороны, наибольшее напряжение при скручивании вала $\tau_к$ равно

$$\tau_к = \frac{M_к}{W_р} = \frac{M_к}{\frac{\pi r^3}{2}} = \frac{M_к}{2\frac{\pi r^3}{4}} = \frac{M_к}{2W}.$$

Подставляя эти значения напряжений в первую из формул (28.1), получаем:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{M_и}{W} + \sqrt{\frac{M_и^2}{W^2} + 4\frac{M_к^2}{4W^2}}\right] = \frac{M_и + \sqrt{M_и^2 + M_к^2}}{2W} = \frac{M_р}{W} \leqslant [\sigma].$$

Подобным же образом могут быть получены расчётные формулы и по другим теориям прочности. Нетрудно заметить, что все эти формулы могут быть заменены одной:

$$\frac{M_р}{W} \leqslant [\sigma], \qquad (28.2)$$

где $M_р$ — *расчётный момент*, величина которого зависит как от

$M_и$ и $M_к$, так и от *принятой теории прочности.* Он равен по теории наибольших нормальных напряжений:

$$\left.\begin{aligned} &M_{р1} = \frac{1}{2}\left[M_и + \sqrt{M_и^2 + W_к^2}\right], \\ &\text{по теории наибольших удлинений:} \\ &M_{р2} = 0{,}35\,M_и + 0{,}65\sqrt{M_и^2 + M_к^2}, \\ &\text{по теории наибольших касательных напряжений:} \\ &M_{р3} = \sqrt{M_и^2 + M_к^2}, \\ &\text{по энергетической теории:} \\ &M_{р4} = \sqrt{M_и^2 + 0{,}75\,M_к^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (28.3)$$

Формула (28.2) по своей структуре совершенно совпадает с обычной формулой проверки прочности по нормальным напряжениям при изгибе моментом $M_р$. Поэтому проверка прочности круглого вала на совместное действие кручения и изгиба может быть заменена проверкой на один изгиб с изгибающим моментом $M_р$.

В некоторых конструкциях валы, помимо скручивания и изгиба, растягиваются или сжимаются продольными силами N. Влияние этих добавочных сил на прочность вала может быть учтено добавкой к наибольшим напряжениям от изгиба $\sigma_и$ напряжений σ_0 от продольных сил: $\sigma_0 = \frac{N}{F}$, где F — площадь поперечного сечения вала.

Из формулы (28.2) получаем

$$W = \frac{\pi r^3}{4} \geqslant \frac{M_р}{[\sigma]};$$

отсюда радиус вала равен

$$r \geqslant \sqrt[3]{\frac{4M_р}{\pi[\sigma]}}; \quad d = 2r. \qquad (28.4)$$

Для использования этой формулы остаётся лишь установить, какой теорией прочности следует пользоваться, а следовательно, по какой из формул (28.3) вычислять расчётный момент.

Так как валы обычно делаются из стали и вообще из пластичных металлов, то при выборе теорий прочности сразу отпадает теория наибольших нормальных напряжений (см. § 43). До сих пор в машиностроении пользовались формулой, основанной на второй теории (наибольших удлинений), называемой иногда формулой Сен-Венана:

$$\frac{1}{W}\left[0{,}35\,M_и + 0{,}65\sqrt{M_и^2 + M_к^2}\right] \leqslant [\sigma],$$

несмотря на то, что для пластичных металлов эта теория безусловно неверна; в последнее время при расчётах применяются либо фор-

мулы, основанные на третьей теории (наибольших касательных напряжений), либо — на четвёртой (энергетической) теории:

$$\frac{1}{W}\sqrt{M_и^2+M_к^2}\leqslant[\sigma] \quad \text{и} \quad \frac{1}{W}\sqrt{M_и^2+0{,}75\,M_к^2}\leqslant[\sigma].$$

В таблице 25 сопоставлены результаты определения диаметра вала при разных отношениях $M_и$ к $M_к$ *при одном и том же допускаемом напряжении* с учётом различных теорий прочности. Величина диаметра, полученная при применении теории наибольших удлинений (формула Сен-Венана), принята за единицу.

Таблица 25. **Сравнение диаметров вала.**

Отношение $M_и$ к $M_к$	Диаметры вала при применении		
	II теории	III теории	IV теории
$M_и=0$	1	1,15	1,10
$M_и=\frac{1}{2}M_к$	1	1,07	1,03
$M_и=M_к$	1	1,03	1,01

Из этой таблицы видно, во-первых, что разница в размерах вала в зависимости от выбора той или иной теории сравнительно невелика; во-вторых, что формула Сен-Венана даёт во всех случаях меньшую величину диаметра, чем остальные две формулы. Этим и можно объяснить тот факт, что на практике до сих пор иногда пользуются формулой Сен-Венана, хотя она основана на заведомо непригодной для применяемого материала теории.

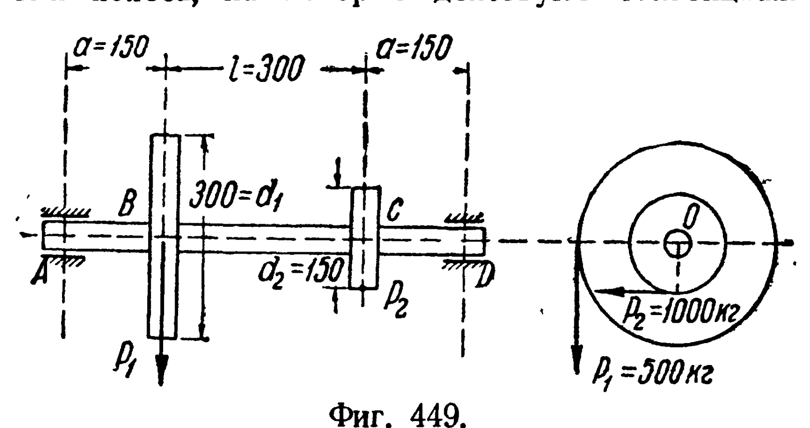
Инженер-практик должен понимать, что переход к расчёту по новым формулам, основанным на более правильных теориях, был бы всё же практически неприемлем при сохранении *старых* норм допускаемых напряжений. Это заставило бы требовать постановки валов большего диаметра там, где при расчёте по старой формуле Сен-Венана благополучно работали валы более тонкие.

Выход заключается в том, что при переходе к новым формулам *нельзя сохранить* прежний коэффициент запаса, прежнее допускаемое напряжение. Повышение точности расчёта, углубление наших знаний о работе материала требует, как правило, *снижения* коэффициента запаса и повышения допускаемого напряжения $[\sigma]$.

Поэтому, вводя на практике вычисление расчётного момента по новым формулам, необходимо поднять допускаемое напряжение $[\sigma]$ настолько, чтобы диаметры валов, благополучно работающих на практике, были оправданы новыми методами расчёта и достаточно надёжными опытными исследованиями.

§ 168. Примеры.

Пример 113. На вал, изображённый на фиг. 449, насажены два зубчатых колеса, на которые действуют тангенциальные усилия $P_1 = 500$ *кг* и $P_2 = 1000$ *кг*; найти диаметр вала при допускаемом напряжении $[\sigma] = 1000$ *кг/см²*. Вал шарнирно опёрт в подшипниках A и D.

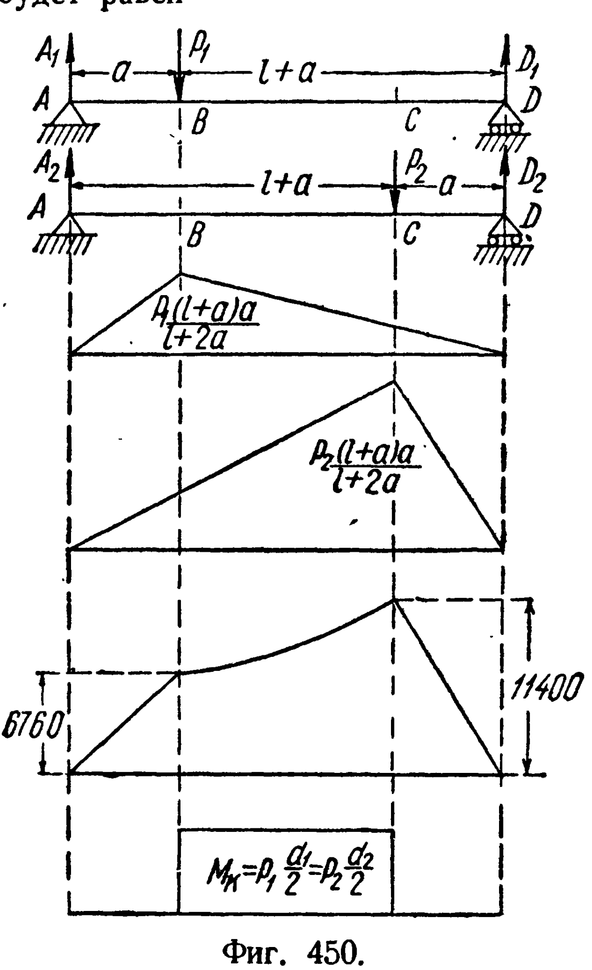


Фиг. 449.

Переносим силы P_1 и P_2 на ось вала, заменяя каждую из них силами, приложенными в точках B и C, и парами сил $P_1 d_1/2$ и $P_2 d_2/2$.

Обе пары, взаимно уравновешиваясь, будут скручивать среднюю часть вала между сечениями B и C; крутящий момент будет равен

$$M_к = P_1 \frac{d_1}{2} = P_2 \frac{d_2}{2} = 500 \cdot 15 = 75\,500 \text{ кгсм}.$$



Фиг. 450.

На фиг. 450 изображены схемы нагрузки вала вертикальными и горизонтальными силами и соответствующие эпюры моментов, а также результирующая эпюра изгибающих моментов и эпюра крутящих моментов.

Изгибающие моменты в сечении B равны: изгибающий момент от вертикальных сил

$$M'_и = \frac{P_1 (l + a) a}{l + 2a};$$

изгибающий момент от горизонтальных сил

$$M''_и = \frac{P_2 a^2}{l + 2a};$$

полный изгибающий момент в сечении B

$$M_и^B = \sqrt{\frac{P_1^2 (l + a)^2 a^2}{(l + 2a)^2} + \frac{P_2^2 a^4}{(l + 2a)^2}} = \frac{a}{l + 2a} \sqrt{P_1^2 (l + a)^2 + P_2^2 a^2} = 6760 \text{ кгсм}.$$

Точно так же для сечения C:

$$M'_и = \frac{P_1 a^2}{l + 2a}; \quad M''_и = \frac{P_2 (l + a) a}{l + 2a}$$

и

$$M_и^C = \sqrt{\frac{P_1^2 a^4}{(l + 2a)^2} + \frac{P_2^2 (l + a)^2 a^2}{(l + 2a)^2}} = \frac{a}{l + 2a} \sqrt{P_1^2 a^2 + P_2^2 (l + a)^2} = 11\,400 \text{ кгсм}.$$

Опасным будет сечение C; вычисляя по энергетической теории прочности расчётный момент, получаем:

$$M_p = \sqrt{11\,400^2 + 0{,}75 \cdot 7500^2} = 13\,120 \text{ кгсм}.$$

Искомый диаметр вала равен

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\,M_p}{\pi\,[\sigma]}} = 5{,}1 \text{ см}.$$

Пример 114. Сплошной вал диаметром $d = 80$ *мм* передаёт мощность $N = 800$ *л. с.* при числе оборотов $n = 2000$ *об/мин*. Продольное усилие $P = 20$ *т*. Найти расчётное напряжение в вале по третьей и четвёртой теориям прочности.

Крутящий момент вычисляется по формуле:

$$M_к = 716{,}2\frac{N}{n} = 716{,}2\frac{800}{2000} = 286{,}5 \text{ кгм}.$$

Наибольшее касательное напряжение равно (в точках у поверхности вала)

$$\max\tau = \frac{2M_к}{\pi r^3} = \frac{2 \cdot 28\,650}{3{,}14 \cdot 4^3} = 285 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее нормальное напряжение (равномерно распределённое)

$$\sigma = \frac{P}{\pi r^2} = \frac{20\,000}{3{,}14 \cdot 4^2} = 398 \text{ кг/см}^2.$$

Наиболее напряжённым будет материал в точках на поверхности вала. Расчётные напряжения равны:

по третьей теории

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{398^2 + 4 \cdot 285^2} = 695 \text{ кг/см}^2;$$

по четвёртой теории

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{398^2 + 3 \cdot 285^2} = 634 \text{ кг/см}^2.$$

ГЛАВА XXIX.

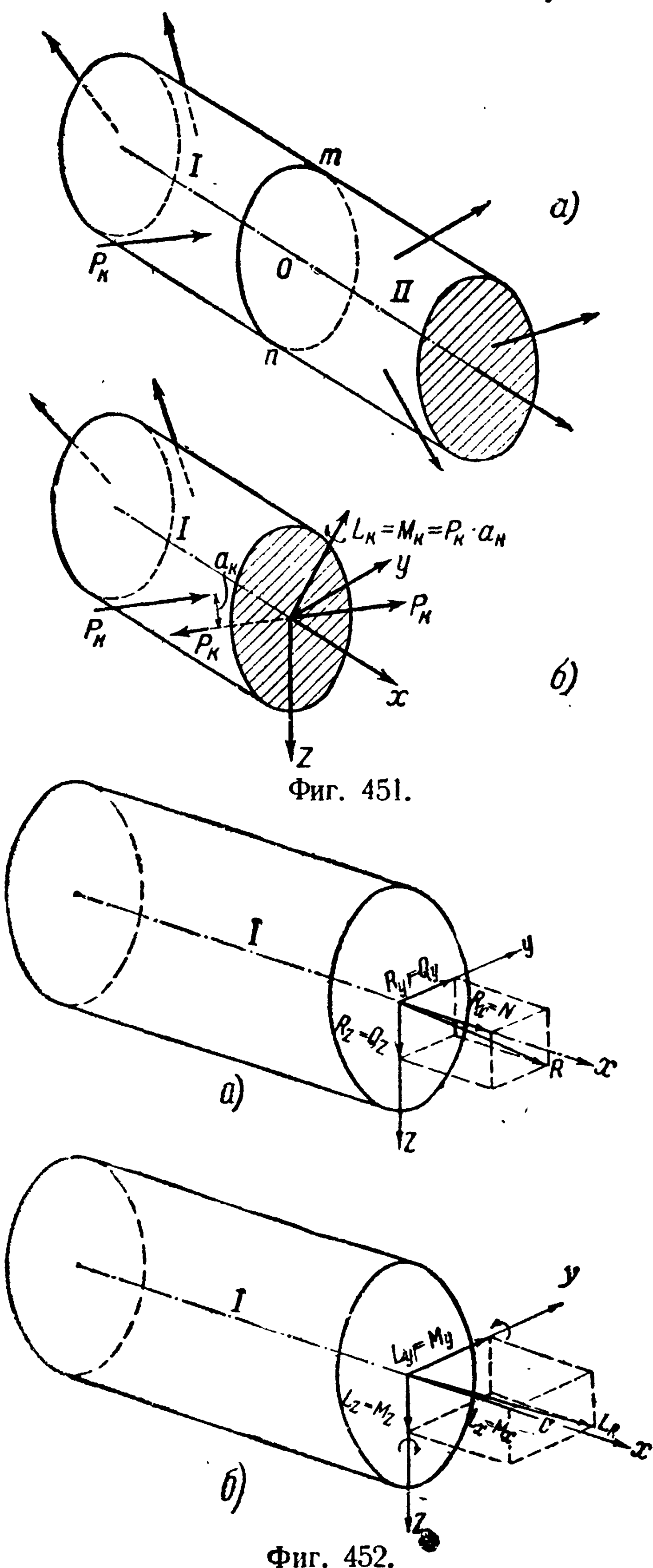
ОБЩИЙ СЛУЧАЙ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ.

§ 169. Вычисление напряжений и деформаций.

А. Приёмы определения напряжений и деформаций, использованные при решении отдельных частных задач сложного сопротивления, могут быть распространены и на более сложные случаи действия сил на тело. Ограничиваясь рассмотрением призматических брусьев, у которых центр изгиба совпадает с центром тяжести поперечного сечения, допустим, что такой брус (фиг. 451) находится в равновесии под действием приложенной к нему системы сил, как угодно расположенных в пространстве. На фиг. 451 для простоты чертежа показаны только сосредоточенные силы; однако внешними силами могут быть также распределённые нагрузки и пары сил — дальнейшие рассуждения от этого не меняются.

Для нахождения напряжений в некотором сечении mn, перпендикулярном к оси бруса и разделяющем его на две части (I и II), выясним сначала, какими усилиями эти напряжения могут быть вызваны.

Отбросим одну часть бруса, например правую, и рассмотрим равновесие оставленной левой части. Используем систему прямоугольных координат; начало координат расположим в центре тяжести поперечного сечения mn — точке O, ось x направим вдоль оси бруса в сторону внешней нормали к сечению mn, а оси y и z совместим с главными осями сечения так, как это показано на фиг. 451 (левовинтовая система координат).



Фиг. 451.

Фиг. 452.

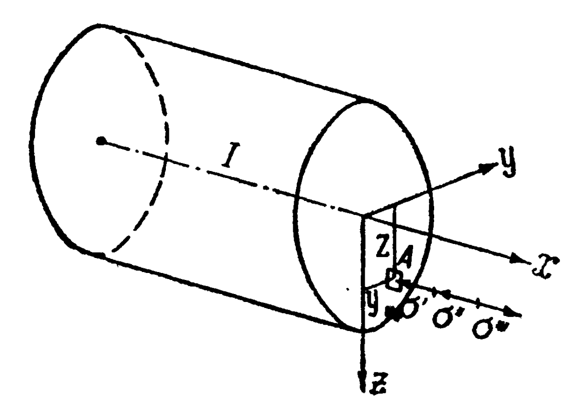
Перенесём последовательно все внешние силы, действующие на левую (I) часть бруса, в начало координат. При переносе любой силы $P_к$ мы получим приложенную в центре тяжести сечения силу $P_к$, в общем случае не совпадающую ни с одной из координатных осей, и пару сил $M_к = P_к a_к$, действующую в плоскости, в общем случае наклонённой ко всем координатным плоскостям. Изображающий эту пару вектор $L_к$ направлен перпендикулярно к плоскости действия пары. Так же поступаем при переносе в точку O и всех других сил. Сложим теперь геометрически все силы $P_к$, приложенные к центру тяжести сечения mn, в одну равнодействующую R, а векторы $L_к$ — в один равнодействующий вектор L_R.

Проектируя затем силу R (фиг. 452, *а*) на оси координат, получим составляющие: R_x, R_y и R_z; проектируя таким же образом вектор L_R (фиг. 452, *б*), получим векторы: L_x, L_y и L_z, изображающие моменты вокруг всех трёх осей: M_x, M_y и M_z. Силы R_x, R_y и R_z в данном сечении бруса будем считать положительными, если направления их совпадают с положительными направлениями координатных осей. Моменты M_x, M_y и M_z условимся считать положительными в том случае, когда вокруг соответствующих осей они действуют в направлении движения часовой стрелки.

Таким образом, в результате переноса сил мы можем заменить систему внешних сил $P_к$, действующую на оставленную левую часть бруса, статически эквивалентной ей системой из шести составляющих: трёх сил, приложенных к центру тяжести выбранного сечения и направленных вдоль координатных осей, и трёх моментов, действующих вокруг этих же осей.

Из предыдущего известно, какое действие на левую часть бруса оказывает каждая из этих шести составляющих. В рассматриваемом сечении положительная составляющая $R_x (= N)$ — нормальная сила — вызывает сжатие левой части бруса; изгибающий момент M_y и поперечная сила $Q_z (= R_z)$ — соответственно изгиб и сдвиг бруса в плоскости xz; изгибающий момент M_z и поперечная сила $Q_y (= R_y)$ — изгиб и сдвиг в плоскости xy; момент M_x вызывает кручение бруса вокруг оси x.

Таким образом, в самом общем случае действия сил на брус в нём возникают *четыре простых деформации*: осевое растяжение или сжатие, два плоских изгиба и кручение.



Фиг. 453.

Б. Составим формулы для вычисления нормальных и касательных напряжений в какой-либо точке A с координатами y и z, расположенной в первом квадранте сечения mn (фиг. 453). При этом будем считать, что все шесть составляющих системы внешних сил являются положительными (фиг. 452). В сечении mn возникают *уравновешивающие* эту систему нормальные и касательные напряжения. Нормальные напряжения обусловлены действием продольной силы N и изгибающих моментов M_y и M_z. От положительной продольной силы N возникают уравновешивающие её равномерно распределённые по сечению сжимающие напряжения $\sigma' = -\frac{N}{F}$ (фиг. 453). Положительные изгибающие моменты M_y и M_z соответственно уравновешиваются нормальными напряжениями σ'' и σ'''; при этом от положительного момента M_y в точке A возникает сжимающее напряжение $\sigma'' = -\frac{M_y z}{J_y}$, а от положительного момента M_z — растягивающее напряжение $\sigma''' = +\frac{M_z y}{J_z}$.

Суммируя эти составляющие нормального напряжения, получаем такую формулу для вычисления полного нормального напряжения в точке A:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' = -\frac{N}{F} - \frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z}. \qquad (29.1)$$

Для вычисления полного нормального напряжения в любой другой точке поперечного сечения бруса достаточно подставить в формулу (29.1) значения N, M_y и M_z, а также и координат y и z, с их знаками; при этом мы всегда будем получать надлежащие величину и знак полного нормального напряжения.

Полагая в формуле (29.1) напряжение σ равным нулю и обозначая координаты точек нулевой линии через y_0 и z_0, для нахождения положения этой линии получаем такое уравнение:

$$-\frac{N}{F} - \frac{M_y z_0}{J_y} + \frac{M_z y_0}{J_z} = 0.$$

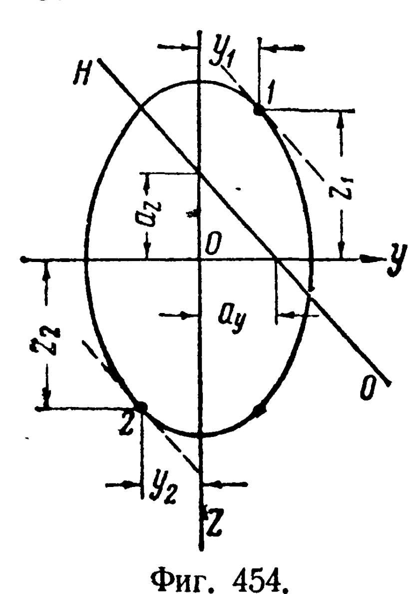
Отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат y и z, соответственно равны (фиг. 454):

$$a_y = \frac{J_z}{F} \cdot \frac{N}{M_z} \quad \text{и} \quad a_z = -\frac{J_y}{F} \cdot \frac{N}{M_y}. \tag{29.2}$$

Тангенс угла наклона (β) нейтральной линии к оси y равен:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_y}{J_z} \cdot \frac{M_z}{M_y}. \tag{29.3}$$

Нейтральная линия в общем случае делит поперечное сечение бруса на две области: растянутую и сжатую (фиг. 454). Проводя линии, параллельные нейтральной и касательные к контуру поперечного сечения, находим в той и другой области наиболее удалённые от нейтральной линии точки *1* и *2* с наибольшими растягивающими и сжимающими напряжениями. Подставляя координаты этих точек (y_1 и z_1 или y_2 и z_2) с их знаками в формулу (29.1), находим наибольшие значения растягивающих и сжимающих напряжений:



Фиг. 454.

$$\sigma_{(1,2)} = -\frac{N}{F} - \frac{M_y}{J_y} z_{(1,2)} + \frac{M_z}{J_z} y_{(1,2)}. \tag{29.4}$$

Касательные напряжения в сечении mn возникают вследствие кручения бруса вокруг оси x и сдвига его в плоскостях xy и xz.

Крутящий момент M_x уравновешивается касательными напряжениями $\tau_к$. Для бруса с поперечным сечением в виде круга или кольца эти напряжения вычисляются (§ 57) по формуле:

$$\tau_к = \frac{M_x \rho}{J_p}. \tag{29.5}$$

Для брусьев с поперечным сечением любой другой формы должна быть использована формула, приведённая в § 67 (таблица 17):

$$\max \tau_к = \frac{M_x}{W_к}. \tag{29.6}$$

Во всех случаях наибольшие касательные напряжения возникают на контуре поперечного сечения и направлены вдоль касательной к контуру.

Касательные напряжения от сдвига, уравновешивающие силы Q_y и Q_z, как правило, играют второстепенную роль; они находятся по формулам (§ 91):

$$\tau_y = \frac{Q_y S(y)}{J_z b(y)} \quad \text{и} \quad \tau_z = \frac{Q_z S(z)}{J_y b(z)}. \tag{29.7}$$

Для прямоугольного и круглого сечений касательные напряжения (29.7) достигают максимума на соответствующих главных осях инерции: τ_y — на оси z, а τ_z — на оси y. Суммарные касательные напряжения от двух плоских изгибов наибольшего значения достигают в центре тяжести сечения, т. е. как раз там, где касательные напряжения от кручения и нормальные напряжения от изгиба равны нулю. Благодаря этому определение этих напряжений часто не имеет практического значения.

В связи с тем, что нормальные напряжения от изгиба и касательные напряжения от кручения наибольших значений достигают на контуре поперечного сечения, именно там обычно приходится искать наиболее напряжён-

ные точки и производить проверку прочности материала бруса. Точки с наибольшими касательными напряжениями не всегда совпадают с точками, в которых возникают наибольшие нормальные напряжения. Поэтому в наиболее тяжёлых условиях материал бруса находится у тех точек контура, в которых получается наиболее неблагоприятное сочетание нормальных и касательных напряжений. Такими точками могут быть: точки с наибольшими нормальными напряжениями, точки с наибольшими касательными напряжениями и какие-либо промежуточные точки контура сечения. В случае надобности могут быть учтены также и касательные напряжения от изгиба; тогда полное касательное напряжение должно быть найдено путём геометрического суммирования $\tau_к$, τ_y и τ_z.

Для проверки прочности материала в самом общем случае действия сил на брус должны быть использованы расчётные формулы § 94 [формулы (15.14—15.17)] или § 167 [формулы (28.1)], выведенные на основе той или иной теории прочности. Сравнивая величину расчётного напряжения, вычисленного по одной из формул (15.14—15.17) или (28.1), с величиной допускаемого напряжения, получаем возможность решить одну из двух практически важных задач: определить размеры поперечного сечения бруса или проверить прочность материала при известных размерах сечения бруса.

В. Для вычисления перемещений призматического бруса, нагружённого системой сил, как угодно расположенных в пространстве, применяем принцип независимости действия сил (ограничение см. § 161). Это может быть выполнено с помощью приёмов, изложенных ранее в соответствующих разделах курса.

Не останавливаясь на других приёмах, напомним использование теоремы Кастильяно (§ 126). Потенциальную энергию деформации при сложном сопротивлении рассматриваемого здесь бруса можно представить в виде суммы количеств энергий от всех шести составляющих: N, Q_y, Q_z, M_x, M_y и M_z. Пренебрегая энергией касательных напряжений от изгиба, имеем:

$$U = U(N) + U(M_x) + U(M_y) + U(M_z). \tag{29.8}$$

Полагая, что нормальное усилие N и крутящий момент M_x в общем случае не остаются постоянными на протяжении всей длины бруса, для энергии в элементе бруса длиной dx следует написать такие выражения:

$$dU(N) = \frac{N^2\,dx}{2EF} \quad \text{и} \quad dU(M_x) = \frac{M_x^2\,dx}{2GJ_к},$$

а для энергии на участке бруса длиной l:

$$U(N) = \int_l \frac{N^2\,dx}{2EF} \quad \text{и} \quad U(M_x) = \int_l \frac{M_x^2\,dx}{2GJ_к}.$$

Для энергии нормальных напряжений при плоском изгибе соответственно имеем (§ 125):

$$U(M_y) = \int_l \frac{M_y^2\,dx}{2EJ_y} \quad \text{и} \quad U(M_z) = \int_l \frac{M_z^2\,dx}{2EJ_z}.$$

В связи с этим формула (29.8) получает теперь такой вид:

$$U = \int_l \left(\frac{N^2}{2EF} + \frac{M_x^2}{2GJ_к} + \frac{M_y^2}{2EJ_y} + \frac{M_z^2}{2EJ_z}\right) dx. \tag{29.9}$$

Значок l показывает, что интегрирование распространяется на длину такого участка бруса, на протяжении которого функции координаты x, т. е. N, M_x,

M_y и M_z остаются непрерывными. При наличии в брусе нескольких таких участков вместо одного интеграла нужно вычислить интегралы по каждому из участков и взять их сумму.

Применяя теорему Кастильяно, искомое перемещение в направлении какой-либо из сил P находим из выражения:

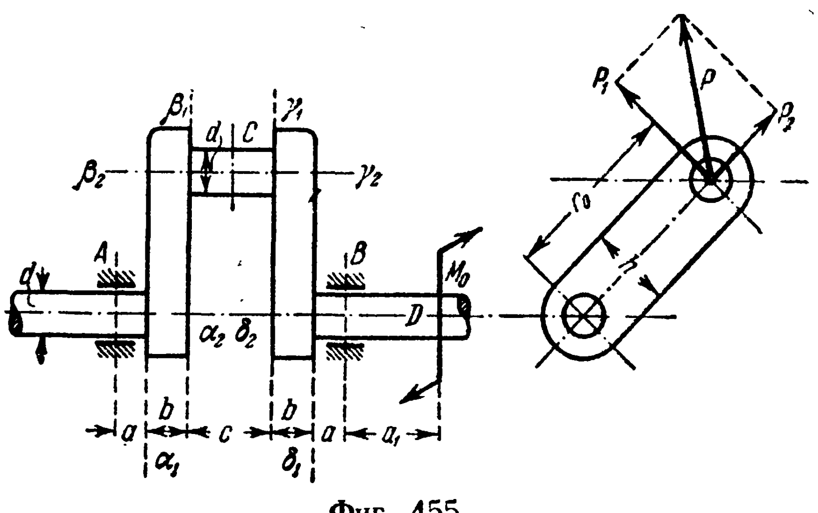
$$\delta = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{l_i} \left(\frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial P} + \frac{M_x}{GJ_к} \frac{\partial M_x}{\partial P} + \frac{M_y}{EJ_y} \frac{\partial M_y}{\partial P} + \frac{M_z}{EJ_z} \frac{\partial M_z}{\partial P} \right)_i dx_i. \quad (29.10)$$

Под P и δ здесь, конечно, понимается обобщённое усилие и соответствующее этому усилию обобщённое перемещение. Аналогично составляются формулы Мора и Верещагина.

Напоминаем, что все рассуждения в этом параграфе велись в предположении, что центр изгиба совпадает с центром тяжести поперечного сечения бруса. Выведенные здесь формулы должны быть несколько изменены для тех случаев, когда такое совпадение не имеет места (см. гл. XXX).

§ 170. Расчёт простейшего коленчатого вала.

Рассмотрим расчёт коленчатого вала, некоторые части которого подвергаются одновременному действию продольных сил, крутящих и изгибающих моментов. Исследуем наиболее простой случай работы вала, имеющего только одно колено (фиг. 455).



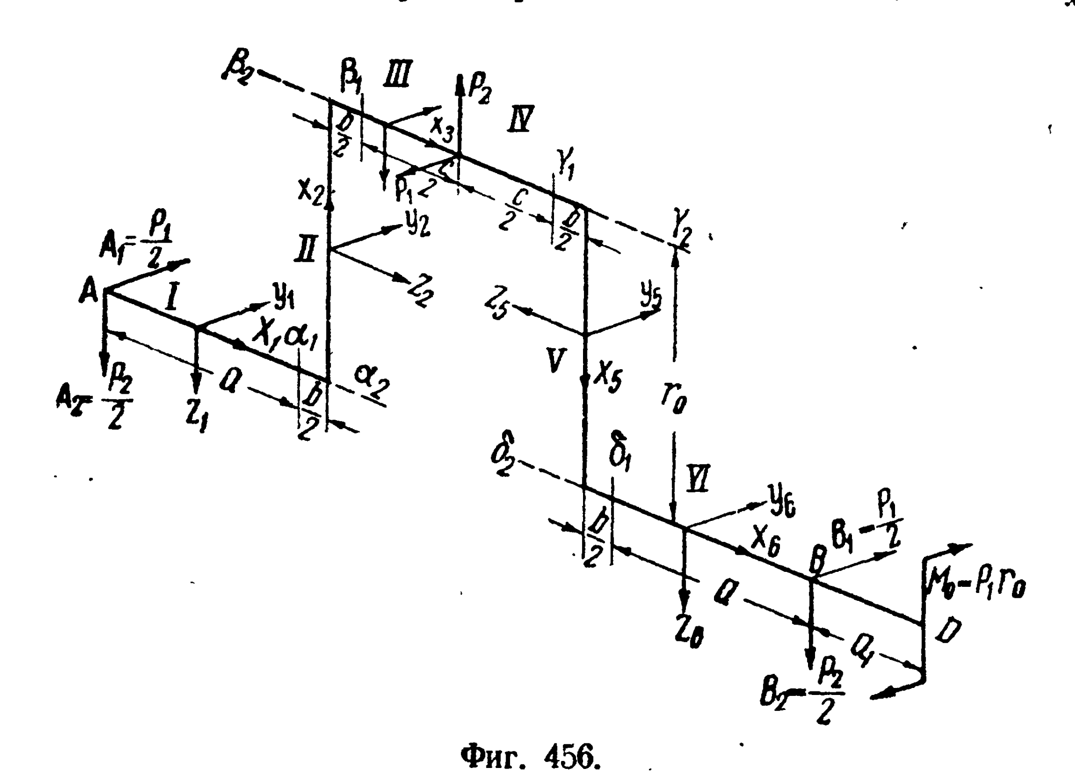
Фиг. 455.

Части вала A и B называются *коренными* шейками; они расположены в подшипниках, которые мы будем считать шарнирными опорами; одна из них допускает горизонтальные перемещения. Шейка C вала называется ***мотылёвой***. Шейки имеют круговое поперечное сечение с диаметром d; части вала, соединяющие коренные шейки с мотылёвой, называются ***щеками*** вала и имеют прямоугольное сечение шириной b и высотой h.

На мотылёвую шейку от шатуна передаётся давление P, вращающее вал; момент этого давления относительно оси вала уравновешивается парой M_0, передающейся на вал от шкива, насаженного около коренной шейки B. Чтобы найти изгибающие и крутящие моменты во всех частях вала, разложим силу P на две взаимно перпендикулярные составляющие: P_2 в плоскости колена и P_1 перпендикулярно к ней. Соответственно разлагаем на такие же составляющие и реакции подшипников A и B. Их можно найти из условия, что все силы, лежащие в плоскости колена, должны уравновешиваться между собой, так же как и силы, лежащие в перпендикулярной плоскости. При вычислениях будем считать, что реакции подшипни-

ков A и B и давление на мотылёвую шейку C приложены посредине длины соответствующих шеек.

На фиг. 456 изображена схема вала со всеми действующими на него силами. Разбивая вал на ряд участков (I—VII), при вычислении нормальных сил, изгибающих и крутящих моментов отнесём каждый из этих участков к своей прямоугольной системе координат x_i, y_i, z_i. Системы координат расположим так, как это показано на фиг. 456. Начало координат каждой системы поместим в центре тяжести рассматриваемого сечения. Тогда силы P_{xi} для



Фиг. 456.

каждого из участков будут нормальными силами, моменты вокруг осей x_i везде будут крутящими моментами, а моменты вокруг осей y_i и z_i — изгибающими моментами: M_{yi} — в плоскости колена, а M_{zi} — в плоскости, перпендикулярной к плоскости колена.

Проводя ряд сечений вала и рассматривая всё время левую отсечённую часть, вычисляем значения нормальных сил, изгибающих и крутящих моментов для каждого участка вала. Эти вычисления сведены в таблицу 26. По данным таблицы 26 без затруднений могут быть построены эпюры изменения N, M_x, M_y и M_z для всего вала.

При проверке прочности, а равно и при определении размеров поперечных сечений, для каждого из участков вала необходимо установить опасное сечение, а в этом сечении — наиболее напряжённые точки.

Для шейки вала опасным сечением является сечение δ_1 на участке VI (см. таблицу 26), в котором к наибольшим изгибающим моментам

$$M_y = +\frac{P_2}{2}a \quad \text{и} \quad M_z = -\frac{P_1}{2}a$$

добавляется ещё и крутящий момент

$$M_x = -P_1 r_0.$$

Результирующий изгибающий момент $M_и$ равен:

$$M_и = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \frac{a}{2}\sqrt{P_1^2 + P_2^2} = P\frac{a}{2}.$$

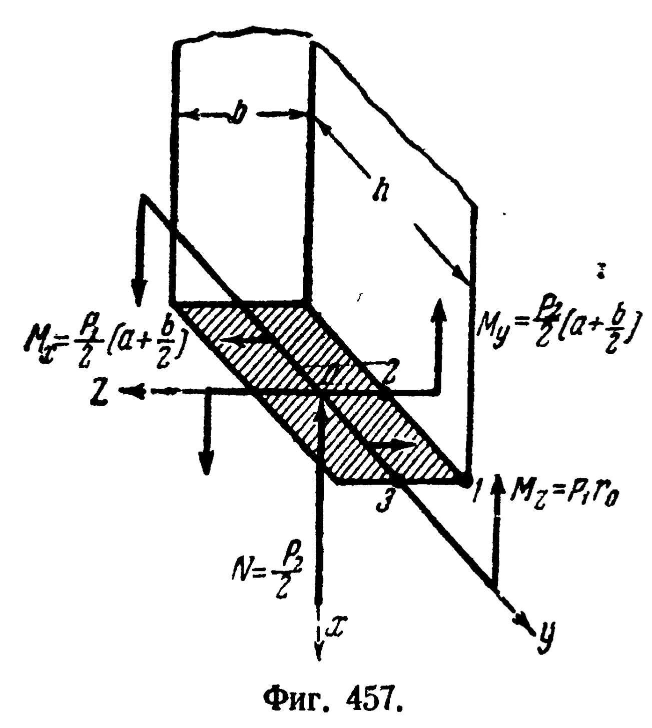
Таблица 26. **Данные расчёта коленчатого вала.**

Название части вала	Участок	Сечение	Значение x	Формулы для вычисления N, M_x, M_y и M_z в различных сечениях: N	M_x	M_y	M_z
Шейка вала	I	—	x_1	—	—	$+\frac{P_2}{2}x_1$	$-\frac{P_1}{2}x_1$
		A	0			0	0
		α_1	a			$+\frac{P_2}{2}a$	$-\frac{P_1}{2}a$
Левая щека	II	—	x_2	$-\frac{P_2}{2}$	$+\frac{P_1}{2}\left(a+\frac{b}{2}\right)$	$+\frac{P_2}{2}\left(a+\frac{b}{2}\right)$	$-\frac{P_1}{2}x_2$
		α_2	0				0
		β_2	r_0				$-\frac{P_1}{2}r_0$
Мотылёвая шейка	III	—	x_3	—	$-\frac{P_1}{2}r_0$	$+\frac{P_2}{2}\left(a+\frac{b}{2}+x_3\right)$	$-\frac{P_1}{2}\left(a+\frac{b}{2}+x_3\right)$
		β_1	$\frac{b}{2}$			$+\frac{P_2}{2}(a+b)$	$-\frac{P_1}{2}(a+b)$
		C	$\frac{1}{2}(c+b)$			$+\frac{P_2}{2}\left(a+b+\frac{c}{2}\right)$	$-\frac{P_1}{2}\left(a+b+\frac{c}{2}\right)$

Продолжение табл. 26.

Название части вала	Участок	Сечение	Значение x	Формулы для вычисления N, M_x, M_y и M_z в различных сечениях			
				N	M_x	M_y	M_z
Мотылёвая шейка	IV	—	x_4	—	$-\frac{P_1}{2}r_0$	$+\frac{P_2}{2}\left(a+b+\frac{c}{2}-x_4\right)$	$-\frac{P_1}{2}\left(a+b+\frac{c}{2}-x_4\right)$
		C	0			$+\frac{P_2}{2}\left(a+b+\frac{c}{2}\right)$	$-\frac{P_1}{2}\left(a+b+\frac{c}{2}\right)$
		γ_1	$\frac{c}{2}$			$+\frac{P_2}{2}(a+b)$	$-\frac{P_1}{2}(a+b)$
Правая щека . . .	V	—	x_5	$-\frac{P_2}{2}$	$-\frac{P_1}{2}\left(a+\frac{b}{2}\right)$	$+\frac{P_2}{2}\left(a+\frac{b}{2}\right)$	$+\frac{P_1}{2}(r_0+x_5)$
		γ_2	0				$+\frac{P_1}{2}r_0$
		δ_2	r_0				$+P_1r_0$
Шейка вала	VI	—	x_6	—	$-P_1r_0$	$+\frac{P_2}{2}\left(a+\frac{b}{2}-x_6\right)$	$-\frac{P_1}{2}\left(a+\frac{b}{2}-x_6\right)$
		δ_1	$\frac{b}{2}$			$+\frac{P_2}{2}a$	$-\frac{P_1}{2}a$
		B	$a+\frac{b}{2}$			—	0
Шейка вала	VII	—	x_7	—	$-P_1r_0$	—	—
		B	0				
		D	a_1				

Наибольшие касательные и нормальные напряжения в шейке вала возникают в точке пересечения окружности вала со следом плоскости действия результирующего изгибающего момента. Условие прочности (например, по теории наибольших касательных напряжений) получает такой вид:



Фиг. 457.

$$\sigma_{r3}=\frac{1}{W_и}\sqrt{M_и^2+M_к^2}=$$

$$=\frac{16}{\pi d^3}\sqrt{a^2(P_1^2+P_2^2)+4P_1^2r_0^2}\leqslant[\sigma]. \quad (1)$$

Для мотылёвой шейки опасным сечением является сечение C, в котором к наибольшим (на участках III и IV) изгибающим моментам

$$M_y=+\frac{P_2}{2}\left(a+b+\frac{c}{2}\right)$$

и

$$M_z=-\frac{P_1}{2}\left(a+b+\frac{c}{2}\right)$$

добавляется ещё и крутящий момент $M_x=-\frac{P_1}{2}r_0$. Результирующий изгибающий момент $M_и$ равен:

$$M_и=\sqrt{M_y^2+M_z^2}=\frac{1}{2}\left(a+b+\frac{c}{2}\right)\sqrt{P_1^2+P_2^2}=\frac{P}{2}\left(a+b+\frac{c}{2}\right).$$

Условие прочности для мотылёвой шейки по той же теории имеет такой вид:

$$\sigma_{r3}=\frac{1}{W_и}\sqrt{M_и^2+M_к^2}=\frac{16}{\pi d^3}\sqrt{\left(a+b+\frac{c}{2}\right)^2(P_1^2+P_2^2)+P_1^2r_0^2}\leqslant[\sigma]. \quad (2)$$

Из условий 1 и 2 определяется диаметр вала d.

Из двух щёк вала в худших условиях (см. таблицу 26) находится правая щека в сечении δ_2. В этом сечении она подвергается действию продольной силы $N=-\frac{P_2}{2}$, крутящего момента $M_x=-\frac{P_1}{2}\left(a+\frac{b}{2}\right)$ и изгибающих моментов $M_y=+\frac{P_2}{2}\left(a+\frac{b}{2}\right)$ и $M_z=+P_1r_0$. При проверке прочности материала щеки необходимо произвести исследование напряжённого состояния в трёх точках: *1*, *2* и *3* (фиг. 457).

В точке *1*, где $\tau_1=0$, условие прочности имеет такой вид:

$$\sigma_{(1)}=-\frac{N}{F}-\frac{M_yz_1}{J_y}+\frac{M_zy_1}{J_z}=\frac{P_2}{2bh}+\frac{P_2}{2}\left(a+\frac{b}{2}\right)\frac{\left(+\frac{b}{2}\right)}{\frac{hb^3}{12}}+$$

$$+(-P_1r_0)\frac{\left(-\frac{h}{2}\right)}{\frac{bh^3}{12}}=\frac{P_2}{hb^2}(3a+2b)+\frac{6P_1r_0}{bh^2}\leqslant[\sigma]. \quad (a)$$

В точке 2, где нормальные напряжения от момента M_z равны нулю, имеем:

$$\sigma_{(2)}=-\frac{N}{F}-\frac{M_y z_2}{J_y}=\frac{P_2}{hb^2}(3a+2b),$$

а

$$\tau_{(2)}=\tau_{\max}=\frac{M_x}{W_к}=\frac{P_1}{2}\left(a+\frac{b}{2}\right)\frac{1}{\beta b^3}.$$

(Значения коэффициента β для прямоугольного сечения см. в таблице 17 § 67.) Условие прочности для точки 2 напишется так:

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma_{(2)}^2+4\tau_{(2)}^2}=\frac{1}{hb^2}\sqrt{P_2^2(3a+2b)^2+P_1^2\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\frac{h^2}{\beta^2 b^2}}\leqslant[\sigma]. \quad (б)$$

В точке 3, где нормальные напряжения от момента M_y равны нулю,

$$\sigma_{(3)}=-\frac{N}{F}+\frac{M_z y_3}{J_z}=\frac{P_2}{2bh}+\frac{6P_1 r_0}{bh^2},$$

а

$$\tau_{(3)}=\gamma\tau_{\max}=\frac{P_1}{2}\left(a+\frac{b}{2}\right)\frac{\gamma}{\beta b^3}.$$

(Значения коэффициента γ см. в таблице 17 § 67.)
Условие прочности в этом случае получает такой вид:

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma_{(3)}^2+4\tau_{(3)}^2}=\frac{1}{2bh^2}\sqrt{(P_2 h+12P_1 r_0)^2+P_1^2(2a+b)^2\left(\frac{\gamma h^2}{\beta b^2}\right)^2}\leqslant[\sigma]. \quad (в)$$

Задаваясь отношением h к b, определяем размеры щеки вала по каждому из условий: (а), (б) и (в); из трёх вариантов выбираем тот, в котором эти размеры получились наибольшими.

На практике очень часто встречаются многопролётные коленчатые валы (у двигателей внутреннего сгорания). Они представляют собой своеобразную неразрезную балку, для которой можно составить в два раза больше дополнительных уравнений, аналогичных обычным уравнениям трёх моментов, чем мы имеем дополнительных опор (в пространстве каждая опора даёт две реакции). Вывод этих уравнений требует умения вычислять углы поворота сечений коленчатого вала, расположенных над центрами подшипников. Эти вычисления не представляют собой ничего принципиально трудного; их можно произвести, применяя теорему Кастильяно или формулу Верещагина.

Пусть, например, нужно найти угол поворота φ сечения D шейки вала относительно сечения C мотылёвой шейки. Применяя теорему Кастильяно, искомый угол поворота найдём по формуле

$$\varphi=\frac{\partial U}{\partial M_0}.$$

Так как от M_0 зависит только величина силы $P_1=\frac{M_0}{r_0}$, входящей лишь в выражения M_x и M_z, то

$$\varphi=\sum_{i=4}^{i=7}\int_{l_i}\left(\frac{M_x}{GJ_к}\frac{\partial M_x}{\partial M_0}+\frac{M_z}{EJ_z}\frac{\partial M_z}{\partial M_0}\right)_i dx_i=\sum_{i=4}^{i=7}\frac{1}{r_0}\int_{l_i}\left(\frac{M_x}{GJ_к}\frac{\partial M_x}{\partial P_1}+\frac{M_z}{EJ_z}\frac{\partial M_z}{\partial P_1}\right)_i dx_i.$$

Подставляя сюда значения M_{xi}, M_{zi}, $\frac{\partial M_{xi}}{\partial P_1}$ и $\frac{\partial M_{zi}}{\partial P_1}$ (см. таблицу 26) и выполняя интегрирование, находим искомую величину φ.

Для решения этой задачи по Верещагину следует построить эпюры моментов (пользуясь таблицей 26); составить затем единичное состояние (в котором необходимо нагрузить сечения C и D двумя равными, но обратно направленными крутящими моментами $\pm M^0_x = 1$), построить эпюру M^0 и произвести подсчёты по формуле (21.20).

ГЛАВА XXX.

ОСНОВЫ РАСЧЁТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ НА КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ.

§ 171. Введение.

Развитие техники и особенно авиации вызвало в последние десятилетия широкое применение в инженерных конструкциях тонкостенных оболочек и стержней; благодаря этому достигается существенное снижение собственного веса систем. Тонкостенные конструкции получили распространение как в авиастроении, так и в ряде других отраслей инженерного дела (кораблестроение, вагоностроение, строительство высотных зданий и пр.).

Разработка и применение новых конструктивных форм привели к созданию новой теории расчёта тонкостенных стержней и оболочек. Ведущее место в создании и развитии новой теории занимают советские учёные и в первую очередь дважды лауреат Государственной премии профессор В. З. Власов, положивший прочное основание этой отрасли науки в своих выдающихся работах[1]).

Важную роль в развитии теории расчёта тонкостенных конструкций сыграли также работы А. А. Уманского[2]), Д. В. Бычкова[3]), Г. Ю. Джанелидзе[4]), А. Р. Ржаницына[5]) и др.

В настоящее время создана стройная теория расчёта тонкостенных конструкций, оформившаяся как новый раздел строительной механики, являющейся предметом изучения в специальных курсах вузов.

---

[1]) Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни. Стройиздат, 1940 г. Его же, Строительная механика тонкостенных конструкций, 1950 г. Его же, Новый метод расчёта призматических складчатых покрытий и оболочек, 1933 г.

[2]) Уманский А. А., Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций, 1939 г. Его же, О нормальных напряжениях при кручении крыла самолёта, 1940 г.

[3]) Бычков Д. В. и Мрощинский А. К., Кручение металлических балок, 1944 г. Бычков Д. В., Расчёт балочных и рамных систем из тонкостенных элементов, 1948 г.

[4]) Джанелидзе Г. Ю. и Пановко Я. Г., Статика упругих тонкостенных стержней, 1948 г.

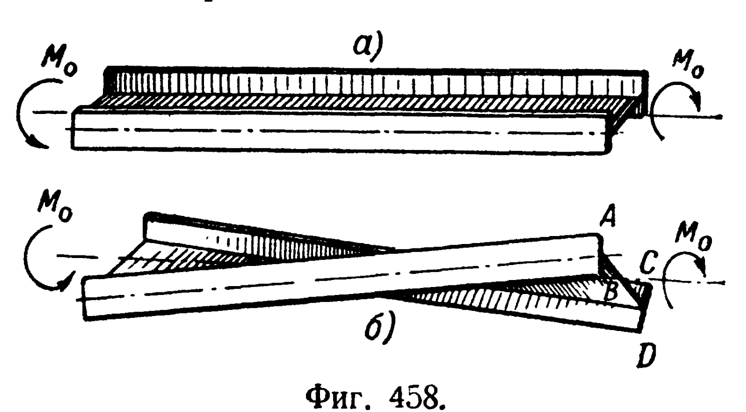
[5]) Ржаницын А. Р., Сложное сопротивление тонкостенных профилей в пределах и за пределами упругости, 1942 г.

Теория тонкостенных стержней вводит ряд новых важных представлений, определений и выводов, с которыми целесообразно ознакомить учащихся уже в курсе сопротивления материалов. В настоящей главе рассматриваются лишь те вопросы теории кручения и изгиба тонкостенных стержней незамкнутого профиля, изучение которых позволит учащимся усвоить основы теории и получить понятие о новых силовых факторах и геометрических характеристиках сечения. Совершенно не затрагиваются здесь вопросы расчёта тонкостенных стержней замкнутого сечения, впервые разработанные проф. А. А. Уманским. Не освещаются и вопросы расчёта рамных систем и неразрезных тонкостенных балок, разобранные в работах Д. В. Бычкова, Б. Н. Горбунова[1]) и др. Из теории устойчивости тонкостенных стержней в § 213 приведены некоторые окончательные результаты без выводов.

Таким образом, эту главу следует рассматривать лишь как введение в теорию расчёта тонкостенных стержней при работе их в пределах упругости.

§ 172. Понятие о свободном и стеснённом кручении.

Приведённые в § 67 формулы для расчёта на кручение стержней некруглого профиля относятся к случаю так называемого свободного кручения. Под свободным, нестеснённым кручением разумеется такой вид кручения, при котором элементы скручиваемого стержня не испытывают изгиба. Опытные и теоретические исследования показывают, что если условия закрепления и нагружения стержня таковы, что не создаётся препятствий свободной депланации (т. е. короблению) сечений, то изгиба при кручении не происходит.



Фиг. 458.

Поясним это на примере. Пусть стержень двутаврового сечения со свободными (незакреплёнными) концами скручивается парами, приложенными к нему по торцам в плоскостях, перпендикулярных к его оси (фиг. 458). Как показано на фиг. 458, *б*, полки двутавра изменяют своё положение по отношению друг к другу, но остаются прямыми. Продольные оси полок лишь поворачиваются друг относительно друга на некоторый угол. Перпендикулярные к ним торцы полок *AB* и *CD*, поворачиваясь вместе с полками, перестают быть параллельными,

---

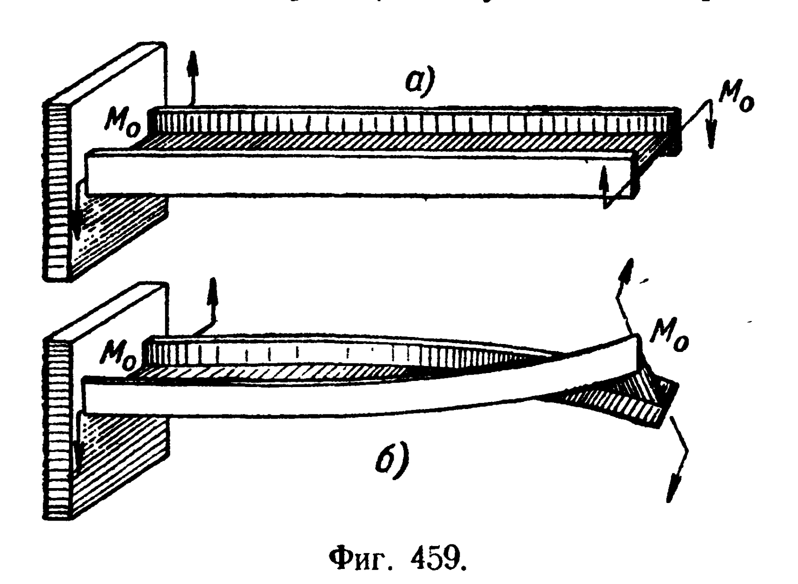
[1]) Горбунов Б. Н. и Стрельбицкая А. И., Теория расчёта рам из тонкостенных стержней, ГТТИ, 1948.

выходят из плоскостей концевых сечений, сечения перестают быть плоскими, коробятся или, как говорят, депланируют.

Таким образом, свободное, или нестеснённое, кручение имеет место при свободной, нестеснённой депланации сечений, причём в этом случае распределение касательных напряжений во всех сечениях остаётся одинаковым. Расстояния между сечениями вдоль любой образующей при свободном кручении не изменяются, и, следовательно, в сечениях *не возникает нормальных напряжений.*

Если по условиям закрепления или загружения стержня свободная депланация сечений (при скручивании его) становится невозможной, то такой вид кручения сопровождается изгибом отдельных элементов стержня и носит название *стеснённого* или *изгибного кручения.*

Поясним это на примере того же двутавра. Пусть условия загружения останутся внешне такими же (две пары сил, приложенные по концам стержня), но условия закрепления изменятся (фиг. 459). Левый конец двутавра будем считать жёстко защемлённым, правый — свободным.



Фиг. 459.

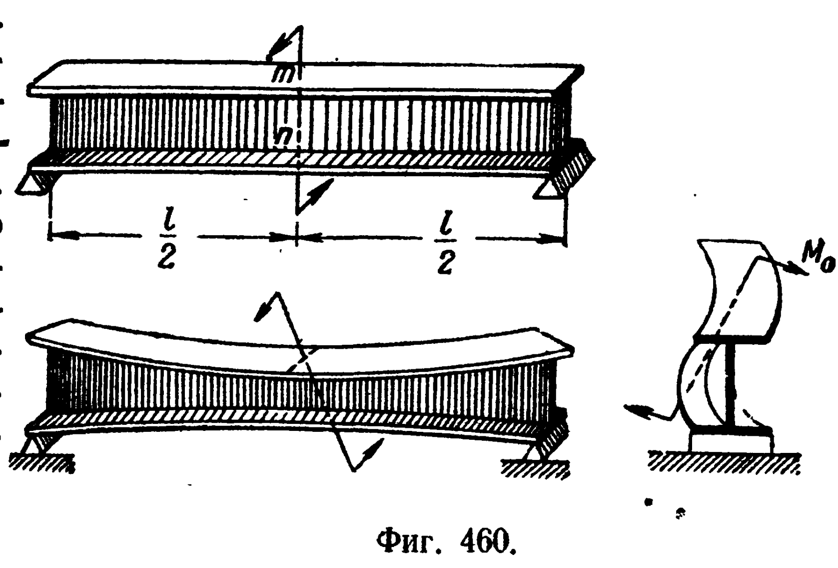
По условию закрепления, защемлённое концевое сечение стержня не коробится, остаётся плоским, и, следовательно, препятствует свободной депланации смежного с ним сечения. Очевидно, чем дальше расположено сечение от места защемления, тем свободнее его депланация. Таким образом, в случаях стеснённого кручения стержня депланация соседних сечений различна. Поэтому и расстояния между отдельными точками этих сечений изменяются, т. е. изменяются длины продольных волокон. Значит, стеснённое кручение сопровождается возникновением соответствующих этим деформациям нормальных напряжений.

На фиг. 459, *б* изображена деформация стержня двутаврового профиля, защемлённого одним концом и нагружённого парой сил с моментом M_0 на другом конце. В этом случае полки двутавра не остаются прямыми, так как защемлённые концы их остаются неподвижными в то время, как свободные концы под действием крутящего момента смещаются в противоположные стороны. Таким образом, под действием крутящего момента M_0 полки двутавра изгибаются, поэтому такой вид кручения называют изгибным кручением.

Разумеется, свободное торцевое сечение, как и все промежуточные сечения между защемлением и концом стержня, перестаёт быть плоским.

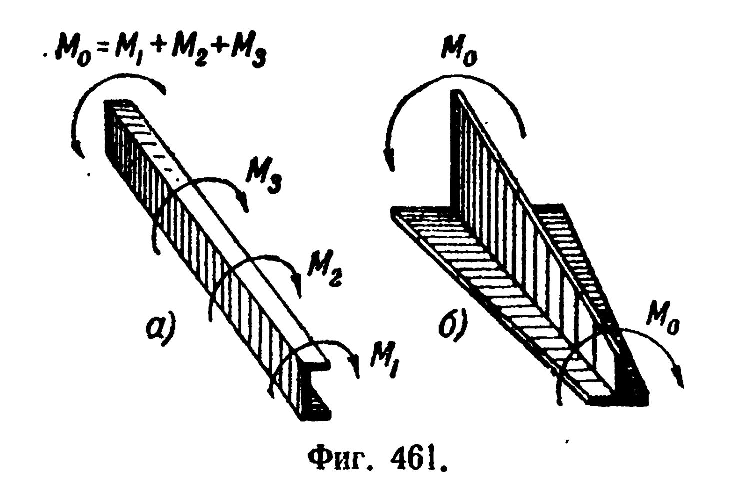
Аналогичную картину изгиба полок мы получили бы для двутавра, опёртого[1]) по концам и нагружённого парой сил, приложенной в серединном сечении $m—n$ (фиг. 460).

Вследствие симметрии сечение $m—n$ посредине пролёта должно остаться плоским. При повороте же его под действием момента пары, полки двутавра подвергнутся деформации изгиба. Депланация различных сечений по длине стержня будет неодинакова, причём в среднем сечении её не будет вовсе.



Фиг. 460.

Стеснённое кручение имеет место как в том случае, когда имеется препятствие для свободной депланации хотя бы одного сечения, так и тогда, когда депланация различных сечений неодинакова. Так, например, если к торцам двутавра, изображённого на фиг. 458, приварить достаточно жёсткие диафрагмы большой толщины, препятствующие депланации торцевых сечений, то вместо свободного кручения мы будем иметь кручение изгибное.



Фиг. 461.

Точно так же, если загрузить стержень несколькими парами по длине (фиг. 461, *а*), то кручение будет стеснённым, так как вследствие различия в величине углов закручивания на разных участках стержня депланация разных сечений не будет одинаковой. Неодинакова будет и депланация смежных сечений, если сечение стержня меняется по его длине (фиг. 461, *б*).

Напомним, что ранее в теории изгиба стержней несимметричного сечения мы встречались с явлением кручения при изгибе (§ 96).

---

[1]) Предполагается, что опоры препятствуют повороту концевых сечений относительно продольной оси балки, но не препятствуют их свободной депланации.

Здесь же, рассматривая случай стеснённого кручения тонкостенных стержней, мы сталкиваемся с явлением изгиба.

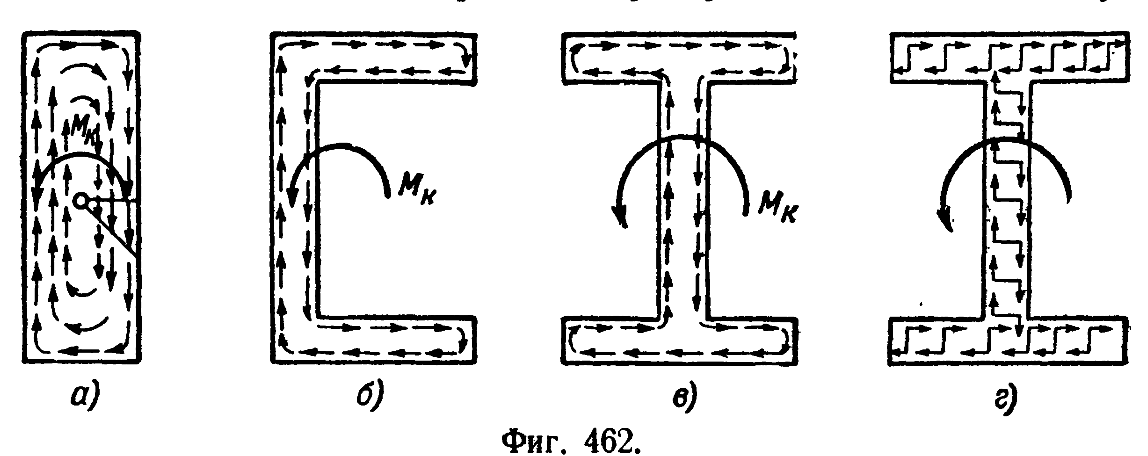
Одна из задач стеснённого кручения была изучена ещё в 1905 г. проф. С. П. Тимошенко при рассмотрении вопроса об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки[1]). Вопросами изгибного кручения занимался ряд советских и иностранных учёных в последующий период (Губер — 1924, Б. Г. Галёркин — 1927, Вагнер — 1928, П. М. Знаменский — 1934, Л. С. Лейбензон — 1935, Блейх — 1936, Каппус — 1937). Однако в общем виде задача об изгибном кручении тонкостенных стержней открытого профиля была решена профессором В. З. Власовым в уже упомянутых его работах 1936—1939 гг.

§ 173. Внутренние усилия в сечениях стержня при стеснённом кручении. Гипотезы.

Как было показано выше (§ 67), при свободном кручении стержня в поперечном его сечении вблизи контура возникают касательные напряжения, направленные вдоль контура (см. фиг. 141 § 67).

Поэтому на противоположных сторонах прямоугольника или эллипса, показанных на фиг. 141, касательные напряжения направлены в разные стороны.

При чистом кручении стержней с сечениями из тонкостенных элементов касательные напряжения распределяются по такому же



Фиг. 462.

закону, они параллельны контуру и направлены в противоположные стороны (фиг. 462). Здесь касательные усилия приводятся к парам, складывающимся в сумму моментов внутренних сил, как это показано на фиг. 462, *г*:

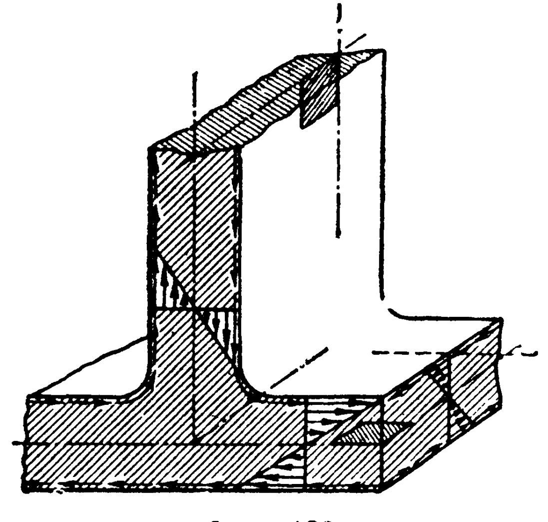
$$\sum M_\tau = M_к.$$

Очевидно, чем меньше толщина стенок стержня, тем меньше плечи внутренних пар, а следовательно, тем больше величина касательных напряжений, уравновешивающих внешний момент. Отсюда следует, что чем тоньше стенки скручиваемого стержня открытого профиля, тем хуже он сопротивляется крутящему моменту, так как даже при

[1]) Известия Спб. Политехнического Института, т. 4 и 5, 1905—1906 гг.

сравнительно небольшой величине $M_к$ в сечениях будут возникать большие касательные напряжения.

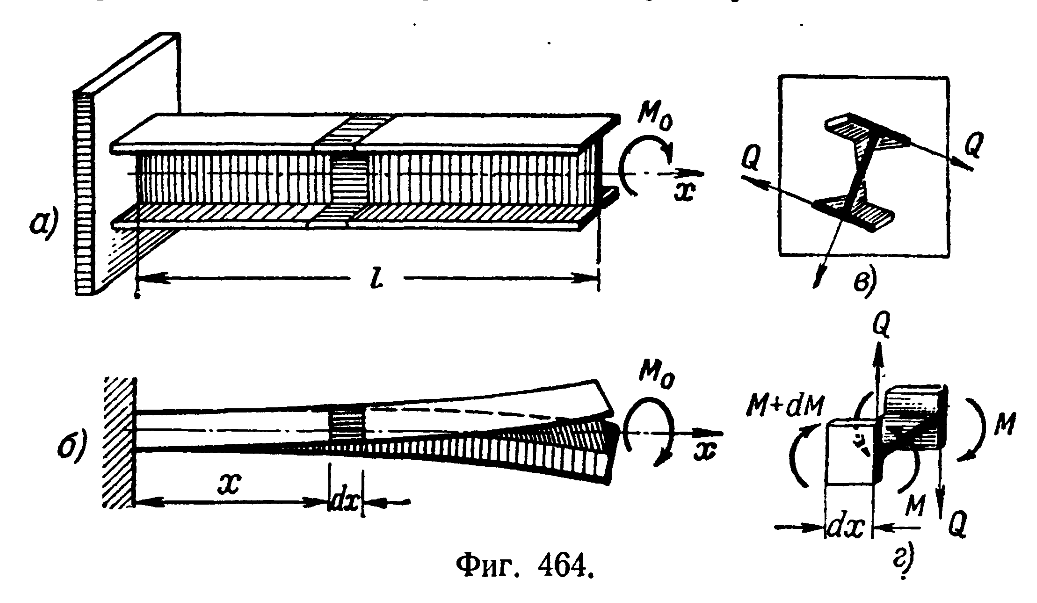
Заметим ещё, что поскольку касательные напряжения в пределах толщины стенки профиля направлены в противоположные стороны (фиг. 463), по средней линии сечения они должны быть равны нулю. Значит, серединные поверхности скручиваемого стержня свободны также от сдвигов; элементарные прямоугольники, взятые на серединной поверхности в любом месте по длине стержня, при свободном кручении не перекашиваются.



Фиг. 463.

Перейдём теперь к рассмотрению стеснённого (изгибного) кручения.

Как это ниже будет показано, при стеснённом кручении, в изгибаемых элементах профиля, помимо указанных на фиг. 462—463, появляются дополнительные касательные напряжения от действия поперечных сил. Хотя эти дополнительные напряжения на серединной линии сечений и не равны нулю, однако, как это установлено расчётом, сдвиги, вызываемые ими в серединной поверхности профиля, малы и ими можно пренебречь. Поэтому в теории расчёта тонкостенных стержней принято допущение, что *материал на серединных поверхностях элементов тонкостенного профиля при стеснённом кручении не претерпевает сдвигов.*



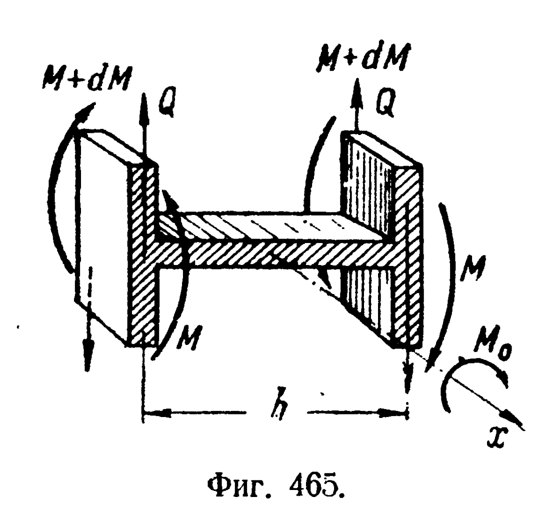
Фиг. 464.

Для ознакомления с характером деформации стержня, находящегося в условиях изгибного кручения, обратимся снова к рассмотренному выше (§ 172) примеру стержня двутаврового профиля (фиг. 464). Заметим, что выводы, получаемые при этом, могут быть обобщены и на несимметричные сечения, например изучаемые далее в § 174.

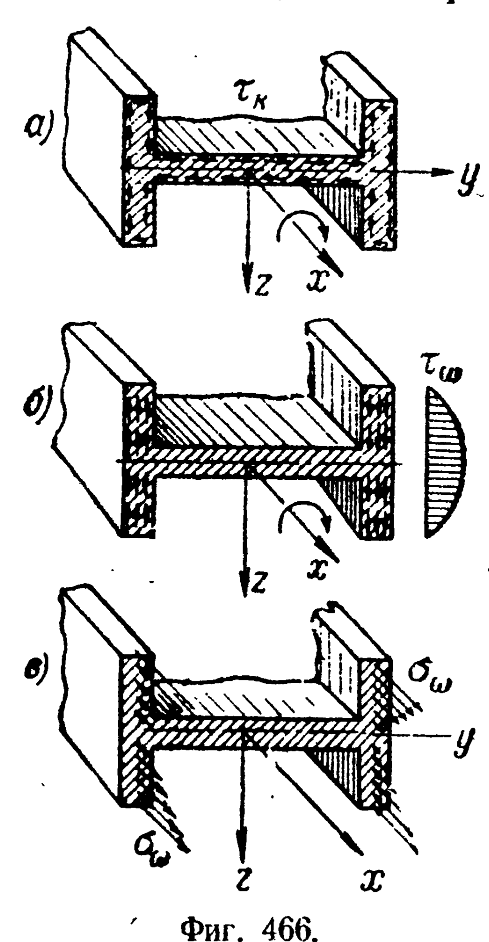
Вырезав элемент стержня длиной dx (заштрихованный на фиг. 464, *б*), выясним, какие напряжения возникают по сечениям этого элемента. Будем при этом считать, что *контуры поперечных сечений стержня не деформируются*. Эта основная гипотеза теории, принятая взамен гипотезы плоских сечений, предполагает, что в деформированном состоянии, несмотря на депланацию сечения при кручении, контуры двутавра сохраняют свою форму, т. е. проекция сечения, претерпевшего депланацию, на плоскость сечения остаётся двутавром (как это показано на фиг. 464, *в*).

На практике неизменяемость контура сечения обычно обеспечивается постановкой диафрагм в нескольких сечениях по длине стержня, препятствующих могущим иметь место искажениям формы контура.

Полки двутавра, как это видно из фиг. 464, *г*, изгибаются в разные стороны моментами M, направленными в противоположные стороны; при переменном изгибающем моменте можно считать, что в сечениях полок возникают дополнительно к изгибающим моментам M поперечные силы Q,



Фиг. 465.



Фиг. 466.

направленные в противоположные стороны (фиг. 464, *г* и 465). Под действием этих силовых факторов в сечениях элемента, выделенного из двутавра, возникают три группы напряжений, показанных на фиг. 466.

а) Касательные напряжения $\tau_к$ (фиг. 466, *а*), зависящие от той части внешнего момента, которую мы назовём *моментом чистого кручения*:

$$\sum M_{\tau_к} = M_к.$$

Эти напряжения могут быть подсчитаны по формулам § 67 (глава XI), которыми мы пользовались при чистом кручении стержней некруглого сечения:

$$\tau_к = \frac{M_к}{J_к} \cdot \delta.$$

Здесь $J_к$ — геометрическая характеристика сечения при кручении, условно названная моментом инерции при кручении; δ — толщина стенки сечения в рассматриваемой точке; $M_к$ — момент чистого кручения, величина которого остаётся пока неизвестной.

б) Дополнительные (вторичные) касательные напряжения τ, возникающие в полках двутавра под действием поперечных сил Q (фиг. 466, *б*). Эти касательные напряжения для рассматриваемого случая можно подсчитать и по методу Журавского, если величина поперечных сил станет известной. Заметим, что силы Q приводятся к паре с моментом $M_\omega = Qh$ (фиг. 465); этот момент, вызывающий появление вторичных касательных напряжений, мы назовём *изгибно-крутящим моментом*, а соответствующие касательные напряжения — *секториальными касательными напряжениями* (τ_ω). Смысл этих терминов выяснится ниже.

в) Нормальные напряжения в полках двутавра; поскольку внешние силы приводятся к паре, вращающей вокруг оси x, эти напряжения образуют статически уравновешенную систему внутренних усилий (фиг. 466, *в*). Они пропорциональны относительным удлинениям волокон, вызванным неравномерной депланацией сечений, называются *секториальными нормальными напряжениями* и обозначаются σ_ω.

Очевидно, что при депланации сечений одни волокна будут удлиняться, другие укорачиваться, а значит, будут и нейтральные волокна, не подвергающиеся ни растяжению, ни сжатию. Следовательно, в сечении будут точки, в которых нормальные напряжения σ_ω обратятся в нуль, так называемые *нулевые точки* сечения. Так как при изгибе и кручении тонкостенных стержней сечения не остаются плоскими, то нулевые точки обычно не лежат на одной прямой, нейтральные волокна не группируются в нейтральный слой. Отыскание нулевых точек сечения, как мы увидим ниже, имеет существенное значение для определения секториальных нормальных напряжений σ_ω.

Так как действие трёх рассмотренных выше групп напряжений ($\tau_к$, τ_ω и σ_ω) эквивалентно действию внешнего момента $M_x = M_0$, составим для их определения уравнения равновесия (фиг. 466):

$$\sum X = 0, \quad \int_F \sigma_\omega \, dF = 0; \tag{30.1}$$

$$\sum M_y = 0, \quad \int_F \sigma_\omega \, dF \cdot z = 0; \tag{30.2}$$

$$\sum M_z = 0, \quad \int_F \sigma_\omega \, dF \cdot y = 0; \tag{30.3}$$

$$\sum M_x = 0, \quad M_0 - \sum M_{\tau_к} - \sum M_{\tau_\omega} = 0 \text{ или } M_к + M_\omega = M_0. \tag{30.4}$$

Суммы проекций на оси y и z тождественно обращаются в нуль.

Из шести уравнений статики два обратились в тождества, а уравнения (30.1), (30.2) и (30.3) выражают условие, что нормальные напряжения (σ_ω) приводятся к полностью уравновешенной системе внутренних усилий. В рассматриваемом нами случае изгибного кручения двутавра система внутренних нормальных усилий, действующих в поперечных сечениях полок, может быть приведена к двум парам M, направленным в противоположные стороны (фиг. 465 и 466, *в*).

Совокупность двух таких пар, лежащих в параллельных плоскостях, называется *бипарой*. Величина бипары может быть оценена новым силовым фактором — моментом второго порядка, равным произведению моментов M на расстояние между ними h (плечо бипары):

$$B = M \cdot h.$$

Эта новая *обобщённая сила* [1]), связанная с неравномерной депланацией сечений и эквивалентная статически уравновешенной системе внутренних нормальных усилий, называется *изгибно-крутящим бимоментом*. Следовательно, вместо отыскания изгибающих моментов, приложенных к отдельным элементам скручиваемого стержня, можно поставить задачу определения величины изгибно-крутящего бимомента B.

Таким образом, для вычисления касательных и нормальных напряжений в сечении стержня необходимо найти величины $M_к$, M_ω и B.

Составленные выше уравнения равновесия (30.1), (30.2) и (30.3) пока не могут быть использованы, так как закон изменения секториальных нормальных напряжений нам неизвестен и не один из интегралов не может быть взят; лишь одно уравнение (30.4) связывает внутренние усилия с внешними. Задача определения напряжений в сечении тонкостенного стержня оказывается статически неопределимой. Для её решения нам необходимо будет обратиться к рассмотрению упругих деформаций.

Заметим, что в рассмотренном примере стеснённого кручения стержня двутаврового сечения изгибу подвергаются только полки двутавра, причём осью кручения стержня является его центральная ось x и центр кручения сечения совпадает с его центром тяжести. В случае несимметричного сечения, либо сечения с одной осью симметрии, повороты сечений будут происходить не вокруг центральной оси стержня, а вокруг оси, проходящей через *центры изгиба* сечений (см. § 96). Центр изгиба в этом случае будет и *центром кручения* [2]). При стеснённом кручении подобных стержней будет иметь место не только изгиб полок, но и изгиб стенок профиля. Однако общие результаты выводов могут быть сведены к тем же уравнениям (30.1) — (30.4).

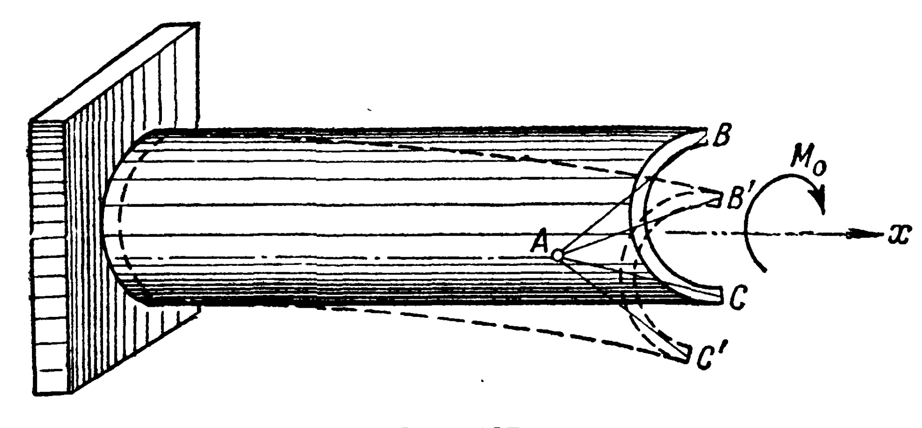
---

[1]) Понятие «обобщённая сила» связывают с соответствующим ей понятием «обобщённое перемещение» тем условием, что обобщённая сила равна работе на обобщённом перемещении, равном 1.

[2]) См. например, Бычков и Мрощинский, Кручение и изгиб металлических балок, Стройиздат, 1944, стр. 64.

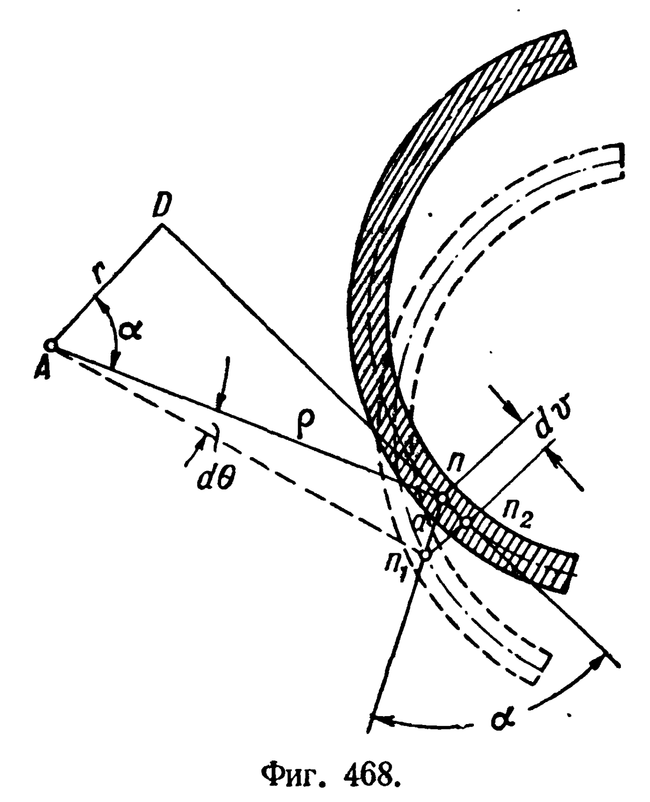
§ 174. Деформация тонкостенного стержня, связанная с неравномерной депланацией сечений.

В предыдущем параграфе было показано, что задача определения напряжений в сечениях тонкостенного стержня при стеснённом кру-



Фиг. 467.

чении статически неопределима. Для раскрытия статической неопределимости рассмотрим деформацию тонкостенного стержня с открытым сечением произвольной формы, контур которого очерчен кривыми линиями (фиг. 467). *Контуры поперечных сечений считаем недеформируемыми* (см. § 173) в своей плоскости, а сечения, не остающимися плоскими.



Фиг. 468.

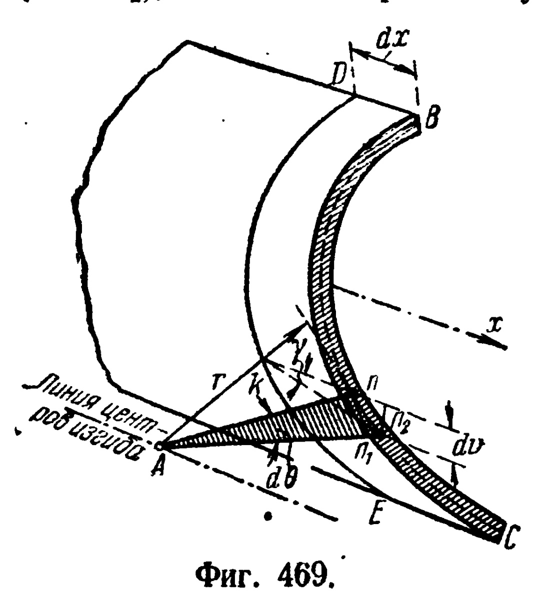
Теоретические выводы о деформации тонкостенного стержня, рассматриваемые ниже, хорошо согласуются с данными опытов.

Пусть к свободному концу тонкостенного стержня, защемлённого одним концом, приложен момент M_0, вызывающий изгибное кручение (фиг. 467). Так как стержень взят несимметричного профиля, то повороты сечений происходят вокруг их центров изгиба A. При повороте произвольного сечения на угол $d\theta$ и депланации его точка n, принадлежащая любому продольному волокну, перемещается в новое положение n_1 (фиг. 468, 469)[1]. Это перемещение

[1] Вследствие малой толщины стенок профиля можно считать, что интересующие нас продольные перемещения и соответствующие им нормальные напряжения по толщине стенки одинаковы. Поэтому можно ограничиться рассмотрением деформаций волокон срединной поверхности.

можно рассматривать как состоящее из трёх составляющих: одной — вдоль касательной к срединной линии сечения в точке n, ($n - n_2$), второй — вдоль образующей (перпендикулярной к плоскости чертежа и потому на фиг. 468 невидимой) и третьей — ($n_2 - n_1$), перпендикулярной к касательной $n - n_2$; последняя нас не интересует, так как мы ищем удлинение волокна (вдоль образующей), связанное с депланацией сечения.

Сначала определим тангенциальную составляющую перемещения ($n - n_2$), а затем продольную, которую можно связать с тангенциальной. Для определения тангенциальной составляющей перемещения воспользуемся гипотезой о недеформируемости контура сечения. На основании этой гипотезы, при определении касательного перемещения, лежащего в плоскости сечения, можно рассматривать перемещение сечения в новое положение как поворот жёсткого диска вокруг центра изгиба (точка A на фиг. 468 и 469), лежащего в плоскости сечения.



Фиг. 469.

Ограничимся рассмотрением поворота на бесконечно малый угол $d\theta$, считая его за угол поворота одного сечения относительно другого, смежного с ним, отстоящего на расстояние dx. При этом повороте точка n опишет радиусом ρ дугу $n - n_1$, равную $a = \rho\, d\theta$.

Опустив перпендикуляр $r = AD$ из точки A на продолжение касательной nD, получим при вершине A угол α, равный углу между сторонами $n - n_1$ и $n - n_2$ треугольника $n_1 n n_2$. Перемещение $n - n_2$ по касательной равно

$$dv = a \cos \alpha.$$

Имея в виду, что $r = \rho \cos \alpha$, получим:

$$dv = \rho\, d\theta \cos \alpha = r\, d\theta. \qquad (30.5)$$

Перейдём к отысканию продольной составляющей перемещения, которую обозначим du. Рассмотрим два бесконечно близких сечения BC и DE с расстоянием между ними dx (фиг. 469).

При повороте сечения BC относительно DE на угол $d\theta$ и переходе точки n в новое положение n_1 образующая kn повернётся на угол γ, равный, как видно из чертежа,

$$\gamma = \frac{dv}{dx} = -r\frac{d\theta}{dx}.$$

Знак минус взят потому, что отрицательному направлению угла $d\theta$ (если смотреть от начала координат вдоль оси x — против часовой

стрелки) соответствует положительный угол γ (по часовой стрелке, если смотреть от полюса вдоль радиуса r), и наоборот (фиг. 469—470).

Выделим на серединной поверхности стержня около рассматриваемой точки n элементарный квадрат, одна из сторон которого является элементом дуги ds (фиг. 470). На основании гипотезы об отсутствии сдвигов на серединной поверхности этот квадрат при перемещении точки n в новое положение n_1 не перекосится, прямые углы его останутся прямыми. Вследствие этого элемент дуги ds выйдет из плоскости поперечного сечения. Нижний конец элемента ds сместится вдоль оси стержня относительно верхнего на величину:

$$du = ds \cdot \sin\gamma \approx ds \cdot \gamma.$$

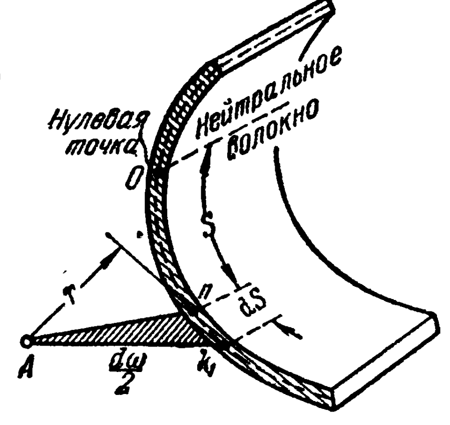
Фиг. 470.

Подставляя вместо γ его значение, найдём элементарное продольное перемещение:

$$du = -ds \cdot r\frac{d\theta}{dx}.$$

Полное перемещение, накопленное как сумма перемещений на элементарных отрезках ds, будет

$$u = -\int_s r\frac{d\theta}{dx} \cdot ds = -\frac{d\theta}{dx}\int_s r\,ds. \quad (30.6)$$



Фиг. 471.

Здесь r — перпендикуляр, опущенный из центра изгиба A на направление касательной к серединной линии сечения, проведённой через рассматриваемую точку n. Нетрудно видеть (фиг. 471), что произведение $r\,ds$ равно удвоенной площади заштрихованного треугольника Ank_1 с основанием ds, которую обозначим $d\omega = 2 \cdot$ пл. $\cdot \triangle\, Ank_1$. Суммируя эти элементарные площади по длине дуги s, найдём некоторую удвоенную площадь:

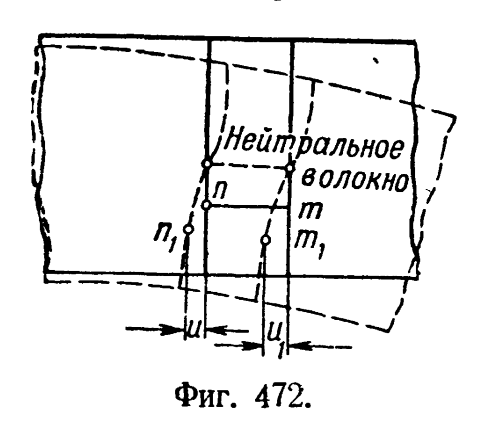
$$\omega = \int_s r\,ds. \quad (30.7)$$

Эта площадь названа *секториальной площадью* или *секториальной координатой* точки n, соответствующей дуге длиной s, отсчитываемой от главной нулевой точки, для которой $\omega_0 = 0$. Методы вычисления секториальных площадей для различных сечений приведены ниже (§ 179).

Заменив интеграл в выражении (30.6) секториальной площадью, найдём величину полного продольного перемещения точки n, связанного с депланацией сечения:

$$u = -\frac{d\theta}{dx} \cdot \omega. \qquad (30.8)$$

Из формулы (30.8) видно, что величина продольного перемещения точки n пропорциональна её секториальной координате ω. Следовательно, секториальные площади являются мерой депланации рассматриваемого сечения. По длине стержня депланация зависит от относительного угла кручения $\frac{d\theta}{dx}$.



Фиг. 472.

Теперь можно найти удлинение волокна mn, длиной dx (фиг. 472). Если при скручивании стержня точка n переместилась вдоль оси на величину u, то точка m, отстоящая от неё на расстояние dx, вследствие неодинаковой депланации смежных сечений, получит перемещение $u_1 = u + du$. Значит, расстояние между точками n и m изменится на величину, равную абсолютному удлинению отрезка dx:

$$\Delta\, dx = u_1 - u = du.$$

Так как $u = -\frac{d\theta}{dx} \cdot \omega$, где ω от x не зависит, а θ является функцией только одной переменной x, то относительное удлинение волокна будет

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{du}{dx} = -\frac{d^2\theta}{dx^2}\omega,$$

или

$$\varepsilon = -\omega\theta''. \qquad (30.9)$$

Считая, что *волокна друг на друга не давят*[1]), можем найти закон изменения нормальных напряжений по сечению, пользуясь законом Гука:

$$\sigma_\omega = E\varepsilon = -E\omega\theta''. \qquad (30.10)$$

Таким образом, величина нормальных напряжений при стеснённом кручении зависит от второй производной по x от угла закручивания и следует закону секториальных площадей. Поэтому эти напряжения и названы секториальными нормальными напряжениями. Гипотеза плоских сечений, обычно принятая в курсе сопротивления материалов, может рассматриваться как частный случай гипотезы секториальных площадей.

---

[1]) Этой гипотезы В. З. Власов не вводит, поэтому в полученных им уравнениях вместо модуля упругости E стоит $E_1 = \frac{E}{1-\mu^2}$.

§ 175. Секториальные нормальные напряжения. Секториальные характеристики сечения.

В §§ 173 и 174 нами были составлены уравнения равновесия выделенной части стержня и рассмотрена деформация некоторого продольного волокна, возникшая в результате неравномерной депланации смежных сечений. Теперь остаётся использовать совместное решение уравнений (30.1), (30.2), (30.3) и (30.10) для определения величины σ_ω.

Подставляя значение σ_ω (30.10) в уравнения равновесия и имея при этом в виду, что при суммировании по площади $\theta'' = \frac{d^2\theta}{dx^2}$ остаётся постоянным, получим:

$$E\theta'' \cdot \int_F \omega\, dF = 0 \quad \text{или} \quad \int_F \omega\, dF = 0; \qquad (30.11)$$

$$E\theta'' \cdot \int_F \omega z\, dF = 0 \quad » \quad \int_F \omega z\, dF = 0; \qquad (30.12)$$

$$E\theta'' \cdot \int_F \omega y\, dF = 0 \quad » \quad \int_F \omega y\, dF = 0. \qquad (30.13)$$

Условие приведения нормальных напряжений к самоуравновешенной системе внутренних нормальных усилий потребовало обращения в нуль трёх интегралов.

Первый из этих интегралов носит название *секториального статического момента* площади сечения и обозначается

$$S_\omega = \int_F \omega\, dF; \qquad (30.14)$$

размерность его — единицы длины в четвёртой степени (например, $см^4$).

Два других интеграла называются *секториально-линейными статическими моментами* сечения и соответственно обозначаются:

$$S_{\omega z} = \int_F \omega z\, dF; \qquad (30.15)$$

$$S_{\omega y} = \int_F \omega y\, dF; \qquad (30.16)$$

размерность их — единицы длины в пятой степени (например, $см^5$).

Чтобы связать секториальные нормальные напряжения с внешними силовыми факторами, расширим понятие об изгибно-крутящем бимоменте как об обобщённой силе; соответствующим ей обобщён-

ным перемещением является $\frac{d\theta}{dx}$ [1]). По данным таблицы 26а (см. фиг. 473) составляем условия равенства работ внешних и внутренних сил на единичных перемещениях; в результате можно получить выражение для изгибно-крутящего бимомента:

$$B = \int_F \sigma_\omega \cdot \omega \, dF. \tag{30.17}$$

Таблица 26а. **Обобщённые координаты и работа.**

Вид деформации	Для работы внешних сил: обобщённая сила	Для работы внешних сил: обобщённое перемещение	Для работы внутреннего усилия: элементарное внутреннее усилие	Для работы внутреннего усилия: соответствующее ему перемещение	Условия равенства работ внешних и внутренних сил
Растяжение (фиг. 473, *а*)	Растягивающая сила P	Удлинение $\Delta l = 1$	$\sigma \cdot dF$	Удлинение волокна при растяжении $\Delta l = 1$	$P = \int_F \sigma \, dF$
Изгиб (фиг. 473, *б*)	Изгибающий момент M	Угол поворота сечения $\theta = 1$	$\sigma \cdot dF$	Удлинение волокна при повороте сечения $\theta \cdot z = 1 \cdot z$	$M = \int_F \sigma \, dF \cdot z$
Изгибное кручение (фиг. 473, *в*)	Изгибно-крутящий бимомент (момент бипары) $B = Mh$	Относительный угол закручивания $\frac{d\theta}{dx} = 1$	$\sigma_\omega dF$	Удлинение волокна при депланации сечения $\lvert u \rvert = \frac{d\theta}{dx} \cdot \omega = 1 \cdot \omega$	$B = \int_F \sigma_\omega dF \cdot \omega$

Подставляя сюда значение $\sigma_\omega = -E\theta''\omega$ из выражения (30.10), получим:

$$B = -E\theta'' \int_F \omega^2 \, dF.$$

Интеграл $\int_F \omega^2 \, dF$ зависит только от формы и размеров сечения и имеет такую же структуру, как и интеграл $\int_F z^2 \, dF$, выражаю-

---

[1]) Обращаясь к фиг. 470 и 473, устанавливаем, что момент бипары на перемещении γ совершает работу, равную $A = 2M\gamma = 2Mh \frac{\gamma}{h} = B \frac{\gamma}{h/2}$.

Так как $\frac{h}{2} = r$, а $\gamma = \frac{dv}{dx}$, то работа бимомента $A = \frac{B}{r} \cdot \frac{dv}{dx} = B \frac{d\theta}{dx}$.

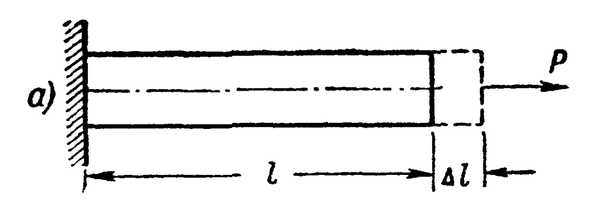
щий величину момента инерции при изгибе балки. Полученный новый интеграл, т. е. *сумма произведений из элементарных площадок на квадраты их секториальных координат* называется секториальным моментом инерции сечения и обозначается J_ω.

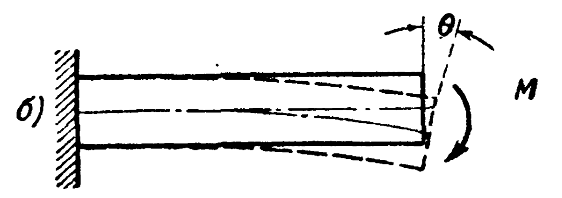
Следовательно, изгибно-крутящий бимомент равен:

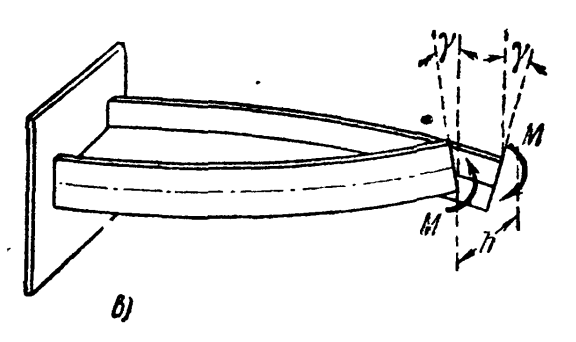
$$B = -E\theta'' J_\omega. \qquad (30.18)$$

Подставив теперь в выражение (30.10) $\frac{B}{J_\omega}$ вместо $-E\theta''$, найдём:

$$\sigma_\omega = \frac{B \cdot \omega}{J_\omega}. \qquad (30.19)$$





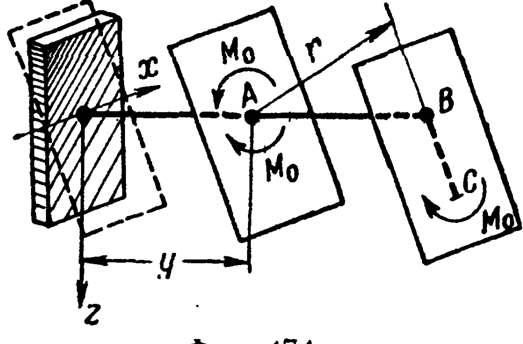


Фиг. 473.

Полученная формула по своему виду совершенно аналогична формуле для нормальных напряжений при изгибе $\left(\sigma = \frac{Mz}{J_y}\right)$. Таким образом, для вычисления секториальных напряжений необходимо изучить методы вычисления величин, входящих в формулу (30.19): изгибно-крутящего бимомента B, секториального момента инерции J_ω и секториальных координат ω.

В целях развития представления об изгибно-крутящем бимоменте, рассмотрим один приём вычисления внешних бимоментов[1]).

Пусть мы имеем в плоскости zOy ломаный стержень ABC, защемлённый одним концом, к другому концу которого приложена пара сил, лежащая в некоторой плоскости, параллельной оси x (фиг. 474).



Фиг. 474.

Взяв сечение в расстоянии y от начала координат, приложим в точке A две равные и противоположно направленные пары M_0 (в плоскости, параллельной заданной паре). В результате переноса пары в точку A мы получили пару M_0 заданного направления и совокупность двух противоположных пар M_0 с расстоянием r между плоскостями их действия, т. е. бипару с бимоментом

$$B = M_0 \cdot r. \qquad (30.20)$$

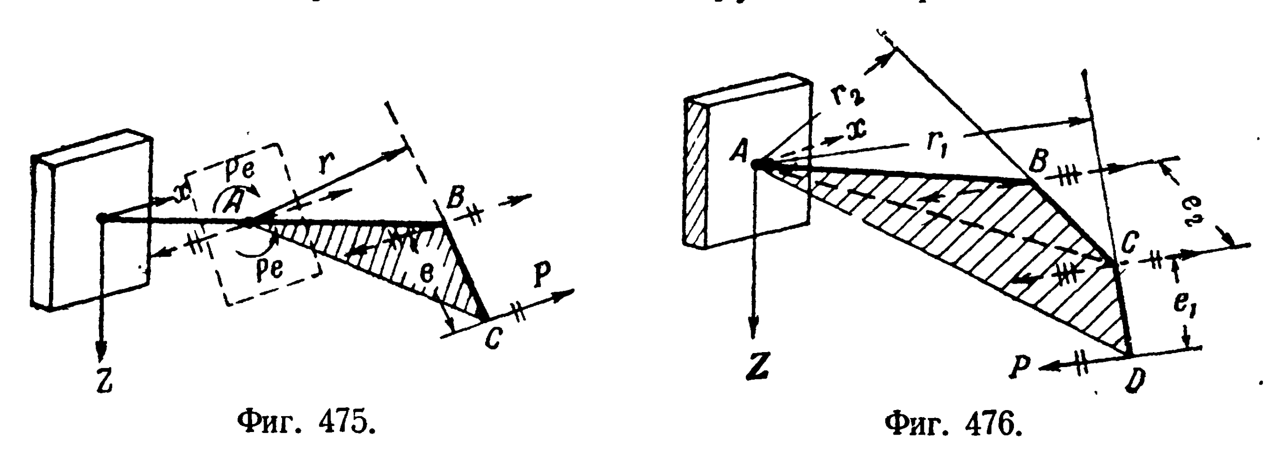
[1]) См. Бычков Д. В., Расчёт рам, Стройиздат, 1948; Пратусевич Я. А., Вариационные методы в строительной механике, ГТТИ, 1948.

Если к свободному концу того же стержня приложена не пара сил, а сила P, перпендикулярная к плоскости ABC (фиг. 475), то, перенеся силу в точку B, получим силу и пару сил с моментом $M = Pe$.

Опустив теперь из некоторой точки A перпендикуляр r на плоскость этой пары, получим (в соответствии с формулой (30.20)) значение изгибно-крутящего бимомента (момента бипары):

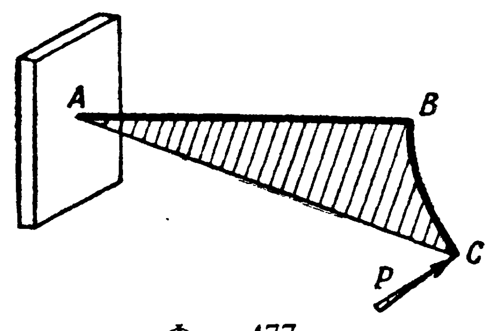
$$B = M \cdot r = Per. \tag{30.20'}$$

Таким образом, изгибно-крутящий бимомент B относительно точки A есть произведение изгибно-крутящей пары Pe на плечо — перпендикуляр r, опущенный из точки A на плоскость этой пары.



Фиг. 475. Фиг. 476.

Выражение (30.20′) можно представить и в другой форме. Как видно из чертежа, произведение er представляет собой удвоенную площадь треугольника ABC. Обозначим эту площадь через ω. Тогда



Фиг. 477.

$$B = P\omega. \tag{30.21}$$

Для ломаного стержня, состоящего из трёх прямых отрезков, изображённого на фиг. 476, после переноса силы в точки B и C получим величину бимомента как сумму бимоментов двух пар $M_1 = Pe_1$ (перечёркнута двумя чёрточками) и $M_2 = Pe_2$ (перечёркнута тремя чёрточками):

$$B = M_1 r_1 + M_2 r_2 = Pe_1 r_1 + Pe_2 r_2 = P(e_1 r_1 + e_2 r_2).$$

Но $e_1 r_1 = \omega_1$, т. е. удвоенной площади треугольника ACD, а $e_2 r_2$ — удвоенной площади треугольника ABC и, окончательно,

$$B = P(\omega_1 + \omega_2) = P\omega, \tag{30.22}$$

где ω — удвоенная площадь, заштрихованная на фиг. 476[1]).

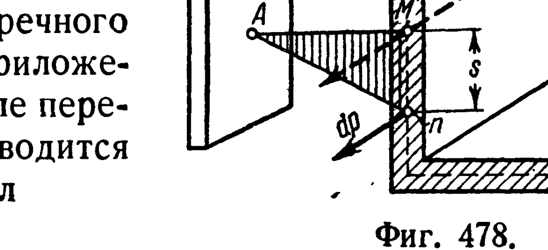
[1]) Формулой (30.22) можно пользоваться для определения внешних изгибно-крутящих бимоментов лишь в случаях, когда жёсткостью стержня при кручении можно пренебречь (см. § 177).

Если плоский стержень имеет вид, показанный на фиг. 477, то очевидно, что изгибно-крутящий бимомент, соответствующий действию приложенной силы P, будет равен:

$$B = P\omega,$$

где ω — удвоенная заштрихованная площадь ABC.

Для перехода к вычислениям внешних изгибно-крутящих бимоментов в тонкостенном стержне представим себе, что ломаные линии, рассмотренные выше (фиг. 474—477), изображают собой не ось стержня, а среднюю линию его поперечного сечения, связанную с полюсом A, а также, что точка A, в которую производился перенос сил, является центром изгиба сечения. В таком случае ω — это та же секториальная площадь, о которой шла речь в § 174. Действительно, если в некоторой точке n поперечного сечения стержня (фиг. 478) приложено усилие $dP = \sigma_\omega dF$, то после переноса его в точку M, оно приводится к силе $dP = \sigma_\omega dF$ и паре сил



Фиг. 478.

$$dM = dP \cdot s = \sigma_\omega dF \cdot s.$$

Опустив из точки A перпендикуляр на плоскость этой пары, получим, в соответствии с формулой (30.20), изгибно-крутящий бимомент

$$dB = dM \cdot r = \sigma_\omega \, dF \cdot s \cdot r;$$

здесь $s \cdot r$ (удвоенная площадь треугольника AMn) и, следовательно:

$$dB = \sigma_\omega \, dF \cdot \omega.$$

Тогда величина изгибно-крутящего бимомента, действующего в сечении, будет

$$B = \int_F \sigma_\omega \cdot \omega \, dF,$$

что совпадает с формулой (30.17), полученной из других соображений.

Фиг. 479.

Бимомент иногда обозначают, как показано на фиг. 479. Условимся относительно знака бимомента. Изгибно-крутящий бимомент будем считать положительным, если при взгляде со стороны полюса A вдоль радиуса r мы видим, что изгибно-крутящая пара вращает против часовой стрелки. В соответствии с этим на фиг. 478 бимомент положителен, а на фиг. 477 — отрицателен.

§ 176. Дифференциальные зависимости между силовыми величинами.

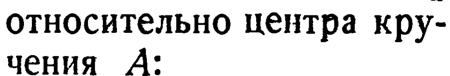
Уравнением (30.4) определяется связь между внешним моментом и составляющими моментами внутренних касательных усилий.

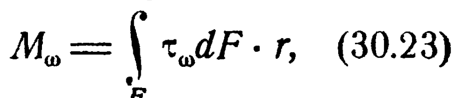
Как было показано в § 173, при стеснённом кручении тонкостенного стержня возникают соответственно и два вида касательных напряжений:

1) *касательные напряжения чистого кручения* (фиг. 480, *а*)

$$\tau_к = \frac{M_к}{J_к}\delta;$$

2) *секториальные касательные напряжения* (фиг. 480, *б*), складывающиеся в сдвигающие усилия $dT = \tau_\omega dF$ и дающие момент M_ω относительно центра кручения A:





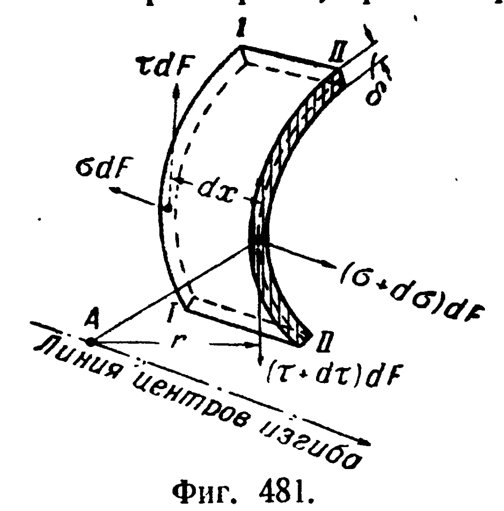
$$M_\omega = \int\limits_F \tau_\omega dF \cdot r, \qquad (30.23)$$

где r — перпендикуляр, опущенный из точки A на направление касательного усилия. Складывая эти компоненты полного касательного напряжения, получим (фиг. 480, *в*):

Фиг. 480.

$$\tau = \tau_к + \tau_\omega.$$

Для установления связи между действующими в сечении силовыми факторами, рассмотрим условия равновесия элемента длиной dx, вырезанного из стержня, показанного на фиг. 467. Этот элемент стержня находится в равновесии под действием нормальных и касательных напряжений, приложенных в сечениях $I-I$ и $II-II$ (фиг. 481).



Фиг. 481.

Нормальные усилия, действующие в сечениях $I-I$ и $II-II$, приводятся к бимоментам B и $B+dB$. Приращение бимомента dB должно равняться бимоменту касательных усилий $dT = \tau dF$ относительно центра кручения A. Соответствующий элементарный бимомент может быть вычислен как произведение пары

$$dM = dT \cdot dx$$

на плечо r (перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость пары).

Имея в виду, что усилия dT возникают на каждой элементарной площадке сечения, получим:

$$dB=\int_F dM\cdot r=\int_F \tau\, dF\cdot dx\cdot r=dx\int_F(\tau_к+\tau_\omega)\, r\, dF$$

или

$$dB=dx\left[\int_F \tau_к r dF+\int_F \tau_\omega\cdot r dF\right].$$

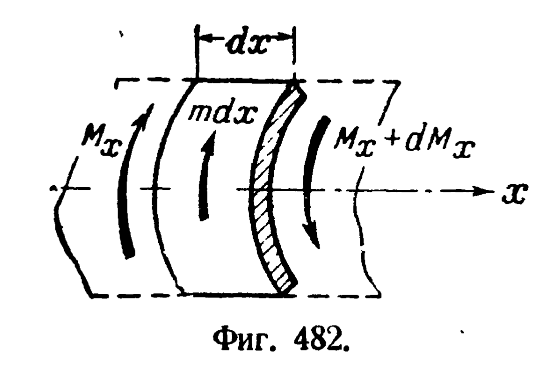
Первый интеграл $\int_F \tau_к r\, dF$ обращается в нуль, что легко доказать, воспользовавшись формулой интегрирования по частям[1]). Что касается второго интеграла $\int_F \tau_\omega r\, dF$, то по формуле (30.23) он представляет собой изгибно-крутящий момент M_ω. Следовательно,

$$dB=dx\cdot M_\omega \quad \text{или} \quad \frac{dB}{dx}=M_\omega. \tag{30.24}$$

Мы получили дифференциальную зависимость, аналогичную известной дифференциальной зависимости между изгибающим моментом и поперечной силой при изгибе

$$\frac{dM}{dx}=Q.$$

Рассмотрим случай нагружения стержня непрерывно переменным внешним моментом по длине стержня. Так будет, например, при изгибе стержня равномерно распределённой нагрузкой q, лежащей в плоскости, не совпадающей с линией центров изгиба.



Фиг. 482.

В этом случае внешний момент $M_0=M_x$, создаваемый сплошной нагрузкой, изменяется по длине стержня. Мерой изменения величины момента M_x является интенсивность сплошной моментной нагрузки, которую обозначим m. Если нагрузка q неравномерно распределена по длине, то и m будет переменной величиной $m=m(x)$.

---

[1]) Действительно, представив $r=u$, а $\tau_к dF=dv$ и интегрируя $\int_F \tau_к r\, dF=\int_F u\, dv=|uv|_F-\int_F v\, du$, получаем: $v=\int_F \tau_к dF=0$, так как сумма касательных усилий от чистого кручения $\tau_к dF$ по сечению F равна нулю. Поскольку $v=0$, то и $[uv-\int v\, du]=0$, т. е. $\int_F \tau_к r\, dF=0$.

Выделив из стержня элемент длиной dx и составив условие его равновесия (фиг. 482), получим:

$$-(M_x+dM_x)+m\,dx+M_x=0$$

или

$$\frac{dM_x}{dx}=m. \qquad (30.25)$$

Мы снова получили дифференциальную зависимость, аналогичную соответствующему уравнению $\frac{dQ}{dx}=q$, выражающему связь между поперечной силой и интенсивностью сплошной нагрузки.

§ 177. Дифференциальное уравнение деформаций при стеснённом кручении. Определение силовых факторов.

На основании полученных в § 176 зависимостей между силовыми факторами B, M_ω, M_x и m можно составить дифференциальное уравнение углов закручивания, подобное дифференциальному уравнению изогнутой оси стержня.

Так как внешний крутящий момент равен

$$M_x=M_\text{к}+M_\omega, \qquad (30.4)$$

то формулу (30.25) можно написать в таком виде:

$$\frac{dM_\text{к}}{dx}+\frac{dM_\omega}{dx}=m. \qquad (30.26)$$

Из теории чистого кручения известно, что

$$d\theta=\frac{M_\text{к}dx}{GJ_\text{к}} \quad \text{или} \quad M_\text{к}=GJ_\text{к}\frac{d\theta}{dx};$$

продифференцировав, получим:

$$\frac{dM_\text{к}}{dx}=GJ_\text{к}\frac{d^2\theta}{dx^2}=GJ_\text{к}\theta''.$$

С другой стороны, имея в виду, что $M_\omega=\frac{dB}{dx}$, получим:

$$\frac{dM_\omega}{dx}=\frac{d^2B}{dx^2}=B''.$$

Если выразить B через θ по формуле (30.18), т. е. $B=-EJ_\omega\theta''$, то $B''=-EJ_\omega\theta^{IV}$, и уравнение (30.26) примет вид:

$$-EJ_\omega\theta^{IV}+GJ_\text{к}\theta''=m.$$

Окончательно:

$$EJ_\omega\theta^{IV}-GJ_\text{к}\theta''+m=0. \qquad (30.27)$$

Это и есть дифференциальное уравнение углов закручивания для случая изгибного кручения. Проинтегрировав его и определив

произвольные постоянные из начальных условий, можем найти величину угла закручивания θ в любом сечении стержня, чем решается задача определения всех силовых факторов:

$$\left.\begin{aligned} M_к &= GJ_к\theta'; \\ B &= -EJ_\omega\theta''; \\ M_\omega &= B' = -EJ_\omega\theta'''. \end{aligned}\right\} \qquad (30.28)$$

Для проверки вычислений можно воспользоваться уравнением (30.4). Уравнение (30.27) может быть упрощено, если учесть, что для ряда случаев практики вторым членом дифференциального уравнения можно пренебречь вследствие малой жёсткости тонкостенного стержня при чистом кручении. Положив $GJ_к \approx 0$, получим:

$$EJ_\omega\theta^{IV} = -m.$$

Уравнение равновесия (30.27) может быть представлено и в другом виде, как дифференциальное уравнение бимоментов. Так как из формулы (30.18) $\theta'' = -\frac{B}{EJ_\omega}$ и значит, $\theta^{IV} = -\frac{B''}{EJ_\omega}$, то взамен (30.27) получим:

$$B'' - \frac{GJ_к}{EJ_\omega}B = m.$$

Обозначая отношение жёсткостей через $\alpha^2 = \frac{GJ_к}{EJ_\omega}$, имеем

$$B'' - \alpha^2 B = m. \qquad (30.29)$$

Общий интеграл уравнения (30.29) имеет вид:

$$B = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + B_0.$$

Здесь $\alpha = \sqrt{\frac{GJ_к}{EJ_\omega}}$ — изгибно-крутильная характеристика стержня, а B_0 — частный интеграл, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (30.29). При m, изменяющемся по линейному закону, $B_0 = -\frac{m}{\alpha^2}$.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются для каждого частного случая загружения стержня в зависимости от условий его закрепления и условий сопряжения смежных участков (при наличии нескольких участков).

Общий интеграл неоднородного дифференциального уравнения (30.27) может быть представлен в форме:

$$\theta = D_1 + D_2 x + D_3 \operatorname{sh} \alpha x + D_4 \operatorname{ch} \alpha x + \theta_A(x),$$

где D_1, D_2, D_3 и D_4 — произвольные постоянные, определяемые из

граничных условий; $\theta_A(x)$ — частное решение неоднородного уравнения (30.27), подбираемое в зависимости от вида загружения[1]).

Для определения постоянных D всегда имеются четыре условия закрепления концов стержня. Так например, для стержня на двух опорах, конструкция которых препятствует повороту концевых сечений, но допускает свободную их депланацию, можно написать:

$$\text{при } x=0 \quad \theta_0=0 \quad \text{и} \quad \theta_0''=0 \quad (\text{иначе } B_0=0);$$
$$\text{»} \quad x=l \quad \theta_l=0 \quad \text{и} \quad \theta_l''=0 \quad (\text{иначе } B_l=0).$$

Для балки, абсолютно защемлённой одним концом, другой конец которой свободен и незагружен, условия на границах имеют вид:

$$\text{при } x=0 \quad \theta=0 \quad \text{и} \quad \theta'=0$$
$$\text{»} \quad x=l \quad \theta''=0 \quad \text{и} \quad M_x=GJ_к\theta'-EJ_\omega\theta'''=0.$$

Таким образом, из уравнений (30.28) могут быть найдены все силовые и деформационные факторы:

$$\left.\begin{aligned}
\theta&=D_1+D_2x+D_3\operatorname{sh}\alpha x+D_4\operatorname{ch}\alpha x+\theta_A;\\
\theta'&=\frac{M_к}{GJ_к}=D_2+\alpha D_3\operatorname{ch}\alpha x+\alpha D_4\operatorname{sh}\alpha x+\theta_A';\\
\theta''&=-\frac{B}{EJ_\omega}=\alpha^2D_3\operatorname{sh}\alpha x+\alpha^2D_4\operatorname{ch}\alpha x+\theta_A'';\\
\theta'''&=-\frac{M_\omega}{EJ_\omega}=\alpha^3D_3\operatorname{ch}\alpha x+\alpha^3D_4\operatorname{sh}\alpha x+\theta_A'''.
\end{aligned}\right\} \qquad (30.28')$$

Применив метод начальных параметров, т. е. считая, что в выбранном начальном сечении все геометрические и силовые факторы имеют вполне определённые значения θ_0, θ_0', B_0 и M_0 и предполагая, что стержень находится под действием только этих начальных факторов, можем получить из уравнений (30.28′) при $x=0$:

$$\theta_0=D_1+D_4;\quad \theta_0'=D_2+\alpha D_3;\quad B_0=-GJ_кD_4;\quad M_0=GJ_кD_2,$$

откуда

$$D_1=\theta_0+\frac{B_0}{GJ_к};\quad D_2=\frac{M_0}{GJ_к};$$
$$D_3=\frac{\theta_0'}{\alpha}-\frac{M_0}{\alpha GJ_к};\quad D_4=-\frac{B_0}{GJ_к}.$$

---

[1]) Бычков Д. В. и Мрощинский А. К., Кручение металлических балок, Стройиздат, 1944 г. § 16.

Подставив эти значения произвольных постоянных в уравнения (30.28') и имея в виду, что при отсутствии внешней нагрузки частный интеграл $\theta_A(x)$ равен нулю, получим[1]:

$$\left.\begin{aligned}
&\theta=\theta_0+\frac{\theta_0'}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha x-\frac{B_0}{GJ_\text{к}}(\operatorname{ch}\alpha x-1)+\frac{M_0}{GJ_\text{к}}\left(x-\frac{1}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha x\right);\\
&\theta'=\theta_0'\operatorname{ch}\alpha x-\frac{\alpha\cdot B_0}{GJ_\text{к}}\operatorname{sh}\alpha x+\frac{M_0}{GJ_\text{к}}(1-\operatorname{ch}\alpha x);\\
&B=-\theta_0'\frac{GJ_\text{к}}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha x+B_0\operatorname{ch}\alpha x+\frac{M_0}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha x;\\
&M_x=M_0.
\end{aligned}\right\}\qquad(30.30)$$

Если, кроме начальных факторов, на стержень действуют геометрические и силовые факторы, приложенные в некотором сечении $x=t$, то изгибно-крутильные факторы для $x\geqslant t$ по методу наложения будут зависеть также и от θ_t, θ_t', B_t и M_t.

Первая из формул (30.30) в этом случае примет вид:

$$\begin{aligned}
\theta=\theta_0&+\frac{\theta_0'}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha x-\frac{B_0}{GJ_\text{к}}(\operatorname{ch}\alpha x-1)+\frac{M_0}{GJ_\text{к}}\left(x-\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\alpha}\right)+\\
&+\theta_t+\frac{\theta_t'}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha(x-t)-\frac{B_t}{GJ_\text{к}}[\operatorname{ch}\alpha(x-t)-1]+\\
&+\frac{M_t}{GJ_\text{к}}\left[(x-t)-\frac{\operatorname{sh}\alpha(x-t)}{\alpha}\right].
\end{aligned}\qquad(30.30')$$

Аналогично получаются и остальные формулы. Формулы (30.30) позволяют решить задачу о стеснённом кручении стержня при любом характере действия нагрузок и потому имеют весьма важное значение для практических расчётов.

В таблице 27 приведены результаты решения уравнения (30.27) для часто встречающихся схем загружения балок и даны выражения изгибно-крутящих бимоментов B, изгибно-крутящих моментов M_ω и крутящих моментов $M_\text{к}$[2]. Через e обозначено расстояние от плоскости действия сил до линии центров изгиба сечения, показанной на каждой из схем.

Через B_0 обозначено выражение для сосредоточенного бимомента, возникающего от действия пары сил M_0, приложенной в плоскости, параллельной главной центральной плоскости, на расстоянии e от центра изгиба. Величина B_0 зависит от способа приложения внешней пары: если M_0 образован действием пары поперечных сил, то $B_0=M_0e$; если же M_0 реализуется в виде пары продольных сил P, то

---

[1]) См. Власов В. З., Упругие тонкостенные стержни, 1940, § 11.

[2]) Бычков Д. В. и Мрощинский А. К., Кручение металлических балок, 1944.

Таблица 27. **Формулы для силовых факторов при кручении и изгибе тонкостенных стержней.**

Схема балки и нагрузки	Изгибно-крутящие бимоменты B	Изгибно-крутящие моменты M_ω	Моменты чистого кручения $M_к$
1	$-\frac{Pe\cdot \operatorname{sh}\alpha(l-x)}{\alpha \operatorname{ch}\alpha l}$ $\max B$ при $x=0$	$\frac{Pe \operatorname{ch}\alpha(l-x)}{\operatorname{ch}\alpha l}$ $\max M_\omega$ при $x=0$	$\frac{Pe[\operatorname{ch}\alpha l-\operatorname{ch}\alpha(l-x)]}{\operatorname{ch}\alpha l}$ $\max M_k$ при $x=l$
2	$-\frac{qe}{\alpha^2 \operatorname{ch}\alpha l}[\alpha l \operatorname{sh}\alpha(l-x)-\operatorname{ch}\alpha l+\operatorname{ch}\alpha x]$ $\max B$ при $x=0$	$\frac{qe[\alpha l \operatorname{ch}\alpha(l-x)-\operatorname{sh}\alpha x]}{\alpha \operatorname{ch}\alpha l}$ $\max M_\omega$ при $x=0$	$\frac{qe[\alpha(l-x)\operatorname{ch}\alpha l+\operatorname{sh}\alpha x-\alpha l \operatorname{ch}\alpha(l-x)]}{\operatorname{ch}\alpha l}$ $\max M_k$ при $x=\frac{l}{4}$
3	$\frac{-B_0 \operatorname{ch}\alpha x}{\operatorname{ch}\alpha l}$ $\max B$ при $x=l$	$\frac{-B_0 \alpha \operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{ch}\alpha l}$ $\max M_\omega$ при $x=l$	$\frac{B_0 \alpha \operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{ch}\alpha l}$ $\max M_k$ при $x=l$
4	$\frac{Pe \operatorname{sh}\alpha x}{2\alpha \operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}}$ $\max B$ при $x=\frac{l}{2}$	$\frac{Pe \operatorname{ch}\alpha x}{2 \operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}}$ $\max M_\omega$ при $x=\frac{l}{2}$	$\frac{Pe}{2}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\alpha x}{\operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}}\right)$ $\max M_k$ при $x=0$

Продолжение табл. 27.

Схема балки и нагрузки	Изгибно-крутящие бимоменты B	Изгибно-крутящие моменты M_ω	Моменты чистого кручения $M_\text{к}$
5	$\frac{qe}{\alpha^2}\left[1-\frac{\operatorname{ch}\alpha\left(\frac{l}{2}-x\right)}{\operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}}\right]$ max B при $x=\frac{l}{2}$	$\frac{qe}{\alpha}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha\left(\frac{l}{2}-x\right)}{\operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}}$ max M_ω при $x=0$	$\frac{qe}{\alpha}\left[\alpha\left(\frac{l}{2}-x\right)-\frac{\operatorname{sh}\alpha\left(\frac{l}{2}-x\right)}{\operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}}\right]$ max M_k при $x=0$
6	$\frac{B_0\cdot\operatorname{sh}\alpha(l-x)}{\operatorname{sh}\alpha l}$ max B при $x=0$	$\frac{-B_0\cdot\alpha\operatorname{ch}\alpha(l-x)}{\operatorname{sh}\alpha l}$ max M_ω при $x=0$	$\alpha B_0\left[\frac{\operatorname{ch}\alpha(l-x)}{\operatorname{sh}\alpha l}-\frac{1}{\alpha l}\right]$ max M_k при $x=0$
7	$\frac{Pe\left[\operatorname{ch}\alpha x-\operatorname{ch}\alpha\left(\frac{l}{2}-x\right)\right]}{2\alpha\cdot\operatorname{sh}\frac{\alpha l}{2}}$ max B при $x=0$ и $x=\frac{l}{2}$	$\frac{Pe\left[\operatorname{sh}\alpha x+\operatorname{sh}\alpha\left(\frac{l}{2}-x\right)\right]}{2\operatorname{sh}\frac{\alpha l}{4}}$ max M_ω при $x=0$ и $x=\frac{l}{2}$	$\frac{Pe\left[\operatorname{sh}\frac{\alpha l}{2}-\operatorname{sh}\alpha x-\operatorname{sh}\alpha\left(\frac{l}{2}-x\right)\right]}{2\operatorname{sh}\frac{\alpha l}{2}}$ max M_k при $x=\frac{l}{4}$

$B_0 = P(\omega_1 + \omega_2)$, где ω_1 и ω_2 — секториальные координаты точек приложения сил P.

Полученные выше дифференциальные уравнения позволяют провести аналогию между теорией изгибного кручения и плоского изгиба. Дифференцируя по x уравнение (30.18), получим:

$$\left.\begin{aligned} EJ_\omega\theta'' &= -B; \\ EJ_\omega\theta''' &= -\frac{dB}{dx} = -M_\omega; \\ EJ_\omega\theta^{IV} &= -\frac{d^2B}{dx^2} = -\frac{dM_\omega}{dx} = -m_\omega. \end{aligned}\right\} \tag{30.31}$$

Здесь m_ω — интенсивность изменения изгибно-крутящего момента.

Уравнения (30.31) аналогичны равенствам (12.3) — (12.5). Однако между этими двумя группами дифференциальных уравнений имеется принципиальная разница. Если из второй системы уравнений путём интегрирования их можно найти значение y, так как при заданной нагрузке q величины Q и M известны, то из первой группы уравнений (30.31) величину θ найти нельзя, так как при заданной внешней нагрузке величина m_ω сама неизвестна.

В случае, когда в уравнении (30.27) можно пренебречь жёсткостью при кручении, последняя строка системы (30.31) преобразуется и примет вид:

$$EJ_\omega\theta^{IV} = -m.$$

Поскольку интенсивность m изменения внешнего момента известна, аналогия вступает в свои права, и легко сразу найти все неизвестные величины.

Так, например, если для балки на двух опорах, загружённой по всему пролёту равномерно распределённой нагрузкой, известно, что

$$\max M = \frac{ql^2}{8} \text{ и } \max f = \frac{5ql^4}{384EJ},$$

то при изгибном кручении той же балки можно написать по аналогии:

$$\max B = \frac{ml^2}{8} \text{ и } \max\theta = \frac{5ml^4}{384EJ_\omega}.$$

Точно так же для консоли, загружённой сплошной нагрузкой q, имея в виду, что

$$\max M = \frac{ql^2}{2} \text{ и } \max f = \frac{ql^4}{8EJ},$$

можно написать:

$$\max B = \frac{ml^2}{2} \text{ и } \max\theta = \frac{ml^4}{8EJ_\omega}.$$

В обоих случаях $m = qe$, где e — плечо нагрузки относительно линии центров изгиба.

Следует иметь в виду, что эти результаты являются приближёнными и что приведённая выше аналогия справедлива при $GJ_к$ весьма малом. По данным Д. В. Бычкова ошибка будет не более 5% в случае, если αl не превосходит следующих значений:

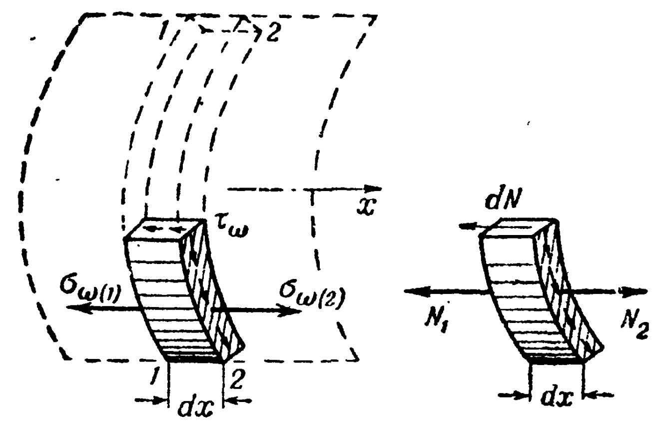
для консоли при $\alpha l < 0{,}5$,
для балки на двух опорах при $\alpha l < 0{,}75$,
для балки, защемлённой обоими концами при $\alpha l < 1{,}50$.

§ 178. Вычисление касательных напряжений в сечении тонкостенного стержня.

Теперь, когда все силовые факторы определены, остаётся произвести вычисление касательных напряжений, возникающих в сечении стержня под действием внешнего крутящего момента $M_\theta = M_к + M_\omega$.

О касательных напряжениях от чистого кручения уже было сказано в §§ 173, 176 и 67 [формулы (11.37)]. Для определения секториальных касательных напряжений воспользуемся той же методикой, какая была принята при выводе формулы Журавского (§ 91).

Вырежем из рассматриваемого стержня (фиг. 467) элемент длиной dx, одна из граней которого (например, нижняя) свободна от касательных напряжений (фиг. 483). Элемент находится в равновесии под действием секториальных нормальных и касательных напряжений. Обозначим нормальные напряжения, действующие на левую грань *1—1* и на правую *2—2* соответственно:



Фиг. 483.

$$\sigma_{\omega(1)} = \frac{B_\omega}{J_\omega} \quad \text{и} \quad \sigma_{\omega(2)} = \frac{(B + dB)\,\omega}{J_\omega}.$$

По этим же граням действуют секториальные касательные напряжения τ_ω. По закону парности касательные напряжения τ_ω действуют также по площадке, параллельной оси x. Эти касательные напряжения должны сложиться в усилие, уравновешивающее разность нормальных усилий, действующих в сечениях *1—1* и *2—2* по торцевым площадкам отсечённого элемента.

Величины нормальных усилий соответственно равны:

$$N_1 = \int\limits_{F_{отс}} \sigma_{\omega(1)}\, dF = \frac{B}{J_\omega} \int\limits_{F_{отс}} \omega\, dF \quad \text{и} \quad N_2 = \frac{B + dB}{J_\omega} \int\limits_{F_{отс}} \omega\, dF.$$

Так как интеграл $\int\limits_{F_{отс}} \omega\, dF$ представляет собой секториальный статический момент отсечённой площади торца элемента [см. формулу (30.14)], то

$$N_1 = \frac{BS_\omega^0}{J_\omega} \quad \text{и} \quad N_2 = \frac{B + dB}{J_\omega} S_\omega^0,$$

а сдвигающая сила, уравновешиваемая секториальными касательными напряжениями, равна:

$$dN = N_2 - N_1 = \frac{dB}{J_\omega} S_\omega^0.$$

Отсюда величина искомых секториальных касательных напряжений будет:

$$\tau_\omega = \frac{dN}{dx\delta} = \frac{dB}{dx\delta} \frac{S_\omega^0}{J_\omega}.$$

Имея в виду, что $\frac{dB}{dx} = M_\omega$ (30.24), получим:

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega \cdot S_\omega^0}{\delta \cdot J_\omega}. \qquad (30.32)$$

Структура полученной формулы совершенно аналогична структуре формулы Журавского для вычисления касательных напряжений при поперечном изгибе. Заметим, что величина секториальных касательных напряжений сравнительно невелика. Однако, несмотря на это, они принимают на себя значительную долю внешнего момента, так как плечи соответствующих касательных усилий обычно велики (см., например, фиг. 466, *б*).

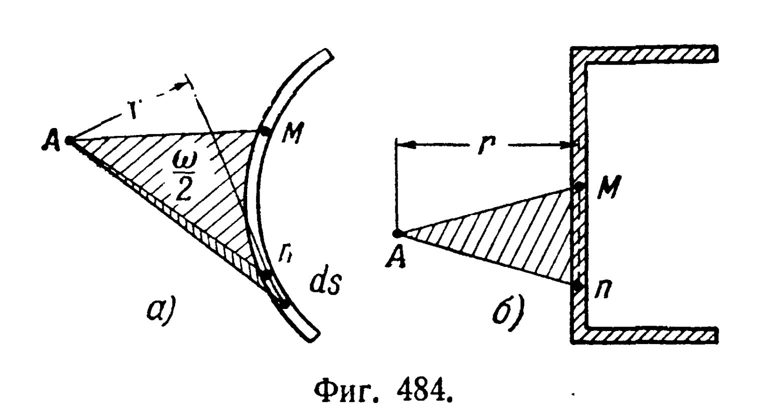
В формулы для секториальных напряжений (30.19) и (30.32) входят секториальные координаты и новые секториальные геометрические характеристики сечения, методы определения которых приводятся ниже (см. §§ 179 и 180).

§ 179. Вычисление секториальных площадей. Построение секториальных эпюр.

Выше было показано, что секториальная площадь равна (30.7):

$$\omega = \int_s r\,ds,$$

где r — перпендикуляр, опущенный из полюса A на направление касательной к средней линии сечения, проведённой через данную точку (фиг. 484). Пределы интегрирования определяются выбором начала координат, т. е. того луча AM, от которого ведутся отсчёты. Точка M, лежащая на средней линии сечения, называется началом отсчёта.



Фиг. 484.

Как известно (§ 174), интеграл $\int_s r\,ds$ равен удвоенной площади заштрихованного на фиг. 484, *а* сектора, ограниченного лучами AM, An и контуром средней линии сечения. Для контура,

ограниченного прямыми линиями, секториальная площадь равна удвоенной площади треугольника, заключённого между линией контура и лучами AM и An (фиг. 484, *б*).

Нетрудно видеть, что каждой точке сечения соответствует своя секториальная площадь. Поэтому секториальную площадь можно рассматривать как секториальную координату данной точки.

Если вычислять значения секториальных площадей для каждой точки сечения и откладывать их в определённом масштабе по нормали к средней линии сечения, то мы получим так называемую эпюру секториальных площадей, т. е. график, показывающий закон изменения ω по контуру сечения.

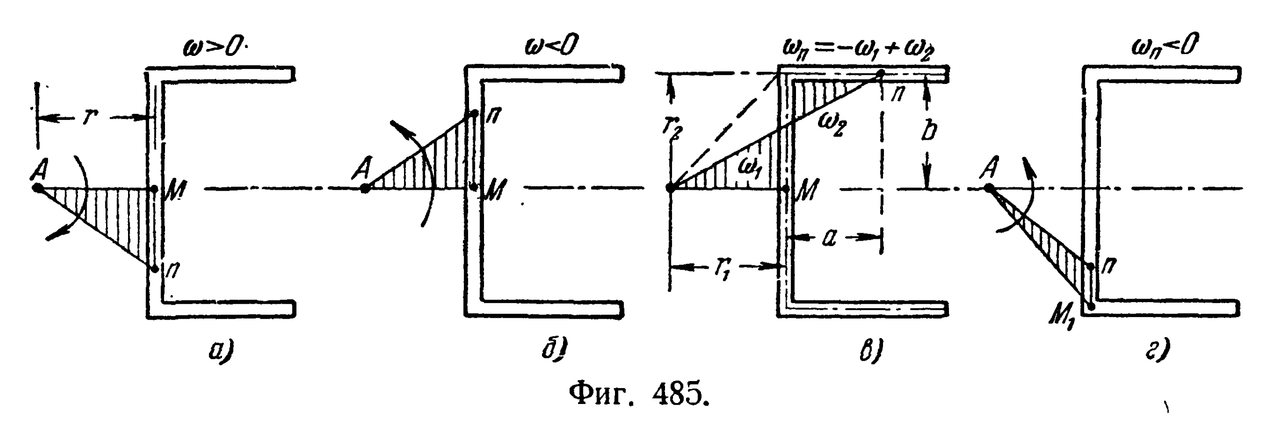
При криволинейном контуре сечения длина перпендикуляра r, а значит и величина секториальных площадей ω, изменяется по длине контура, в зависимости от его очертания $[\omega = \omega(s)]$. В этом случае эпюра секториальных площадей будет криволинейной.

Если контур сечения представляет собой ломаную линию, то для всех точек каждого прямолинейного участка величина r будет иметь одно и то же значение и эпюра секториальных координат (фиг. 484, *б*) будет состоять из отдельных прямолинейных участков.

Условимся о знаках. Знак секториальной координаты ω для некоторой точки n считаем положительным, если подвижной радиус-вектор при переходе от выбранного начального радиуса AM в положение An поворачивается по часовой стрелке (фиг. 485, *а*). В обратном случае величина ω считается отрицательной (фиг. 485, *б*). Если радиус-вектор пересекает контур сечения, то секториальная площадь определяется как алгебраическая сумма двух площадей разных знаков (фиг. 485, *в*):

$$\omega = -r_1 b + r_2 a = -\omega_1 + \omega_2.$$

Как это видно из сопоставления чертежей (фиг. 485, *а* и фиг. 485, *г*), если начало отсчётов взять не в точке M, а в другой какой-нибудь точке M_1, то секториальная площадь (координата) для той же точки получит другое значение и по величине, и по знаку.



Фиг. 485.

Нетрудно видеть, что величина секториальной площади зависит также и от положения полюса A, из которого ведётся построение.

До сих пор во всех выводах мы исходили из предположения, что секториальные площади строятся из центра изгиба, положение которого считалось известным. Однако иногда построение эпюры секториальных площадей выполняют, пользуясь произвольным полюсом, что даёт новые значения секториальных координат.

Условимся относительно выбора положения полюса и начала отсчётов при построении секториальных эпюр следующим образом.

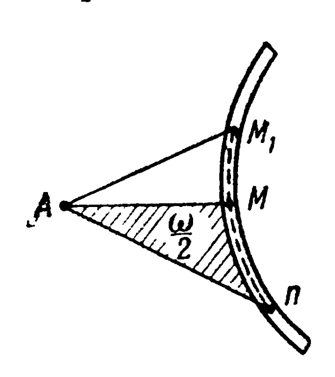
Главным секториальным полюсом будем считать центр изгиба сечения A, пользуясь которым в дальнейшем мы и будем вести построение секториальных эпюр.

Начало отсчётов секториальных площадей будем вести от определённой точки сечения, называемой главной нулевой секториальной точкой. Как уже указывалось (§ 173), в сечении тонкостенного стержня, подвергающегося стеснённому кручению, имеются точки, где $\sigma_\omega = 0$ (нулевые точки).

Главной нулевой секториальной точкой M назовём нулевую точку, которая находится в кратчайшем расстоянии от центра изгиба A.

Радиус A-M назовём главным начальным радиусом, а секториальную эпюру, построенную от него — *эпюрой главных секториальных площадей.*

В дальнейшем для определения положения главного секториального полюса и главной нулевой точки, нам придётся предварительно строить секториальные эпюры при произвольном выборе этих точек (подобно тому, как для отыскания положения главных центральных осей инерции сечения балки приходится сначала вести отсчёты от произвольно выбранных осей). Чтобы затем перейти к главным секториальным точкам, удобно воспользоваться приводимыми ниже формулами перехода к новой системе секториальных координат.



Фиг. 486.

а) *Изменение начала отсчёта дуги* s равносильно изменению пределов интегрирования функции

$$\omega = \int_s r\,ds,$$

что ведёт к изменению значения секториальной площади на постоянную величину. Это видно из фиг. 486; при перенесении начала отсчётов из точки M_1 в точку M, секториальная координата какой-либо точки получит значение:

$$\omega = \omega' - \omega^M, \tag{30.33}$$

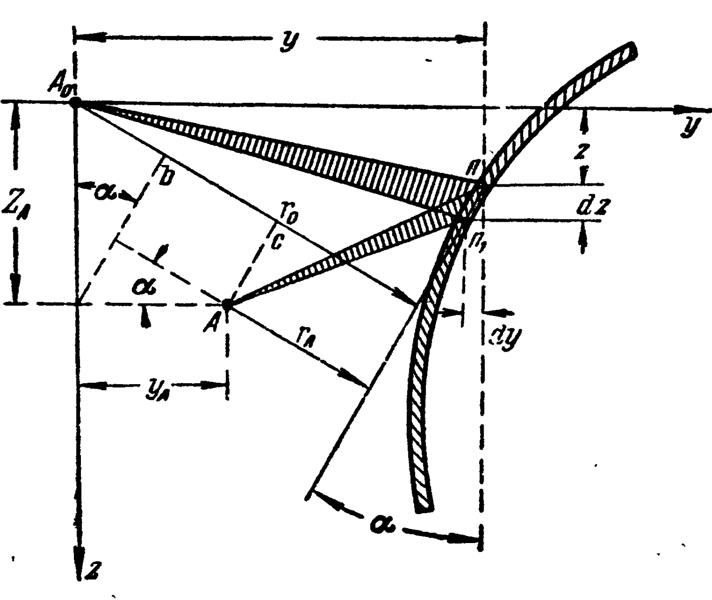
где ω' — секториальная координата точки n при исходном начале отсчётов в точке M_1, а ω^M — удвоенная площадь сектора AM_1M, т. е. секториальная координата новой начальной точки M, отсчитанная от прежнего начала отсчётов M_1.

б) *Формула перехода при перенесении полюса из точки A_0* в точку A может быть получена из следующих соображений (фиг. 487).

Возьмём на средней линии сечения любую точку $n(y, z)$ (начало координат y и z для простоты взято в точке A_0). Для точки A_0 элементарная секториальная площадь имеет значение $d\omega_0 = ds \cdot r_0$.

Если мы теперь перенесём полюс в точку $A(y_A, z_A)$, то элементарная секториальная площадь для той же точки n будет:

$$d\omega_A = ds \cdot r_A.$$



Фиг. 487.

Длина перпендикуляра r_A может быть выражена через r_0 так:

$$r_A = r_0 - A_0b - bc = = r_0 - z_A \sin\alpha - y_A \cos\alpha,$$

где $\sin\alpha = -\frac{dy}{ds}$, а $\cos\alpha = \frac{dz}{ds}$; следовательно:

$$r_A = r_0 + z_A\frac{dy}{ds} - y_A\frac{dz}{ds}.$$

Или, умножив на ds и имея в виду, что $d\omega_A = ds \cdot r_A$, получаем:

$$d\omega_A = d\omega_0 + z_A dy - y_A \cdot dz.$$

Проинтегрировав, находим:

$$\omega_A = \omega_0 + z_A y - y_A z + C. \qquad (30.34)$$

Это и есть формула перехода к новому полюсу. Здесь ω_0 — секториальная площадь, полученная из произвольного полюса A_0; y_A, z_A — координаты нового полюса A; C — произвольная постоянная, зависящая от выбора начала отсчёта дуги s.

Полученные формулы (30.33) и (30.34) позволяют перейти от произвольных исходных точек — полюса и начала отсчётов — к главным секториальным точкам: центру изгиба и к главной нулевой секториальной точке. Отыскав таким образом положение главных секториальных точек для сечения тонкостенного стержня, мы сможем построить эпюру главных секториальных площадей (координат).

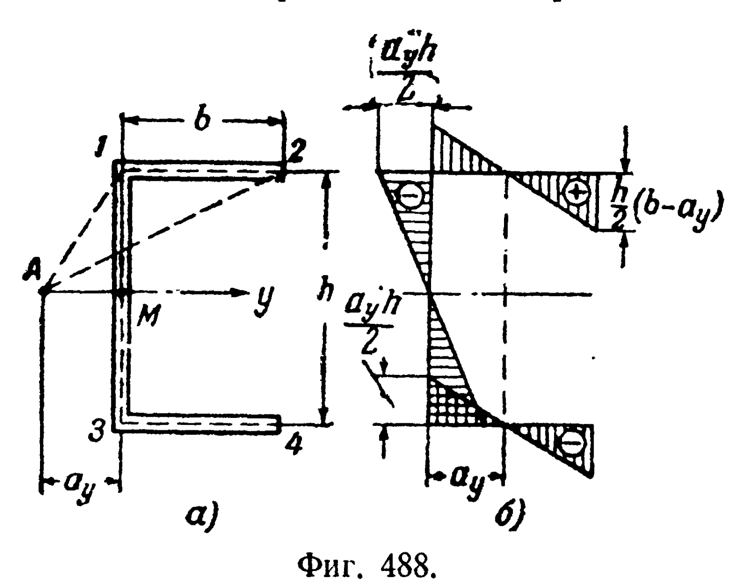
Имея в виду, что $\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{J_\omega}$ и что для данного сечения отношение $\frac{B}{J_\omega} = \text{const}$, т. е. имеет вполне определённое значение, можно

рассматривать эпюру секториальных координат как график нормальных напряжений σ_ω, изображённый в некотором масштабе.

Пример 115. Построить эпюру секториальных координат для корытного профиля, изображённого на фиг. 488.

Расстояние от средней линии контура до центра изгиба A обозначим a_y. Начало отсчётов ведём от луча AM; точка M лежит на оси симметрии Oy.

Построение эпюры секториальных площадей для рассматриваемого сечения начнём с определения секториальной координаты для точки 1 — пересечения полки со стенкой. Поворачивая радиус-вектор от положения AM до $A-1$, получим треугольник с основанием $S_1=\frac{h}{2}$ и высотой $r_1=a_y$. Значит, для рассматриваемой точки 1 секториальная координата равна:

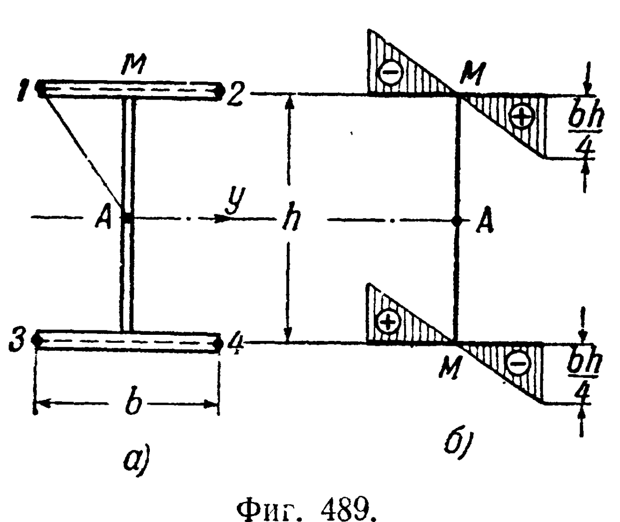


Фиг. 488.

$$\omega_1=-a_y\frac{h}{2}. \qquad (30.35)$$

Знак минус взят потому, что радиус-вектор был повёрнут против часовой стрелки от начала отсчётов. Найденную величину ω_1 откладываем в некотором масштабе в точке 1 нормально к средней линии стенки швеллера наружу (влево). Так как точка 1 принадлежит как стенке, так и полке швеллера, то такую же ординату ω_1 откладываем также наружу (вверх) нормально к средней линии стенки.

Теперь повернём радиус-вектор $A-1$ в положение $A-2$. При переходе от точки 1 к точке 2, радиус-вектор вращается по часовой стрелке. Значит, к отрицательной ординате ω_1 следует прибавить удвоенную площадь треугольника $A-1-2$ с высотой $r_2=\frac{h}{2}$ и основанием $s_2=b$



Фиг. 489.

$$\omega_2=-\omega_1+\frac{h}{2}b=-a_y\frac{h}{2}+\frac{h}{2}b=\frac{h}{2}(b-a_y). \qquad (30.36)$$

Откладываем ординату ω_2 нормально к полке вниз (в сторону, противоположную ω_1).

Аналогично определяются ординаты эпюры ω для точек 3 и 4 нижней части сечения. В пределах каждого участка профиля ω изменяется по закону прямой линии.

Пример 116. Построить эпюру секториальных координат для стержня двутаврового сечения (фиг. 489).

Вследствие симметрии сечения центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. Так как в этом случае расстояние от полюса до оси стенки профиля $r=0$, то и секториальные координаты для всех точек, принадлежащих стенке двутавра, также равны нулю.

Для полок, выбрав начало отсчётов в точке M, легко найдём значения секториальных координат. Для точки 1 удвоенная площадь треугольника $A-M-1$ с высотой $r=\frac{h}{2}$ и основанием $s=\frac{b}{2}$ будет:

$$\omega_1=-\frac{h}{2}\cdot\frac{b}{2}=-\frac{bh}{4}. \tag{30.37}$$

Знак минус взят потому, что радиус-вектор повёрнут от начала отсчёта против часовой стрелки (из положения AM в положение $A-1$). Такую же величину получат ординаты других трёх точек ω_2, ω_3 и ω_4. Знаки определяются в зависимости от направления вращения подвижного радиуса-вектора от начала отсчётов. Эпюра ω показана на фиг. 489, *б*.

Как мы видим, для профилей, имеющих ось симметрии, эпюры секториальных площадей оказываются обратно симметричными (или, иначе, косо симметричными).

§ 180. Определение секториальных геометрических характеристик сечения.

Для расчёта тонкостенных стержней помимо вычислений, связанных с определением главных центральных моментов инерции, необходимо:

а) Найти положение главного секториального полюса, т. е. центра изгиба сечения A.

б) Отыскать положение главной нулевой секториальной точки M, т. е. начало отсчёта секториальных координат.

в) Построить эпюру главных секториальных координат ω.

г) Подсчитать величины секториальных статических моментов S_ω и главного секториального момента инерции сечения J_ω.

Укажем порядок выполнения соответствующих расчётов.

А. Отыскание положения центра изгиба сечения производится на основании уравнений (30.12) и (30.13), полученных в § 175 из условия, что повороты сечений происходят вокруг центра кручения, совпадающего с центром изгиба

$$\int\limits_F \omega z\,dF=0;\quad \int\limits_F \omega y\,dF=0.$$

Здесь $\omega=\omega_A$ — секториальная координата точек сечения относительно главного секториального полюса, положение которого нам пока неизвестно, а y и z — линейные координаты тех же точек в системе главных центральных осей сечения.

Подставим значение $\omega_A=\omega$ из выражения (30.34) в уравнения (30.12) и (30.13). Тогда:

$$\int\limits_F \omega_A\cdot z\,dF=\int\limits_F \omega_0 z\,dF+z_A\int\limits_F zy\,dF-y_A\int\limits_F z^2\,dF+C\int\limits_F z\,dF=0,$$

где ω_0 — секториальная координата, отсчитанная от произвольного полюса A_0; y_A и z_A — координаты центра изгиба. Так как Oy и

Oz — главные центральные оси сечения, следует положить равными нулю центробежный момент инерции и статический момент площади сечения:

$$J_{zy} = \int_F zy\,dF = 0; \quad S_y = \int_F z\,dF = 0.$$

Заметив, что

$$\int_F z^2\,dF = J_y,$$

получим:

$$\int_F \omega_0 z\,dF - y_A J_y = 0,$$

откуда

$$y_A = \frac{\int_F \omega_0 z\,dF}{J_y}; \tag{30.38}$$

аналогично

$$z_A = -\frac{\int_F \omega_0 y\,dF}{J_z}. \tag{30.39}$$

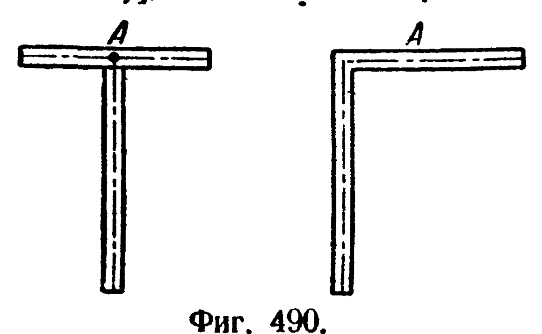
Таким образом, для определения координат центра изгиба в системе главных центральных осей сечения надо подсчитать секториально-линейные статические моменты сечения относительно произвольного полюса A и главных центральных осей инерции и поделить их на соответствующие моменты инерции, т. е.

$$y_A = \frac{S_{\omega_0 z}}{J_y}; \quad z_A = -\frac{S_{\omega_0 y}}{J_z}. \tag{30.40}$$

Конструкция этих формул ничем не отличается от аналогичных формул для определения центра тяжести сечения:

$$y_C = \frac{S_z}{F}; \quad z_C = \frac{S_y}{F}.$$

Координаты центра изгиба не зависят от величины C [в формуле (30.34)], т. е. от выбора того или иного начала отсчётов секториальных площадей. Таким образом, для отыскания величин y_A и z_A начало отсчётов может быть взято произвольно.



Фиг. 490.

Если сечение имеет оси симметрии, то отыскание центра изгиба упрощается. При наличии двух осей симметрии центр изгиба лежит в центре тяжести сечения. Если сечение имеет только одну ось симметрии, то центр изгиба лежит на ней. В случае, если сечение состоит из прямоугольников, пересекающихся в одной точке (тавр, уголок и т. п.), то центр изгиба лежит в точке их пересечения (фиг. 490).

Б. Положение главной нулевой секториальной точки определяется уравнением (30.11)

$$S_\omega = \int_F \omega\, dF = 0.$$

Здесь секториальные площади отсчитываются от полюса A, являющегося центром изгиба, с началом отсчёта от главной нулевой секториальной точки, положение которой нам пока неизвестно.

Как было показано в § 179, при перенесении начала отсчётов секториальная координата любой точки может быть определена по формуле (30.33)

$$\omega = \omega' - \omega^M,$$

где ω' — секториальная координата точек при начале отсчётов от произвольной точки M_1, а ω^M — секториальная координата искомой нулевой секториальной точки. Подставляя ω в формулу (30.11), получим:

$$\int_F \omega\, dF = \int_F \omega'\, dF - \int_F \omega^M dF = 0$$

или

$$\int_F \omega'\, dF - \omega^M \int_F F = 0,$$

откуда

$$\omega^M = \frac{\int_F \omega'\, dF}{F}. \qquad (30.41)$$

Таким образом, выбрав произвольное начало отсчётов, мы по формуле (30.41) можем определить секториальную координату нулевой точки, удовлетворяющую условию (30.11). Вообще говоря, этому условию может удовлетворить не одна, а несколько нулевых точек профиля. В таком случае, главной секториальной нулевой точкой, как уже указывалось, мы будем считать ту, которая находится в кратчайшем расстоянии от главного секториального полюса. Если сечение имеет ось симметрии, то главная нулевая секториальная точка лежит на пересечении этой оси со средней линией сечения.

Теперь, когда положение центра изгиба и начала отсчётов определено, можно построить эпюру главных секториальных координат и перейти к вычислению тех секториальных геометрических характеристик сечения из перечисленных ниже в таблице 28, какие понадобятся в дальнейших расчётах. Мы здесь ограничимся вычислением их для наиболее распространённых профилей[1]).

[1]) Общие методы вычисления секториальных характеристик см. Власов В. З. Упругие тонкостенные стержни, ГСИ, 1940.

Таблица 28. **Секториальные геометрические характеристики тонкостенных профилей.**

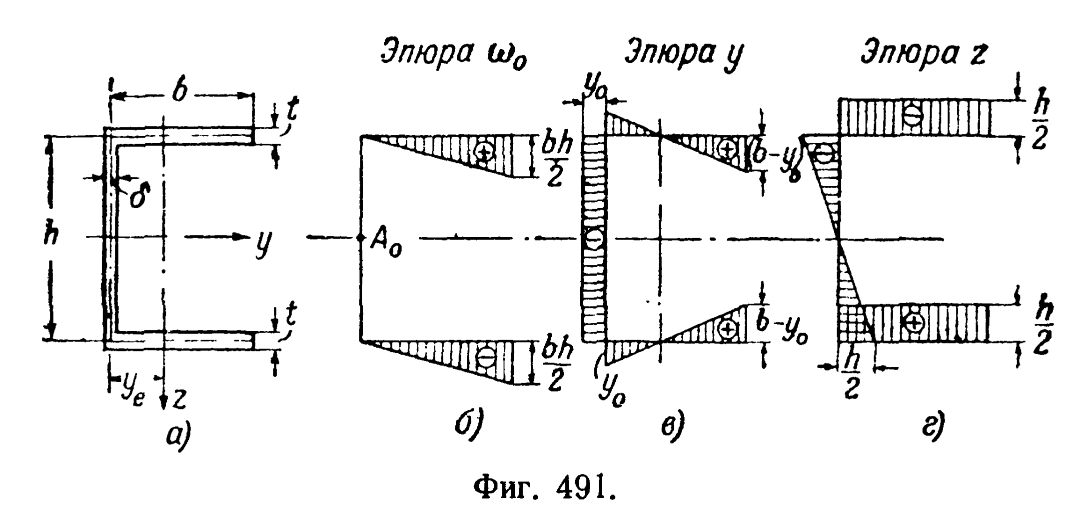
Наименование	Обозначение	Размерность
Секториальный статический момент	$S_\omega = \int_F \omega \, dF$	$см^4$
Секториально-линейный статический момент относительно полюса A и оси y	$S_{\omega, y} = \int_F \omega_A y \, dF$	$см^5$
То же — относительно оси z	$S_{\omega, z} = \int_F \omega_A z \, dF$	$см^5$
Секториальный момент инерции сечения	$J_\omega = \int_F \omega^2 \, dF$	$см^6$

Для прокатных профилей секториальные характеристики по ОСТ приведены в таблицах (см. приложение IX, табл. 5).

§ 181. Примеры вычисления секториальных геометрических характеристик сечения.

1) *Корытное сечение* (фиг. 491).

Для определения положения центра изгиба выберем вспомогательный полюс в точке A_0 на оси y, от которого построим эпюру секториальных



Фиг. 491.

координат ω_0. Эта точка принята за начало отсчётов для построения вспомогательной эпюры секториальных площадей (фиг. 491, *б*).

Чтобы воспользоваться формулами (30.40), остаётся вычислить секториально-линейные статические моменты $S_{\omega_0 y}$ и $S_{\omega_0 z}$:

$$S_{\omega_0 y}=\int\limits_F \omega_0 y\,dF \quad \text{и} \quad S_{\omega_0 z}=\int\limits_F \omega_0 z\,dF.$$

Эти интегралы могут быть вычислены по способу Верещагина (см. § 131) путём умножения площади эпюры ω_0 на ординаты эпюр y или z, лежащие под центром тяжести площади ω_0. Построение эпюр y и z не требует пояснений: откладываются расстояния точек средней линии контура сечения от осей Oz (эпюра y) и Oy (эпюра z). Соответствующая эпюра расстояний z приведена на фиг. 491, *г*. Построение эпюры y выполнено на фиг. 491, *в*.

Таким образом, интеграл $S_{\omega_0 z}=\int\limits_F \omega_0 z\,dF=\int\limits_F \omega_0 z\delta\cdot ds$ может быть заменён произведением:

$$S_{\omega_0 z}=\sum \omega_0 z\cdot\delta=-2\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{bh}{2}\cdot t\cdot\frac{h}{2}=\frac{b^2h^2t}{4}.$$

Поделив $S_{\omega_0 z}$ на момент инерции сечения относительно оси y, найдём

$$a_y=-\frac{b^2h^2t}{4J_y}.$$

Имея в виду, что $J_y=\frac{\delta_1 h^3}{12}+2\cdot bt\frac{h^2}{4}$ [1], получим окончательно:

$$a_y=-\frac{3b^2t}{6bt+h\delta_1}; \tag{30.42}$$

$$a_z=0, \text{ так как } S_{\omega_0 y}=\int\limits_F \omega_0 y\,dF=0$$

(в силу того, что эпюра ω_0 обратно симметрична, а эпюра y — симметрична). Знак минус у a_y показывает, что полученную величину a_y следует отложить от точки A_0 влево.

Теперь, используя формулу (30.41), перейдём к отысканию главной нулевой секториальной точки на контуре сечения. Как уже указывалось, для сечения, имеющего ось симметрии, нулевая точка лежит на пересечении этой оси со средней линией сечения, т. е. в данном случае на середине высоты стенки. В целях ознакомления с методикой отыскания главной нулевой секториальной точки, будем считать положение её неизвестным и воспользуемся для её нахождения общим решением по формуле (30.41).

Для этого из главного полюса A (положение которого уже найдено) построим эпюру секториальных координат ω', взяв за начало отсчётов произвольную точку *1*. Секториальные координаты будут (фиг. 492, *а*):

для точки *2* $\omega'_2=\frac{h}{2}\cdot b$;

» » *3* $\omega'_3=a_y h$;

» » *4* $\omega'_4=a_y h-\frac{bh}{2}=-\frac{h}{2}(b-2a_y)$.

---

[1]) Собственными моментами инерции полок, за малостью, пренебрегаем.

Соответствующая эпюра секториальных координат построена на фиг. 492, *б*.

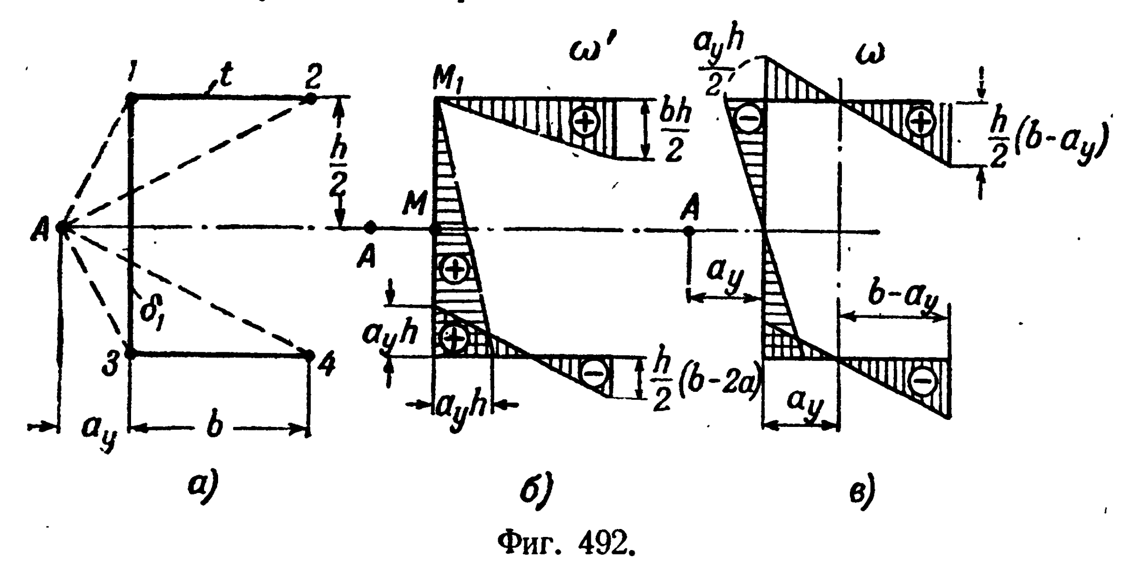
Секториальный статический момент $S_\omega = \int\limits_S \omega'\delta\, ds$ может быть подсчитан теперь как сумма произведений площадей эпюры ω' на соответствующие толщины полок (t) и стенки (δ_1):

$$S_\omega = \frac{b}{2}\cdot\frac{h}{2}\,bt + \frac{h}{2}\,a_y h\delta_1 + \frac{b}{2}\left(2ha_y - \frac{bh}{2}\right)t = \frac{ha_y}{2}(2bt + h\delta_1) = \frac{ha_y}{2}\cdot F.$$

Теперь, пользуясь формулой (30.41), определяем секториальную координату нулевой точки от выбранного начала отсчётов:

$$\omega'M = \frac{S_\omega}{F} = \frac{1}{2}\,ha_y.$$

Как видно из построенной эпюры ω', найденная координата соответствует трём точкам: одной, лежащей посредине высоты стенки (средняя линия треугольника), и двум другим, лежащим на полках на расстоянии a_y от стенки. Так как первая точка (M) является ближайшей к центру изгиба, то она является главной нулевой секториальной точкой сечения.



Фиг. 492.

Теперь строим эпюру главных секториальных координат, руководствуясь указаниями § 179. Эпюра ω построена на фиг. 492, *в*.

Остаётся вычислить секториальный момент инерции сечения:

$$J_\omega = \int\limits_F \omega^2\, dF = \int\limits_S \omega^2\, ds\cdot\delta = \int\limits_S \omega\cdot\omega\delta ds.$$

Выполняя интегрирование по способу Верещагина, получаем:

$$J_\omega = 2\cdot\frac{h}{2}a_y\cdot\frac{h}{2}\frac{\delta_1}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{h}{2}a_y + \frac{2ha_y}{2}\cdot\frac{a_y}{2}\cdot t\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{h}{2}a_y +$$
$$+ 2(b-a_y)\frac{h}{2}(b-a_y)\frac{t}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{h}{2}(b-a_y) =$$
$$= \frac{h^3\delta_1 a_y^2}{12} + \frac{h^2 t a_y^3}{6} + \frac{(b-a_y)^3 h^2 t}{6};$$

подставляя вместо a_y найденное выше его значение (30.42), получим:

$$J_\omega = \frac{b^3h^2t}{12}\cdot\frac{2h\delta_1 + 3bt}{6bt + h\delta_1}. \qquad (30.43)$$

Наконец, пользуясь эпюрой главных секториальных координат, легко подсчитать и величину секториального статического момента отсечённой части сечения

$$S_\omega = \int\limits_{F_{\text{отс}}} \omega \, dF = \int\limits_{F_{\text{отс}}} \omega\delta \cdot ds;$$

этот интеграл равен площади отсечённой части эпюры ω, умноженной на соответствующие толщины стенок профиля. Закон изменения секториального статического момента (эпюра S_ω), а следовательно, и секториальных касательных напряжений, изображён на фиг. 493.

Наибольшая ордината эпюры S_ω равна площади треугольника, лежащего правее нулевой точки эпюры ω (фиг. 492, *в*):

$$\max S_\omega = \frac{(b - a_y)^2 \, ht}{4}. \qquad (30.43')$$

На фиг. 493 стрелками показано направление касательных напряжений, приводящихся к изгибно-крутящему моменту M_ω.

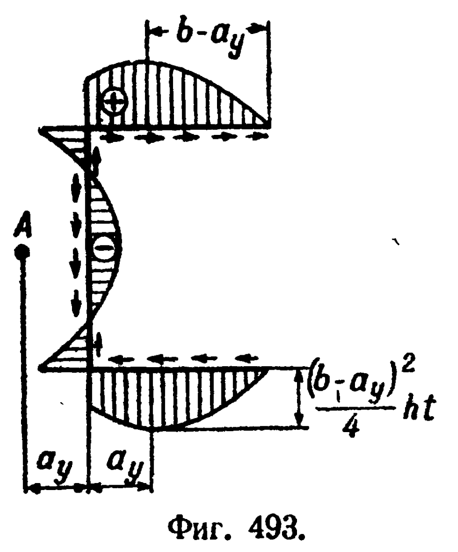
2) *Двутавровое сечение* (фиг. 494). Вследствие симметрии центр изгиба сечения находится в центре тяжести. Нулевые точки, по той же причине, лежат посредине полок.

Эпюра главных секториальных координат была построена ранее (§ 179) и приводится здесь (фиг. 494) для вычисления главного секториального момента инерции сечения

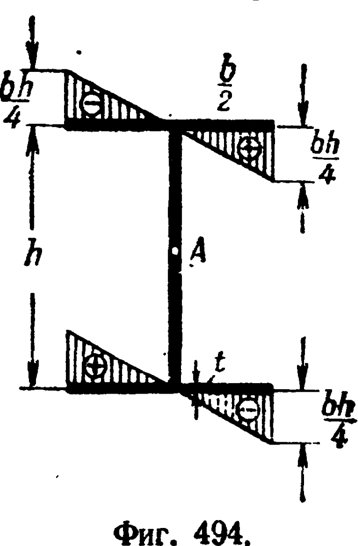
$$J_\omega = \int\limits_F \omega^2 \, dF = \int\limits_S \omega^2\delta \, ds.$$

Считая толщину полок постоянной $\delta = t$, имеем:

$$J_\omega = t \int\limits_S \omega \cdot \omega \, ds.$$



Фиг. 493.



Фиг. 494.

Используя графо-аналитический способ интегрирования по Верещагину, получим, учетверяя результат подсчёта в пределах одного из треугольников:

$$J_\omega = \left(4 \cdot \frac{b^2 h}{16} \cdot \frac{bh}{6}\right) t = \frac{b^3 h^2 t}{24}, \qquad (30.44)$$

где последний множитель в скобках — ордината, а предпоследний — площадь треугольника.

Подсчитаем также наибольший секториальный статический момент площади сечения, равный:

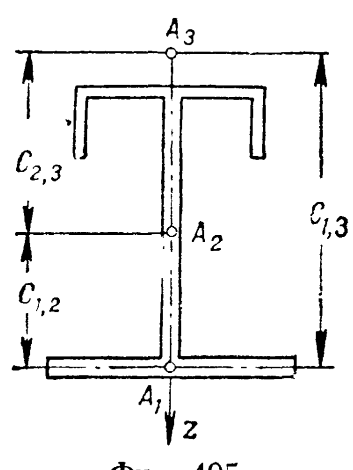
$$S_\omega = \int\limits_F \omega \, dF = \int\limits_S \omega\delta \, ds.$$

Наибольшее значение секториальный статический момент получит для середины полки и может быть подсчитан путём умножения площади треугольника эпюры $\bar{\omega}$ на толщину полки t:

$$\max S_\omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{bh}{4} \cdot \frac{b}{2} \cdot t = \frac{b^2 ht}{16}. \qquad (30.45)$$

Для стенки S_ω равно нулю, так как эпюра ω обратно симметрична и сумма $\int\limits_F \omega\,dF = 0$. Значит, в стенке отсутствуют секториальные касательные напряжения τ_ω.

3) *Тавровое сечение.* Так как главный секториальный полюс лежит в точке пересечения полки со стенкой, то секториальная координата любой точки обращается в нуль ($\omega = 0$), а следовательно, и $J_\omega = 0$. Изгибно-крутильная жёсткость профиля равна нулю, вследствие чего при скручивании подобного профиля бимомент, а равно и секториальные нормальные и касательные напряжения не возникают. Сечение работает на чистое кручение.



Фиг. 495.

4) *Уголковый профиль* также не обладает изгибно-крутильной жёсткостью, так как эпюра $\omega = 0$.

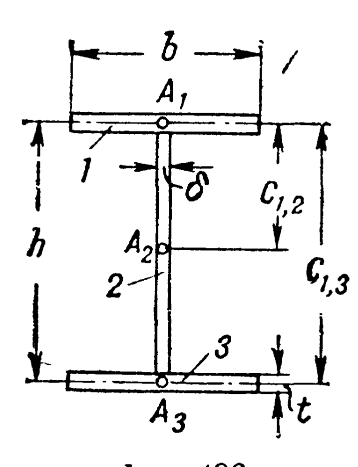
5) Для *составных сечений*, состоящих из элементов, имеющих общую ось симметрии (фиг. 495), координата центра изгиба, лежащего на оси симметрии, отсчитанная от центра изгиба A_1 какого-либо из элементов (I), равна [1]):

$$a_z = \frac{J_{2,z}\,c_{2,1} + J_{3,z}\,c_{3,1}}{J_z}, \qquad (30.46)$$

где $J_{2,z}$ и $J_{3,z}$ — осевые моменты инерции каждого из остальных элементов относительно оси симметрии z; J_z — общий момент инерции всего сечения относительно той же оси, а величины $c_{2,1}$ и $c_{3,1}$ — расстояния от центров изгиба отдельных элементов до центра изгиба элемента (I). Секториальный момент инерции такого составного сечения равен:

$$J_\omega = J_{1,\omega} + J_{2,\omega} + J_{3,\omega} + \frac{J_{1,z}J_{2,z}c_{1,2}^2 + J_{1,z}J_{3,z}c_{1,3}^2 + J_{2,z}J_{3,z}c_{2,3}^2}{J_z}, \qquad (30.47)$$

где $J_{1,\omega}$, $J_{2,\omega}$, $J_{3,\omega}$ — секториальные моменты инерции отдельных элементов сечения относительно собственных центров изгиба; $J_{1,z}$, $J_{2,z}$, $J_{3,z}$ — осевые моменты инерции отдельных элементов сечения относительно оси симметрии z; $c_{1,2}$, $c_{1,3}$, $c_{2,3}$ — расстояния между центрами изгиба соответствующих элементов 1 и 2, 2 и 3 и т. д.



Фиг. 496.

Применим эти формулы для определения центра изгиба и секториального момента инерции двутавра, рассмотренного выше. Пронумеруем полки и стенку, как показано на фиг. 496. За начало отсчёта примем центр изгиба верхней полки (I). Пренебрегая собственным моментом инерции стенки относительно оси z, получим:

$$a_z = \frac{J_{2,z}c_{2,1} + J_{3,z}c_{3,1}}{J_z} = \frac{J_{3,z}c_{3,1}}{J_z},$$

так как $J_z = 2J_{3,z}$, а расстояние $c_{3,1} = h$, то $a_z = \frac{h}{2}$.

Секториальный момент инерции сечения по формуле (30.47) будет (поскольку $J_{2,z} = 0$ и $J_{1,\omega} = J_{2,\omega} = J_{3,\omega} = 0$):

$$J_\omega = \frac{J_{1,z}J_{3,z}c_{1,3}^2}{J_z} = \frac{J_{3,z}^2 h^2}{2J_{3,z}} = \frac{J_{3,z}h^2}{2};$$

[1]) См. Бычков Д. В. и Мрощинский А. К., Кручение металлических балок, § 24.

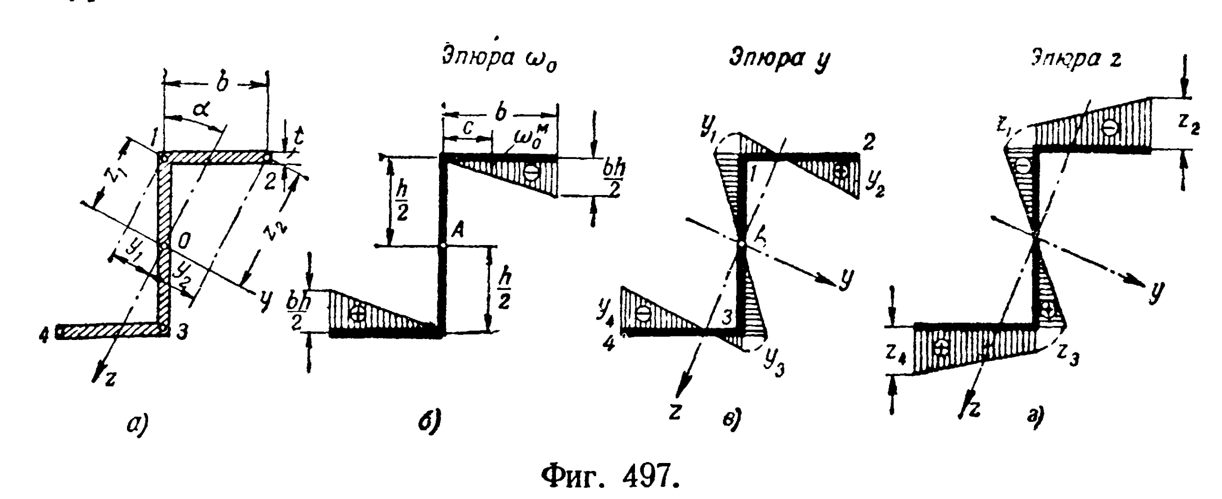
так как

$$J_{3,z}=\frac{tb^3}{12}, \text{ то } J_\omega=\frac{b^3h^2t}{24},$$

что было получено ранее другим путём (формула (30.44)).

Формулами (30.46) и (30.47) особенно удобно пользоваться при расчёте составных профилей, состоящих из элементов, секториальные характеристики которых даны в таблицах ОСТ (клёпаная и сварная балка, прокатные профили, усиленные листами, и т. п.).

6) Рассмотрим ещё случай антисимметричного *зетового сечения* (фиг. 497). Центр тяжести сечения O лежит посредине высоты стенки. Главные центральные оси инерции y и z наклонены на угол α к соответствующим линиям контура сечения.



Фиг. 497.

Для определения положения центра изгиба и главной нулевой секториальной точки, построим вспомогательную эпюру секториальных площадей ω_0, приняв за полюс и начало отсчётов точку A. Эта эпюра показана на фиг. 497, *б*.

Для определения координат центра изгиба графо-аналитическим методом Верещагина построим эпюры расстояний точек контура сечения до главных осей y и z.

Для точек *1* и *3* профиля значения координат y_1; z_1 и y_3; z_3 соответственно будут:

$$y_1=y_3=\pm\frac{h}{2}\sin\alpha; \qquad z_1=z_3=\mp\frac{h}{2}\cos\alpha;$$

аналогично, для точек *2* и *4*, имеем:

$$y_2=y_4=\pm\left(b\cos\alpha-\frac{h}{2}\sin\alpha\right); \quad z_2=z_4=\mp\left(\frac{h}{2}\cos\alpha+b\sin\alpha\right).$$

Соответствующие эпюры y и z приведены на фиг. 497, *в* и *г*.

Обе эпюры оказались обратно симметричными. Поэтому сумма произведений ω_0 на $y\,dF$ и на $z\,dF$ обратится в нуль, т. е. в нуль обращаются секториально-линейные статические моменты $S_{\omega y}$ и $S_{\omega z}$. Следовательно, $a_y=0$ и $a_z=0$ и центр изгиба сечения совпадает с центром его тяжести.

Для определения положения главной нулевой секториальной точки воспользуемся формулой (30.41):

$$\omega_0^M=\frac{S_\omega}{F}, \quad \text{где} \quad S_\omega=\int_F \omega_0\,dF=\int_F \omega_0\delta\,ds.$$

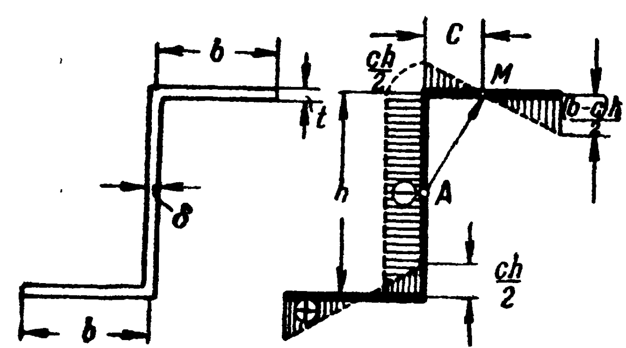
При постоянной толщине полок $\delta = t$ интеграл может быть заменён произведением из площади эпюры ω_0 на толщину t, т. е.

$$S_\omega = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{bh}{2} \cdot b \cdot t = \frac{b^2ht}{2}.$$

Поделив S_ω на площадь $F = 2bt + h\delta_1$, найдём

$$\omega_0^M = \frac{b^2ht}{2(2bt + h\delta_1)}.$$

Зная ω_0^M из подобия треугольников, находим расстояние c до неё от оси стенки (фиг. 497, *б*):



Фиг. 498.

$$\frac{c}{b} = \frac{\omega_0^M}{\frac{bh}{2}},$$

откуда

$$c = \frac{2\omega_0^M}{h} = \frac{b^2t}{2bt + h\delta_1}. \tag{30.48}$$

Теперь мы, имея в виду, что $\sum\omega = 0$, можем построить эпюру главных секториальных координат от начального радиуса AM, показанную на фиг. 498. Имея эпюру главных секториальных площадей, легко подсчитать величину секториального момента инерции

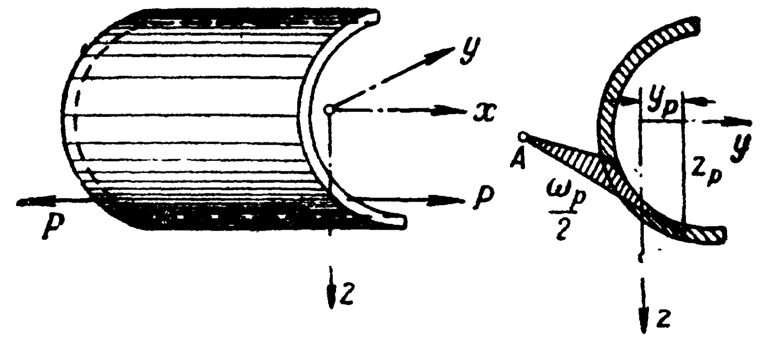
$$J_\omega = \int\limits_F \omega^2 dF = \int\limits_F \omega\omega\delta\, ds.$$

Применяя метод Верещагина, получим:

$$J_\omega = \frac{h^2bt}{6}(b^2 - 3bc + 3c^2) + \frac{h^3c^2\delta}{4}. \tag{30.49}$$

§ 182. Вычисление напряжений в общем случае сложного сопротивления тонкостенного стержня.

А. Выше, в §§ 172—178 был рассмотрен случай стеснённого (или изгибного) кручения тонкостенного стержня и получены формулы для вычисления секториальных нормальных и касательных напряжений.



Фиг. 499.

Секториальные напряжения могут возникнуть в сечениях тонкостенного стержня и в других случаях действия сил. Рассмотрим, например, работу такого стержня при внецентренном приложении сил (фиг. 499).

Условия равновесия, выраженные формулами (30.1), (30.2), (30.3) и (30.17), для этого случая примут вид (сравнить с фиг. 469):

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_F \sigma\, dF = P; \\ &\int\limits_F \sigma\, dFy = Py_P; \\ &\int\limits_F \sigma\, dFz = Pz_P; \\ &\int\limits_F \sigma\, dF\omega = B. \end{aligned}\right\} \qquad (30.50)$$

Здесь y, z и ω — линейные и секториальная координаты любой точки сечения, а y_P, z_P и ω_P — линейные и секториальная координаты точки приложения силы P. Интегралы левой части уравнений (30.50) представляют собой нормальную силу, моменты относительно осей z и y и изгибно-крутящий бимомент.

Каждый из этих силовых факторов вызывает нормальные напряжения. Поэтому формула для нормальных напряжений при принятом для общего случая действия сил (глава XXIX) правиле знаков примет вид:

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z} + \frac{B\omega}{J_\omega}. \qquad (30.51)$$

Последний член формулы (30.51) представляет собой нормальные напряжения σ_ω, возникающие вследствие закручивания стержня. Изгибно-крутящий бимомент B в произвольном сечении по длине стержня выражается формулой:

$$B = B_0 \frac{\operatorname{sh} \alpha x + \operatorname{sh} \alpha (l - x)}{\operatorname{sh} \alpha l}, \qquad (30.52)$$

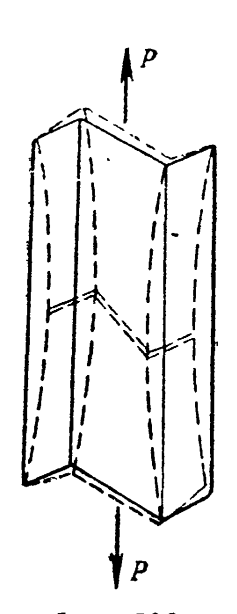
где B_0 — бимомент для сечения в месте приложения силы, равный:

$$B_0 = P\omega_P.$$

Следовательно, если продольная сила будет приложена в такой точке поперечного сечения, для которой секториальная координата ω равна нулю, то и изгибно-крутящий бимомент B также обратится в нуль. Только в этом частном случае внецентренного приложения растягивающей силы P (при $\omega_P = 0$), гипотеза плоских сечений будет справедливой: сила вызовет лишь растяжение и чистый косой изгиб стержня, не сопровождающийся его закручиванием. В прочих случаях (при $\omega_P \neq 0$) внецентренное растяжение тонкостенного стержня открытого профиля будет сопровождаться его закручиванием.

В некоторых случаях закручивание стержня может произойти не только при внецентренном приложении продольной силы, но и при осевом её действии. Так, например, для зетового профиля,

рассмотренного выше (§ 180), эпюра секториальных площадей имеет вид, показанный на фиг. 498. Секториальная координата точки O, лежащей в центре тяжести сечения, отлична от нуля. Поэтому если приложить в центре тяжести сечения зет сосредоточенную силу или равномерно распределённую по длине стенки нагрузку с равнодействующей P, проходящей через центр тяжести сечения, то $B = P\omega_P \neq 0$, и стержень будет закручиваться, как это показано на фиг. 500 пунктиром.



Фиг. 500.

Нормальные напряжения в точках сечения стержня зетового профиля при центральном приложении продольной силы должны определяться по формуле:

$$|\sigma| = \frac{P}{F} + \frac{B\omega}{J_\omega};$$

Сечения такого стержня после деформации не остаются плоскими, даже если закрепление его концов не препятствует свободной депланации концевых сечений.

Б. Изгибное кручение имеет место также и при поперечном изгибе стержня силами, лежащими в главных плоскостях инерции, не проходящих через центр изгиба сечения.

При плоском поперечном изгибе нормальные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma = -\frac{M_y z}{J_y} + \frac{B\omega}{J_\omega}, \tag{30.53}$$

в более общем случае изгиба (косой изгиб, или изгиб в двух главных направлениях):

$$\sigma = -\frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z} + \frac{B\omega}{J_\omega}. \tag{30.54}$$

Величины изгибно-крутящих бимоментов в этих случаях зависят от эксцентриситета внешних сил относительно линии центров изгиба и определяются путём интегрирования дифференциальных уравнений (30.27) и (30.29) или по данным таблицы 27 (§ 177).

Наконец, для случая совместного действия продольных и поперечных сил, сопровождающегося изгибным кручением, формула для нормальных напряжений примет вид:

$$\sigma = -\frac{N}{F} - \frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z} + \frac{B\omega}{J_\omega}. \tag{30.55}$$

Здесь изгибно-крутящий бимомент B является функцией как поперечных, так и продольных сил.

В. Касательные напряжения в этих случаях возникают как под действием поперечных сил, так и вследствие закручивания стержня.

Величина касательных напряжений от сил Q и от M_ω может быть определена по формуле:

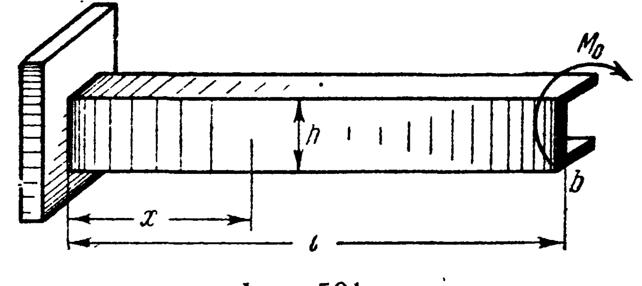
$$\tau = \frac{Q_y S_z^0}{J_z \delta} + \frac{Q_z S_y^0}{J_y \delta} + \frac{M_\omega S_\omega^0}{J_\omega \delta}. \qquad (30.56)$$

Первыми двумя членами формулы определяются касательные напряжения от составляющих поперечной силы Q, а третьим — секториальные касательные напряжения от действия изгибно-крутящего момента. Надо иметь в виду, что и те и другие касательные напряжения действуют вдоль контура сечения. Величина δ во всех членах формулы — толщина стенки, измеряющаяся нормально к контуру; S_y^0 и S_z^0 — статические моменты отсечённой части сечения относительно главных осей инерции; J_y и J_z — моменты инерции всего сечения относительно тех же осей; S_ω^0 — секториальный статический момент той же части сечения; J_ω — главный секториальный момент инерции сечения.

Кроме того, к касательным напряжениям, вычисляемым по формуле (30.56), добавляются ещё касательные напряжения от чистого кручения, достигающие наибольших значений посредине краёв стенок и вычисляемые по формуле (11.37) [см. §§ 67, 173 и 176].

§ 183. Примеры вычисления напряжений в тонкостенных стержнях.

Пример 117. Тонкостенный стержень корытного профиля, защемлённый одним концом в стену[1]), скручивается моментом $M_0 = 6$ *кгм*. Найти величину касательных и нормальных напряжений в опасном сечении стержня, размеры которого показаны на фиг. 501: $l = 1$ *м*; $h = 200$ *мм*; $b = 100$ *мм*; $\delta = 1$ *мм*.



Фиг. 501.

Для решения задачи необходимо прежде всего найти значения геометрических характеристик сечения. Площадь сечения

$$F = (2b + h)\,\delta = 4 \text{ см}^2.$$

Расстояние центра тяжести сечения от оси вертикальной стенки:

$$y_c = \frac{2b\delta \dfrac{b}{2}}{F} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 0{,}1 \cdot 5}{4} = 2{,}5 \text{ см}.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$J_y = \frac{bh^3}{12} + 2b\delta \frac{h^2}{4} = \frac{0{,}1 \cdot 20^3}{12} + \frac{10 \cdot 0{,}1 \cdot 20^2}{2} = 266{,}7 \text{ см}^4,$$

$$J_z = 2\left[\frac{\delta b^3}{12} + b\delta\left(\frac{b}{2} - y_c\right)^2\right] + h\delta y_c^2 = 41{,}7 \text{ см}^4.$$

---

[1]) В защемлении предположено отсутствие депланации.

Пользуясь формулой (30.42), найдём координату центра изгиба:

$$a_y = \frac{3b^2t}{6bt + h\delta} = \frac{3 \cdot 10^2 \cdot 0{,}1}{(6 \cdot 10 + 20) \cdot 0{,}1} = 3{,}75 \text{ см.}$$

Строим эпюру секториальных координат (фиг. 502), значения которых будут:

$$\text{для точки } 1 \ \omega_1 = -\omega_3 = -\frac{a_y h}{2} = -\frac{3{,}75 \cdot 20}{2} = -37{,}5 \text{ см}^2,$$

$$\text{для точки } 2 \ \omega_2 = -\omega_4 = \frac{h}{2}(b - a_y) = \frac{20}{2}(10 - 3{,}75) = 62{,}5 \text{ см}^2.$$

Секториальный момент инерции сечения (по формуле 30.43):

$$J_\omega = \frac{b^3h^2t}{12} \cdot \frac{2h\delta + 3bt}{6bt + h\delta} = \frac{10^3 \cdot 20^2 \cdot 0{,}1\,(2 \cdot 20 + 3 \cdot 10)}{12\,(6 \cdot 10 + 20) \cdot 0{,}1} = 2920 \text{ см}^6.$$

Момент инерции сечения при кручении

$$J_к = \frac{1{,}12}{3} \sum S\delta^3 = \frac{1{,}12}{3}(2 \cdot 10 + 20) \cdot 0{,}1^3 \approx 0{,}0133 \text{ см}^4.$$

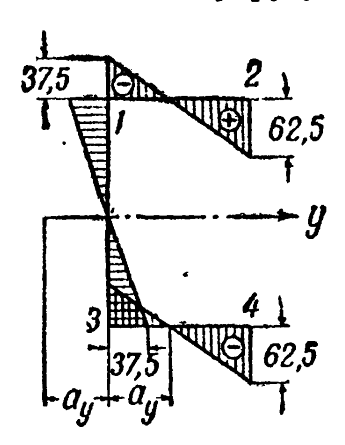
Наибольший секториальный статический момент отсечённой части (см. формулу 30.43'):

$$\max S_\omega = \frac{(b - a_y)^2\, h\delta}{4} = \frac{(10 - 3{,}75)^2 \cdot 20 \cdot 0{,}1}{4} \approx 19{,}6 \text{ см}^4.$$

Подсчитаем упругую изгибно-крутильную характеристику стержня:

$$\alpha = \sqrt{\frac{GJ_к}{EJ_\omega}} = \sqrt{\frac{0{,}0133}{2{,}6 \cdot 2920}} = 0{,}00132 \ \frac{1}{см}.$$

$\alpha l = 0{,}00132 \cdot 100 = 0{,}132 < 0{,}5$ (см. § 177).



Фиг. 502.

Вследствие весьма малой жёсткости при чистом кручении ($GJ_к$) можно принять, что внешняя нагрузка целиком воспринимается стержнем лишь за счёт изгиба полок и стенки. В таком случае изгибно-крутящий бимомент в защемлении может быть определён на основании аналогии, о которой сказано в конце § 177:

$$\max B \approx M_0 l = 600 \cdot 100 = 60\,000 \text{ кгсм}^2.$$

В целях ознакомления с методикой точного решения дифференциального уравнения (30.29) выполним его.

Имея в виду, что внешний момент $M_0 = \text{const}$ и значит $m = \frac{dM_0}{dx} = 0$, общий интеграл уравнения (30.29) имеет вид:

$$B = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x. \qquad (30.57)$$

Произвольные постоянные интегрирования определяются из условий закрепления концов стержня.

В защемлении при $x = 0$ $\theta' = 0$. Следовательно, нулю равен момент чистого кручения $M_к$, так как $\theta' = \frac{M_к}{GJ_к} = 0$. Имея в виду, что $M_0 = M_к + M_\omega$ можем это условие записать иначе, а именно:

1) при $x = 0$ $\frac{dB}{dx} = M_\omega = M_0$;

2) при $x=l$ $B=0$ (это вытекает из условия беспрепятственной депланации свободного конца стержня).

Подставив эти условия в уравнение (30.57), получим:

$$\text{при } x=0 \quad B'=C_1\alpha\,\text{ch}\,0+C_2\alpha\,\text{sh}\,0=M_0,$$

откуда

$$C_1=\frac{M_0}{\alpha}; \quad \text{при } x=l \quad B=C_1\,\text{sh}\,\alpha l+C_2\,\text{ch}\,\alpha l=0,$$

откуда

$$C_2=-C_1\,\text{th}\,\alpha l=-\frac{M_0}{\alpha}\,\text{th}\,\alpha l.$$

Подставив найденные значения произвольных постоянных в (30.57), получим:

$$B=\frac{M_0}{\alpha}(\text{sh}\,\alpha x-\text{th}\,\alpha l\,\text{ch}\,\alpha x). \qquad \text{При } x=0 \ \max B=-\frac{M_0}{\alpha}\,\text{th}\,\alpha l.$$

Так как $\alpha=0{,}00132$, $\text{th}\,\alpha l=\text{th}\,0{,}132=0{,}131$, то

$$\max B=-\frac{M_0\cdot 0{,}131}{0{,}00132}\approx -M_0\cdot 100=60\,000 \ \textit{кгсм}^2.$$

Изгибно-крутящий момент в том же сечении, как было показано, равен:

$$\max M_\omega=M_0=-600 \ \textit{кгсм}.$$

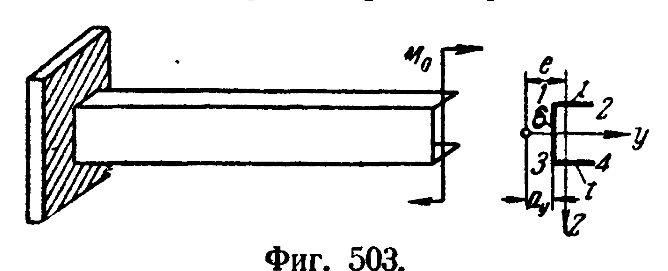
Переходим теперь к определению напряжений. Наибольшие секториальные нормальные напряжения в опасном сечении возникнут в крайних точках полок (т. т. 2 и 4, фиг. 502):

$$\frac{\max}{\min}\sigma_\omega=\frac{B\omega}{J_\omega}=\frac{60\,000\,(\pm 62{,}5)}{2920}=\pm 1280 \ \textit{кг/см}^2.$$

Секториальные касательные напряжения:

$$\max\tau_\omega=-\frac{M_\omega S_\omega}{J_\omega\delta}=-\frac{600\cdot 19{,}6}{2920\cdot 0{,}1}\approx -40 \ \textit{кг/см}^2.$$

Пример 118. Определить величину нормальных и касательных напряжений в опасном сечении стержня, рассмотренного в примере 117, при



Фиг. 503.

загружении его парой сил, лежащей в главной плоскости Oz и равной $M_0=100$ *кгм* (чистый изгиб, фиг. 503). Считать, что момент M_0 образован парой поперечных сил.

Выпишем значения геометрических и упругих характеристик: $y_c=2{,}5$ *см*; $a_y=3{,}75$ *см*; $J_y=266{,}7$ *см*^{4}; $J_z=41{,}7$ *см*^{4}; $J_\omega=2920$ *см*^{6}; $J_к=0{,}0133$ *см*^{4}; $\max S_\omega=19{,}6$ *см*^{4}; $l=100$ *см*; $\alpha=\sqrt{\frac{GJ_к}{EJ_\omega}}=0{,}00132\,\frac{1}{см}$; $\alpha l=0{,}132$.

Эксцентриситет (плечо) приложенной пары относительно центра изгиба сечения (фиг. 503)

$$e=y_c+a_y=2{,}5+3{,}75=6{,}25 \ \textit{см}.$$

Выражения для силовых факторов B, M_ω и $M_к$ возьмём по данным таблицы 27 (§ 177). Изгибно-крутящий бимомент

$$B = \frac{B_0}{\operatorname{ch} \alpha l} \operatorname{ch} \alpha x; \quad \max B = B_0 \text{ (при } x = l).$$

Принятый в таблице знак минус изменён на плюс, так как эксцентриситет e отложен в другую сторону (см. таблицу 27, схема 3).

Изгибно-крутящий момент

$$M_\omega = \frac{M_0 e}{\operatorname{ch} \alpha l} \alpha \cdot \operatorname{sh} \alpha x; \quad \max M_\omega = \alpha M_0 e \cdot \operatorname{th} \alpha l \text{ (при } x = l).$$

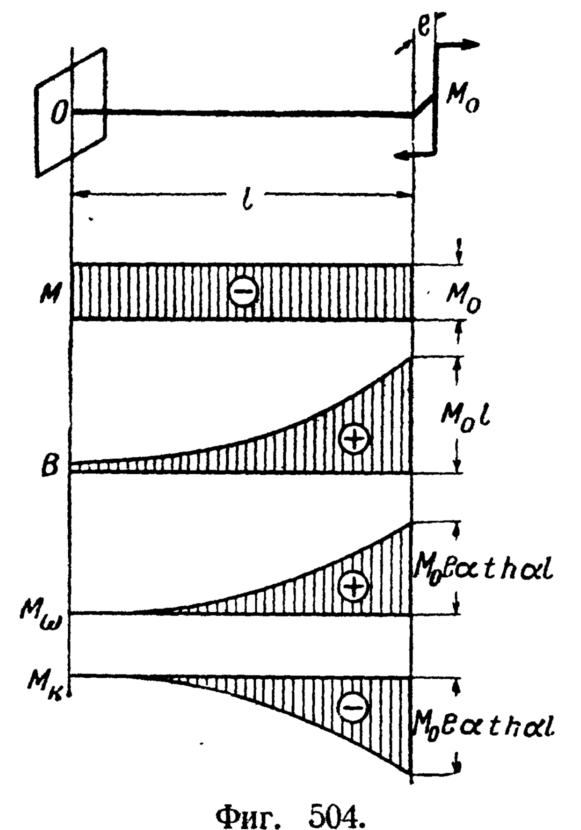
Крутящий момент $M_к = -M_\omega' = -\dfrac{\alpha M_0 e \operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha l}$.

По этим данным на фиг. 504 построены эпюры B, M_ω и $M_к$; подсчитаем наибольшие числовые значения:

$$\max B = 10\,000 \cdot 6{,}25 = 62\,500 \text{ кгсм}^2;$$
$$\max M_\omega = 1000 \cdot 6{,}25 \cdot 0{,}00132 \cdot 0{,}131 = 10{,}8 \text{ кгсм};$$
$$\max M_к = -\max M_\omega = -10{,}8 \text{ кгсм}.$$

Нормальные напряжения в опасном сечении (свободный конец стержня) получат наибольшее значение в точке 2 (фиг. 502):

$$\max \sigma = -\frac{M_y z_{max}}{J_y} + \frac{B \cdot \omega}{J_\omega} = \frac{(-10\,000)(-10)}{266{,}7} + \frac{62\,500 \cdot 62{,}5}{2920} = 1715 \text{ кг/см}^2.$$



Фиг. 504.

Касательные напряжения:

а) От изгибно-крутящего момента M_ω

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega}{J_\omega \cdot \delta} = \frac{10{,}8 \cdot 19{,}6}{2920 \cdot 0{,}1} = 0{,}7 \text{ кг/см}^2.$$

б) От крутящего момента

$$\tau_к = \frac{M_к \delta}{J_к} = \frac{10{,}8 \cdot 0{,}1}{0{,}0133} = 81 \text{ кг/см}^2.$$

Как и в предыдущем примере, решающее значение имеют секториальные нормальные напряжения ($\sigma_\omega = 1340$ *кг/см*²). Секториальные касательные напряжения всегда малы и ими можно пренебречь. Касательные же напряжения от чистого кручения в данном случае тоже малы. Однако они могут достичь и весьма существенных значений, как это показано ниже.

Пример 119. Балка двутаврового профиля № 20б (ОСТ 10016—39) пролётом $l = 4$ *м* несёт нагрузку $P = 3$ *т*, приложенную посредине пролёта с эксцентриситетом $e = 2$ *см* (фиг. 505).

Найти величину наибольших нормальных и касательных напряжений в опасном сечении балки, считая, что на концах балки невозможны повороты сечений относительно нейтральной оси, но возможна депланация.

Геометрические характеристики сечения для двутавра № 20б взяты из таблицы 5 (приложение IX):

$$J_y = 2500\ см^4; \qquad \frac{J_y}{S_{max}} = 16{,}9\ см; \qquad J_\omega = 13\,857\ см^6;$$

$$\delta = 0{,}9\ см; \qquad t = 1{,}14\ см; \qquad \omega_{max} = 47{,}05\ см^2;$$

$$J_к = 17{,}85\ см^4; \quad \max S_\omega = \frac{\omega b t}{4} = 67\ см^4.$$

Изгибно-крутильная характеристика стержня (при отношении $\frac{E}{G} = 2{,}6$)

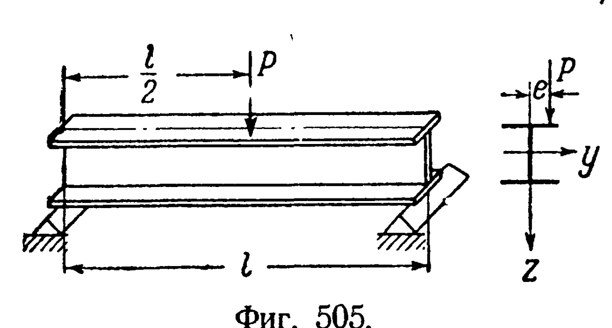
$$\alpha = \sqrt{\frac{GJ_к}{EJ_\omega}} = \sqrt{\frac{17{,}85}{2{,}6 \cdot 13857}} = 0{,}022\ см^{-1}.$$

Наибольшие изгибающий момент и поперечная сила:

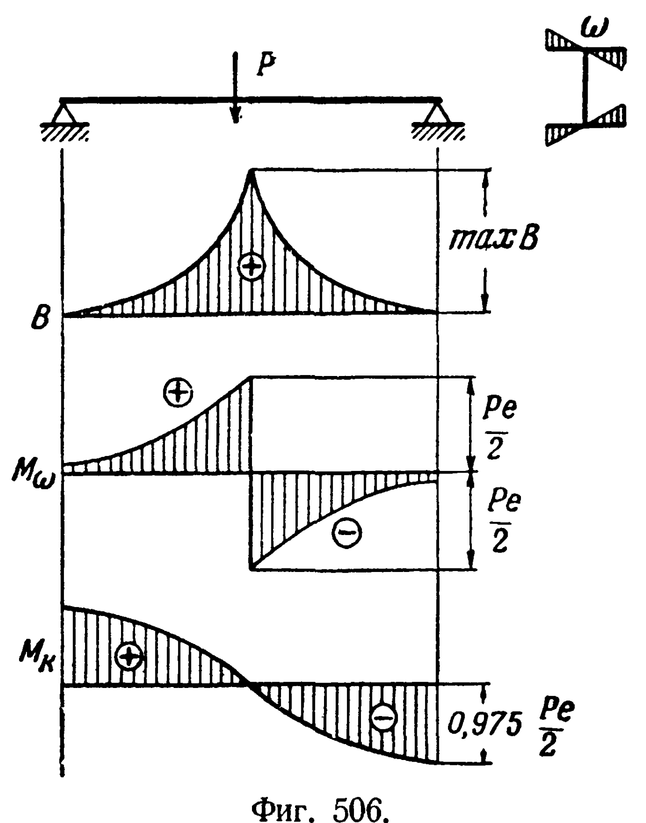
$$\max \frac{Pl}{4} = \frac{3000 \cdot 400}{4} = 3 \cdot 10^5\ кгсм;$$

$$\max Q = \frac{P}{2} = \frac{3000}{2} = 1500\ кг.$$

Вследствие эксцентриситета силы, помимо изгиба в главной плоскости,



Фиг. 505.



Фиг. 506.

балка работает на изгибное кручение под действием момента $M_0 = Pe$, приложенного посредине пролёта. По данным таблицы 27 (случай 4) имеем:

изгибно-крутящий бимомент

$$B(x) = \frac{Pe \cdot \operatorname{sh} \alpha x}{2\alpha \cdot \operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2}}; \quad \max B = \frac{Pe}{2\alpha} \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2};$$

изгибно-крутящий момент

$$M_\omega = \frac{Pe}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2}}; \quad \max M_\omega = \frac{Pe}{2};$$

крутящий момент

$$M_к = \frac{Pe}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2}}\right); \quad \max M_к = \frac{Pe}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2}}\right).$$

Соответствующие эпюры B, M_ω и $M_к$ построены на фиг. 506. Произведя вычисления, получим:

$$\alpha l = 0{,}022 \cdot 400 = 8{,}8; \quad \frac{\alpha l}{2} = \frac{8{,}8}{2} = 4{,}4;$$

$$\operatorname{sh} 4{,}4 = 40{,}72; \quad \operatorname{ch} 4{,}4 = 40{,}73; \quad \operatorname{th} 4{,}4 \approx 1{,}0.$$

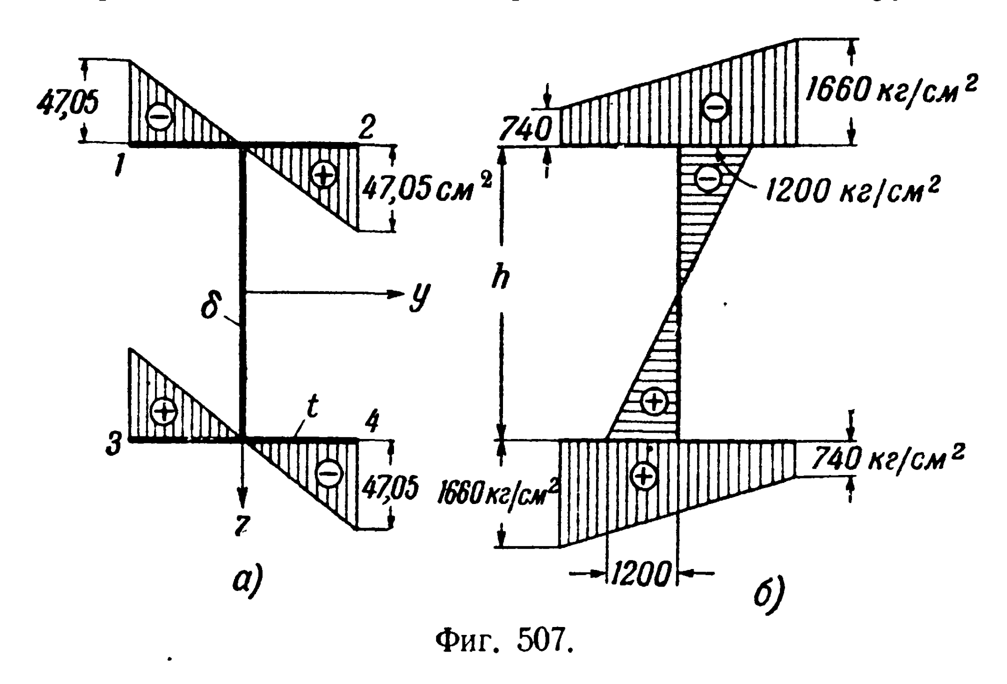
Подставляя $\text{ch}\,\frac{\alpha l}{2}$ и $\text{th}\,\frac{\alpha l}{2}$ в выражения для B, M_ω и $M_к$, получим:

$\max B \approx 136\,000$ *кгсм²*; $\max M_\omega = 3000$ *кгсм*; $\max M_к \approx 2920$ *кгсм*.

Теперь подсчитаем величины напряжений.

а) Нормальные напряжения возникают от действия изгибающего момента M и изгибно-крутящего бимомента B, причём $M > 0$ и $B > 0$.

Напряжения от изгибающего момента в верхней полке сжимающие, в нижней — растягивающие. Знак напряжений от изгибно-крутящего бимо-



Фиг. 507.

мента определяется знаком секториальной координаты (фиг. 507, *а*). Поэтому наибольшие растягивающие напряжения будут в точке 3 опасного сечения

$$\max \sigma = \frac{\max M \cdot z_{\max}}{J_y} + \frac{\max B \cdot \omega_{\max}}{J_\omega} = 1200 + 460 = 1660 \text{ кг/см}^2.$$

Соответствующая эпюра распределения нормальных напряжений по сечению показана на фиг. 507, *б*.

б) Касательные напряжения от действия M_ω, $M_к$ и Q соответственно равны:

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega}{J_\omega t} = 12{,}7 \text{ кг/см}^2; \quad \tau_к = \frac{M_к \delta}{J_к} = 150 \text{ кг/см}^2; \quad \tau = \frac{QS_y}{J_y \delta} = 99 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшие касательные напряжения от изгиба и чистого кручения в сечении над опорой

$$\max \tau = 150 + 99 = 249 \text{ кг/см}^2.$$

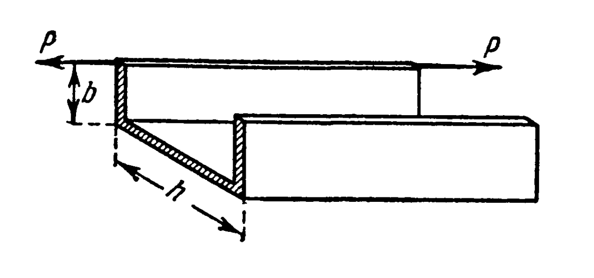
Из рассмотренного примера видно, что и в не очень тонкостенных стержнях открытого профиля (прокатные профили) дополнительные (секториальные) нормальные напряжения от изгибного кручения могут иметь существенное значение. В нашем примере они составляют:

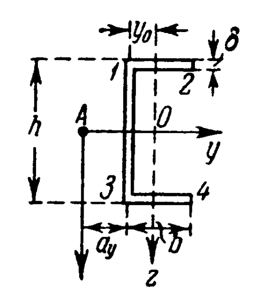
$$\frac{460}{1200} \cdot 100 = 38\% \text{ от основных напряжений изгиба и}$$

$$\frac{460}{1660} \cdot 100 = 23\% \text{ от суммарного значения напряжения.}$$

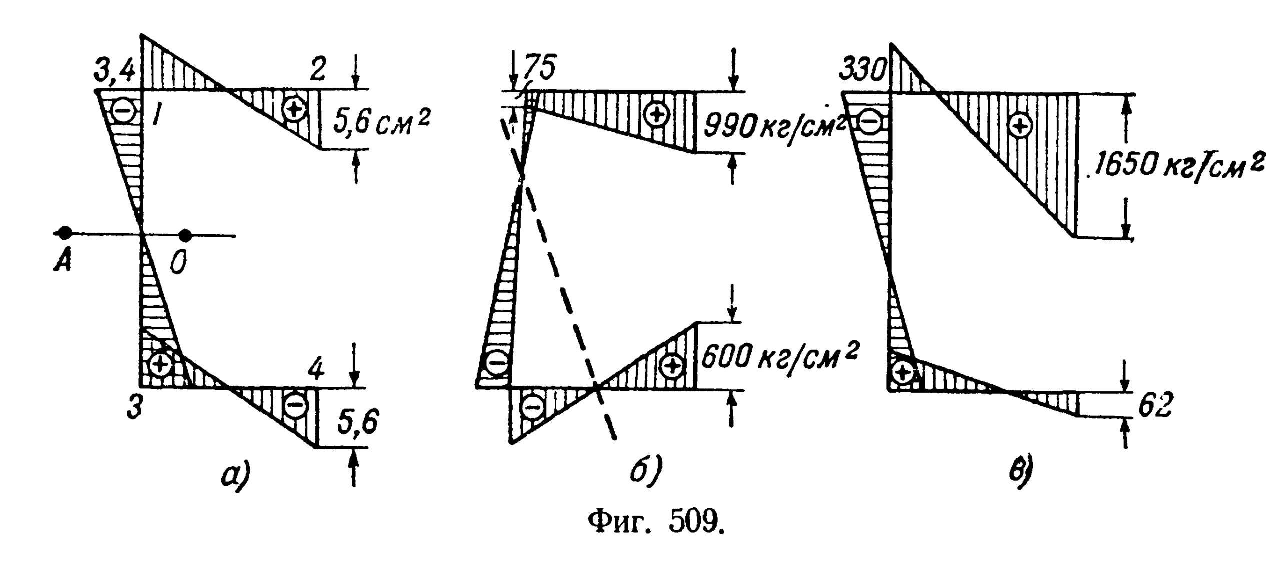
Касательные напряжения от крутящего момента почти вдвое больше таких же напряжений от действия поперечной силы. Секториальными касательными напряжениями (как и в предыдущих примерах) можно пренебречь.

Пример 120. Рассмотрим ещё случай внецентренного растяжения тонкостенного стержня корытного профиля, изображённого на фиг. 508. Размеры сечения (по средним линиям контура): $b = 30$ *мм*; $h = 60$ *мм*; $\delta = 1$ *мм*. Растягивающая сила приложена по краю полки и равна $P = 150$ *кг*.





Фиг. 508.



Фиг. 509.

Площадь сечения $F = (2b + h)\delta = (2 \cdot 3 + 6) \cdot 0{,}1 = 1{,}2$ *см²*. Расстояние от средней линии стенки до центра тяжести сечения:

$$y_c = \frac{S}{F} = \frac{2b\delta \frac{b}{2}}{F} = \frac{3^2 \cdot 0{,}1}{1{,}2} = 0{,}75 \text{ см}.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$J_y = \frac{\delta h^3}{12} + \frac{2b\delta h^2}{4} = 7{,}2 \text{ см}^4; \quad J_z = 2\left[\frac{\delta b^3}{12} + b\delta (b - y_c)^2\right] + \delta h y_c^2 = 1{,}125 \text{ см}^4.$$

Расстояние от оси стенки до центра изгиба (30.42):

$$a_y = \frac{3b^2}{6b + h} = \frac{3 \cdot 3^2}{6 \cdot 3 + 6} = 1{,}125 \text{ см}.$$

Главный секториальный момент инерции сечения (30·43):

$$J_\omega = \frac{b^3 h^2 \delta}{12} \cdot \frac{2h + 3b}{6b + h} = \frac{3^3 \cdot 6^2 \cdot 0{,}1\,(2 \cdot 6 + 3 \cdot 3)}{12\,(6 \cdot 3 + 6)} = 7{,}1 \text{ см}^6.$$

Эпюра секториальных площадей приведена на фиг. 509, *а*. Ординаты эпюры ω соответственно равны:

$$\omega_1 = -\frac{a_y h}{2} = -\frac{1{,}125 \cdot 6}{2} \approx -3{,}4 \text{ см}^2; \quad \omega_2 = \frac{h}{2}(b - a_y) = \frac{6}{2}(3 - 1{,}125) \approx 5{,}6 \text{ см}^2.$$

Наибольшие нормальные напряжения возникают у кромки растянутой полки и равны:

$$|\sigma_{max}| = \frac{P}{F} + \frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z} + \frac{B_\omega}{J_\omega},$$

где

$$M_y = P \cdot \frac{h}{2} = \frac{150 \cdot 6}{2} = 450 \text{ кгсм};$$

$$M_z = P(b - y_c) = 150\,(3 - 0{,}75) = 338 \text{ кгсм};$$

$$B = P\omega_p = 150 \cdot 5{,}6 = 840 \text{ кгсм}^2.$$

Подставляя координаты точки *2* сечения $z_2 = \frac{h}{2}$ и $y_2 = b - y_c$, получим:

$$\sigma_{max} = \frac{150}{1{,}2} + \frac{450 \cdot 3}{7{,}2} + \frac{338 \cdot 2{,}25}{1{,}125} + \frac{840 \cdot 5{,}6}{7{,}1} =$$
$$= 125 + 188 + 677 + 660 = 1650 \text{ кг/см}^2.$$

Заметим, что дополнительные секториальные напряжения составляют от основных $\frac{660}{990} \cdot 100 = 67\%$, а от полных: $\frac{660}{1650} \cdot 100 = 40\%$.

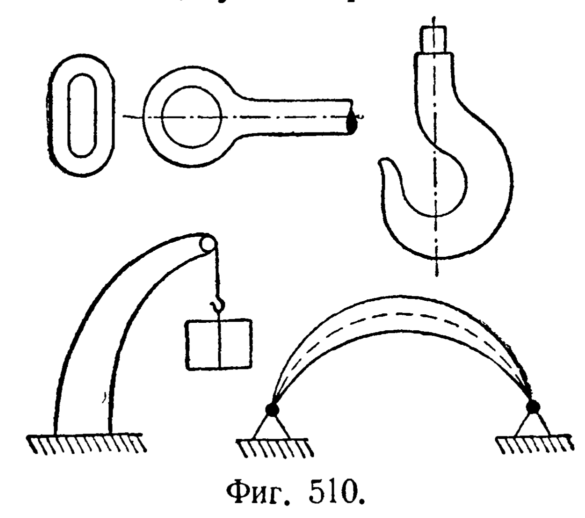
Для сопоставления на фиг. 509, *б* и *в* построены эпюры распределения нормальных напряжений: слева — по обычной формуле внецентренного растяжения (27.4), справа — с учётом изгибно-крутящего бимомента.

ГЛАВА XXXI.

КРИВЫЕ СТЕРЖНИ.

§ 184. Общие понятия.

Кроме стержней с прямой осью в конструкциях часто встречаются элементы, у которых ось, т. е. линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений, является кривой. К ним относятся звенья цепей, проушины, крюки, арки, своды, станины подъёмных кранов и т. п. (фиг. 510). Кроме того, на практике строго прямых стержней не встречается; все стержни, рассчитываемые нами как прямые, имеют в той или иной степени небольшую кривизну. Поэтому изучение влияния кривизны оси стержня на распределение напряжений позволит нам, с одной стороны, проверять прочность явно кривых стержней, а с другой — оценить влияние небольших отступлений от прямолинейной формы на прочность прямых стержней.



Фиг. 510.

При проверке прочности подобных стержней введём следующие ограничения:

а) *сечения стержня имеют ось симметрии;*

б) *ось стержня представляет собой плоскую кривую, лежащую в плоскости симметрии;*

в) *внешние силы лежат в той же плоскости.*

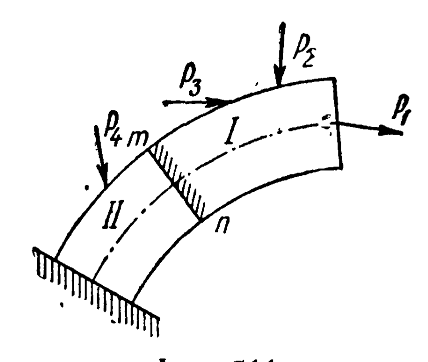
Тогда, вследствие симметрии, и деформация оси стержня будет происходить в той же плоскости; ось стержня останется *плоской кривой*, лежащей в плоскости внешних сил; мы будем иметь случай, аналогичный плоскому изгибу балки.

Принимая при расчёте указанные выше ограничения, мы охватываем почти все встречающиеся на практике случаи работы кривых стержней. Нашей задачей будет отыскание наибольших напряжений, проверка прочности и вычисление деформаций кривых стержней.

Решение этой задачи мы проведём совершенно аналогично тому, как мы поступили в подобном случае для прямой балки.

§ 185. Вычисление изгибающих моментов, нормальных и поперечных сил.

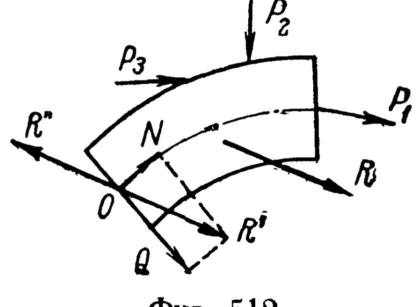
Представим себе кривой стержень (фиг. 511), нагружённый внешними силами P_1, P_2, P_3, P_4 и т. д., расположенными, как указано в § 184, в плоскости симметрии поперечных сечений. В той же плоскости будут лежать и опорные реакции стержня.



Фиг. 511.

Для выяснения напряжений по сечениям, перпендикулярным к оси стержня, проведём одно из таких сечений mn, делящее стержень на две части I и II. Отбросим одну из них, например II, и рассмотрим равновесие оставленной. На неё будут действовать внешние силы P_1, P_2, P_3, а по сечению mn будут передаваться напряжения σ и τ.

Систему внешних сил, приложенных к оставленной части, можно заменить в общем случае одной силой, в частном — парой сил. Рассмотрим общий случай (фиг. 512). Заменим силы P_1, P_2, P_3 их равнодействующей R; затем приложим в центре тяжести O сечения mn две противоположные силы R' и R'', равные R. Силы R и R'' образуют пару с моментом M; силу же R' разложим на нормальную к сечению N, и лежащую в плоскости сечения Q. Таким образом, система внешних сил P_1, P_2, P_3, действующая на оставленную часть стержня, заменена статически эквивалентной системой из пары сил M (изгибающего момента), нормальной силы N и поперечной силы Q.



Фиг. 512.

Эти три величины *совместно* заменяют действие внешних сил, приложенных к оставленной части стержня. В частном случае, когда эти внешние силы приводятся к паре, силы N и Q обращаются в нуль.

Величины сил M, N и Q определяются из условия статической эквивалентности этой системы сил P_1, P_2, P_3; моменты относительно любой точки и проекции на любую ось обеих систем сил равны между собой.

Составляя суммы моментов сил обеих систем относительно центра тяжести проведённого сечения, получаем, что изгибающий момент M равен сумме моментов всех сил, приложенных к оставленной части стержня:

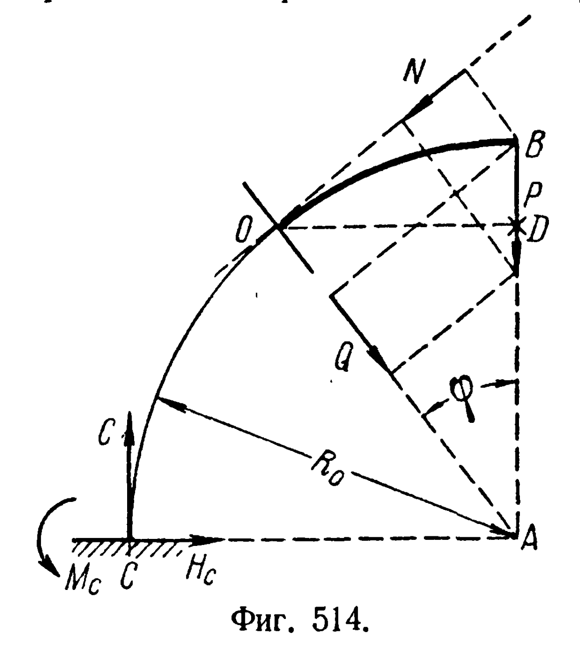
$$M = \sum m(P_1,\ P_2,\ P_3)_0. \qquad (31.1)$$

Проектируя силы обеих систем на направления N и Q, получаем, что нормальная и поперечная силы равны суммам проекций всех сил, приложенных к оставленной части стержня, соответственно на направление нормали к сечению и на плоскость самого сечения:

$$N = \sum\nolimits_{\text{пр}} (P_1,\ P_2,\ P_3)_N, \qquad (31.2)$$

$$Q = \sum\nolimits_{\text{пр}} (P_1,\ P_2,\ P_3)_Q. \qquad (31.3)$$

Изгибающий момент будем считать *положительным*, если он *увеличивает* кривизну *оси* стержня. Нормальную силу будем считать *положительной*, если она будет стремиться *оторвать* оставленную часть стержня от отброшенной. Поперечную силу считаем положительной, когда она получается из положительного направления



Фиг. 513. Фиг. 514.

нормальной силы поворотом по часовой стрелке на 90° (фиг. 513).

Так же, как и для балки, при вычислении величин M, N и Q можно рассматривать как левую, так и правую части стержня, разделённые проведённым сечением; выбор той или другой части определяется условием наибольшей простоты вычислений.

Приведённые выше правила знаков для изгибающего момента, нормальной и поперечной сил не зависят от того, правую или левую часть стержня мы оставляем для их вычисления.

Рассмотрим пример вычисления M, N и Q. Возьмём стержень, представляющий собой четверть окружности радиуса R_0, зещемлён-

ный одним концом и нагружённый на другом силой P (фиг. 514); проведём какое-нибудь сечение с центром тяжести O. Положение сечения определим углом φ, составленным им с вертикалью. Для вычисления M, N и Q рассмотрим правую часть стержня. Этим мы избавляемся от вычисления реакций в сечении C.

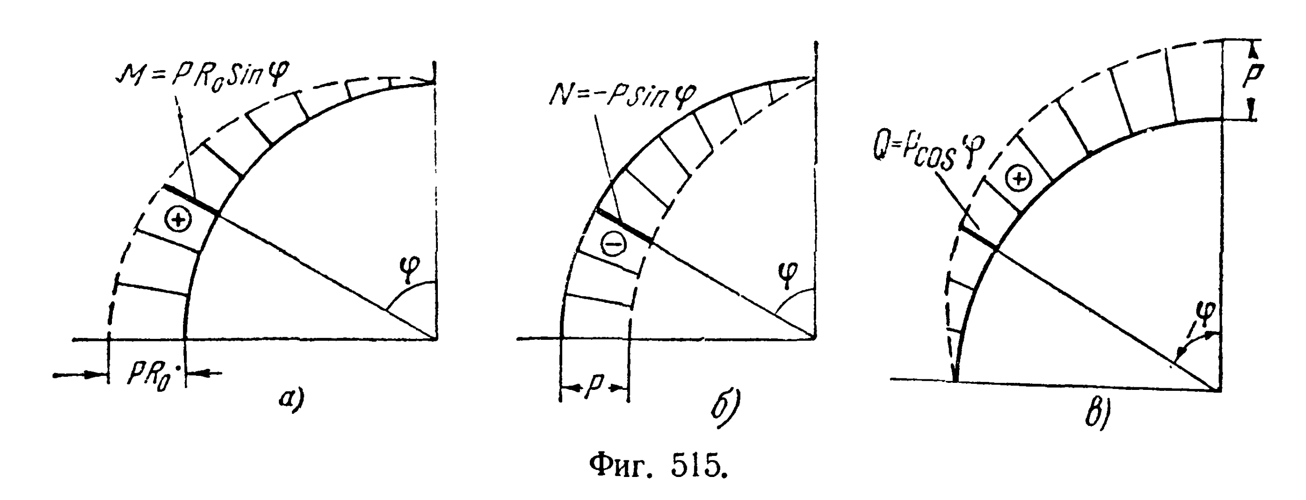
Изгибающий момент будет равен моменту силы P относительно точки O:

$$M = + P \cdot \overline{OD} = + PR_0 \sin \varphi.$$

Проектируя силу P на нормаль к сечению и на само сечение, получаем:

$$N = - P \sin \varphi; \quad Q = + P \cos \varphi.$$

Таким образом, наибольший изгибающий момент и нормальная сила будут при $\varphi = 90°$, т. е. в опорном сечении.



Фиг. 515.

На фиг. 515 показаны эпюры M, N и Q. За нулевую линию принята ось стержня. Ординаты отложены по радиусам кривизны стержня.

§ 186. Вычисление напряжений от сил Q и N.

Напряжения σ и τ по проведённому нами сечению mn уравновешивают систему внешних сил (P_1, P_2, P_3), приложенных к оставленной части, или, что всё равно, систему сил M, N и Q (фиг. 511 и 512).

Сила Q, лежащая в плоскости сечения, может быть уравновешена лишь касательными напряжениями τ, сумма которых должна быть равна и противоположна силе Q. Нормальная сила N и изгибающий момент M, приложенные к оставленной части, могут быть уравновешены лишь нормальными напряжениями.

Условия равновесия оставленной части позволяют найти лишь суммарные внутренние усилия, передающиеся от отброшенной части на оставленную; само же *распределение* напряжений по сечению

таким путём получено быть не может, — мы имеем дело со статически неопределимой задачей, для решения которой необходимо рассмотрение деформаций стержня.

Однако в отношении напряжений, вызванных силами Q и N, искомый результат можно получить проще. Теоретические исследования показывают, что распределение касательных напряжений в кривых стержнях близко к тому, что мы имеем для прямых. Поэтому обычно и для кривых стержней пользуются формулами, выведенными для прямых балок:

$$\tau = \frac{QS(z)}{Jb}. \tag{15.3}$$

Это не точно; применяя те же методы, что и при вычислении касательных напряжений в балках, можно вывести и для кривых стержней более точные формулы для вычисления τ. Однако практически вполне допустимо пользование формулой (15.3).

Фиг. 516.

Условие прочности по отношению к касательным напряжениям в таком случае для кривых стержней имеет вид (15.7):

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}S_{max}}{Jb} \leqslant |\tau|.$$

Определим теперь напряжения, вызываемые нормальной силой N. Рассматривая элемент кривого стержня длиной ds под действием усилий N (фиг. 516), видим, что эти силы, приложенные в центрах тяжести поперечных сечений, соответствуют простому осевому растяжению или сжатию выделенного элемента. Поэтому и соответствующие напряжения будут нормальными к сечению и равномерно распределёнными по его площади F:

$$\sigma = \frac{N}{F}.$$

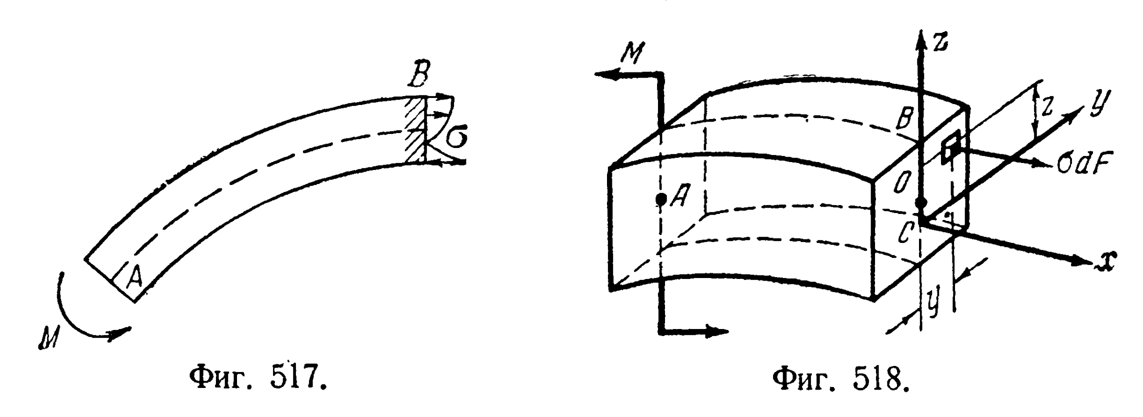
Знак напряжений определится знаком силы N.

§ 187. Вычисление напряжений от изгибающего момента.

Изгибающий момент M может быть уравновешен, как и в прямой балке, только нормальными напряжениями, приводящимися к паре, расположенной в плоскости действия внешних сил, по направлению обратной, а по величине равной моменту M. Задача нахождения закона распределения напряжений по сечению и формул для их вычислений является статически неопределимой и требует, как это было и при изучении изгиба прямой балки, помимо составления и решения уравнений статики, рассмотрения соответствующих деформаций и составления дополнительных уравнений. При определении напряжений от сил Q и N мы обошлись без подобных вычислений,

так как воспользовались уже готовыми решениями; для нормальных же напряжений, уравновешивающих изгибающий момент M, мы проделаем весь ход вычислений, который в своё время был изложен при определении нормальных напряжений в прямых балках (§ 78).

Рассмотрим условия равновесия оставленной части стержня AB (фиг. 517) под действием изгибающего момента M и системы напряжений σ, передающихся через проведённое сечение. Изобразим (фиг. 518) оставленную часть с действующими на неё силами. Положение нейтрального слоя по высоте сечения нам заранее неизвестно и подлежит определению; будем в общем случае считать, что он не проходит через центры тяжести сечений. Начало координат покажем в точке C, расположенной на нейтральной оси y и вне центра тяжести сечения O, причём расстояние OC оставим пока неизвестным. Ось z является осью симметрии; ось x направлена перпендикулярно к плоскости сечения. В плоскости симметрии xCz расположен изгибающий момент M; по каждой площадке dF с координатами y и z действует сила $\sigma\,dF$. Для системы сил M и $\sigma\,dF$, под действием которых оставленная часть сохраняет равновесие, можно написать шесть уравнений равновесия.



Фиг. 517. Фиг. 518.

На ось x внешние силы дают проекцию, равную нулю; сумма же проекций сил $\sigma\,dF$ выразится интегралом, охватывающим всю площадь поперечного сечения:

$$\sum X = 0; \quad \int_F \sigma\,dF = 0. \tag{31.4}$$

Уравнения проекций всех сил на оси y и z:

$$\sum Y = 0 \quad \text{и} \quad \sum Z = 0$$

обращаются в тождества, так как напряжения σ перпендикулярны к осям y и z. Обращается в тождество и уравнение моментов относительно оси x

$$\sum M_x = 0,$$

так как не дают момента ни силы $\sigma\,dF$, параллельные оси x, ни пара M, лежащая в плоскости xCz.

По этой же причине момент пары M относительно оси z тоже равен нулю; что же касается сил σdF, то их момент относительно этой оси равен интегралу $\int\limits_F \sigma\, dFy$.

Пятое уравнение равновесия, следовательно, будет

$$\sum M_z = 0; \quad \int\limits_F \sigma\, dFy = 0, \qquad (31.5)$$

но этот интеграл равен нулю вследствие симметрии сечения относительно оси z.

Остаётся приравнять нулю сумму моментов всех сил относительно оси y. Это уравнение запишется так:

$$\sum M_y = 0; \quad M - \int\limits_F \sigma\, dFz = 0. \qquad (31.6)$$

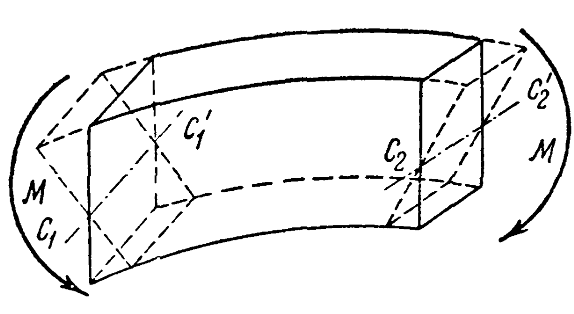
Итак, условия статики требуют рассмотрения двух уравнений:

$$\int\limits_F \sigma dF = 0, \qquad (31.4)$$

$$M - \int\limits_F \sigma\, dFz = 0. \qquad (31.6)$$

Закон изменения нормальных напряжений по высоте сечения остался пока неизвестным. Поэтому переходим к рассмотрению деформаций.

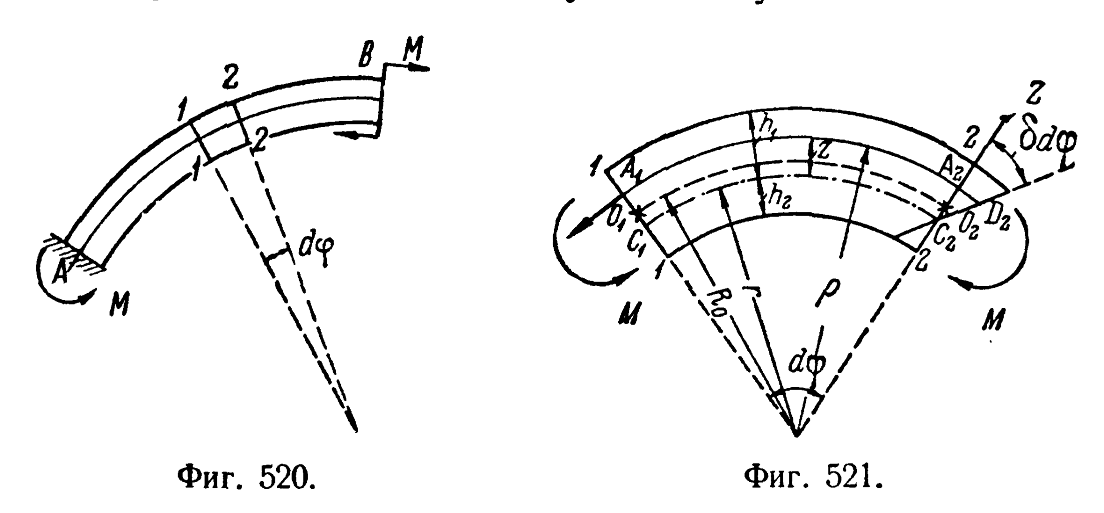
Как и для случая изгиба прямого стержня, будем пользоваться гипотезой плоских сечений, подтверждаемой опытами и для кривых стержней. Будем предполагать, что при действии изгибающего момента сечения, перпендикулярные к оси, остаются *плоскими* и лишь поворачиваются одно относительно другого (фиг. 519). Так как при сделанных выше предположениях (§ 184) ось бруса остаётся при деформации в той же плоскости, в которой она лежала до деформации, то эти повороты будут происходить вокруг *нейтральных* осей C_1C_1' и C_2C_2', перпендикулярных к плоскости внешних сил, заключающей в себе и ось стержня. Тогда удлинения и укорочения, а стало быть и напряжения для волокон, отстоящих на одно и то же расстояние от нейтральной оси, будут по ширине сечения одинаковыми. Установим зависимость между углом относительного поворота двух смежных сечений и деформациями волокон. Выделим из кривого



Фиг. 519.

стержня, подвергающегося действию только изгибающих моментов (фиг. 520), элемент, ограниченный двумя очень близкими сечениями, составляющими угол $d\varphi$. Этот элемент изображён на фиг. 521. O_1—O_2 — ось стержня; C_1—C_2 — нейтральный слой.

Нормальные напряжения, действующие по проведённым сечениям, образуют пары; под их действием угол между смежными сечениями



Фиг. 520. Фиг. 521.

1—1 и 2—2 изменится на величину $\delta\, d\varphi$ вследствие относительного поворота этих сечений вокруг нейтральных осей C_1 и C_2.

Найдём нормальные напряжения σ, действующие по сечениям в точках A_1 и A_2 на расстоянии z от нейтральных осей. Положительное направление оси z выберем в сторону наружных волокон. Волокно A_1A_2 получит удлинение A_2D_2; соответствующее напряжение σ будет равно

$$\sigma = \varepsilon E,$$

где ε — относительное удлинение волокна A_1A_2. Оно равно отношению абсолютного удлинения A_2D_2 к первоначальной длине волокна A_1A_2:

$$\varepsilon = \frac{A_2D_2}{A_1A_2};$$

называя буквой ρ радиус кривизны волокна A_1A_2, имеем:

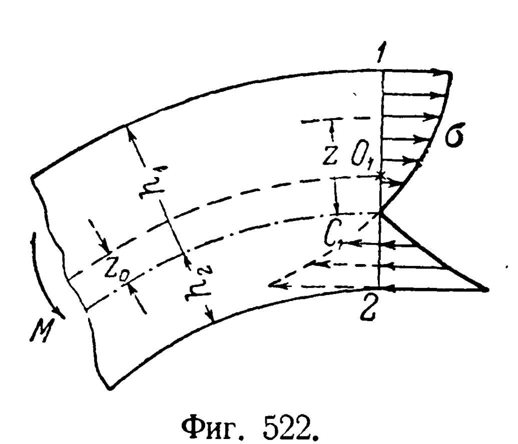
$$A_2D_2 = z\delta\, d\varphi;\quad A_1A_2 = \rho\, d\varphi;$$

$$\varepsilon = \frac{z}{\rho}\frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi};\quad \sigma = \frac{z}{\rho}\frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi}E. \qquad (31.7)$$

Формула (31.7) даёт закон распределения по высоте сечения нормальных напряжений, вызванных изгибающим моментом M.

Так как для каждого сечения величины $\frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi}$ и E постоянны, то изменение σ зависит лишь от изменения координаты z и радиуса кривизны ρ волокна A_1A_2, причём $\rho = r + z$, где r — радиус кривизны нейтрального слоя.

В то время как для прямой балки мы имели линейный закон распределения напряжений, для кривого стержня напряжения σ меняются по гиперболическому закону (фиг. 522). Из формулы (31.7) видно, что в наружных от нейтрального слоя волокнах напряжения растут *медленнее*, чем z; во внутренних же, благодаря изменению знака z с положительного на отрицательный, они растут быстрее, чем z.



Фиг. 522.

Таким образом, в кривом стержне нормальное напряжение во *внутреннем* крайнем волокне *больше*, а в *наружном меньше*, чем в тех же волокнах прямого стержня того же сечения. Это понятно: первоначальная длина внутреннего волокна в кривом стержне значительно меньше, чем наружного; в прямом же стержне эти длины равны. Поэтому и получается указанная выше разница в относительных деформациях, а стало быть, и в напряжениях для этих волокон.

Перейдём к решению уравнений статики (31.4) и (31.6) с учётом зависимости, полученной из рассмотрения деформаций (31.7). В уравнение (31.4) подставим (31.7):

$$\int_F \sigma\, dF = \int_F E \frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi} \frac{z}{\rho} dF = 0.$$

Вынося постоянные для рассматриваемого сечения величины за знак интеграла и сокращая их, получаем:

$$\int_F \frac{z}{\rho} dF = 0. \qquad (31.8)$$

Это уравнение позволяет найти положение нейтральной оси.

Из равенства (31.8) ясно, что равен нулю не интеграл $\int_F z\, dF$, представляющий собой статический момент сечения относительно нейтральной оси, как это было для прямого стержня, а другой интеграл. Это показывает, что при изгибе кривого стержня нейтральная ось действительно не проходит через центр тяжести сечения. Заменяя в (31.8) $z = \rho - r$ (фиг. 521), находим:

$$\int_F \frac{\rho - r}{\rho} dF = \int_F dF - r \int_F \frac{dF}{\rho} = 0,$$

откуда следует, что

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}}. \qquad (31.9)$$

Ход вычислений величины r для каждого частного вида поперечного сечения будет различен. Подставив теперь зависимость (31.7) в уравнение (31.6), получим:

$$M - E\frac{\delta\,d\varphi}{d\varphi}\int_F \frac{z^2}{\rho}\,dF = 0, \tag{31.10}$$

где M — изгибающий момент, а интегрирование охватывает всю площадь поперечного сечения. Интеграл, входящий в это уравнение, преобразуем следующим образом:

$$\int_F \frac{z^2}{\rho}\,dF = \int_F \frac{\rho - r}{\rho}\,z\,dF = \int_F z\,dF - r\int_F \frac{z}{\rho}\,dF;$$

последний из полученных двух интегралов равен на основании (31.8) нулю, а первый представляет собой статический момент S площади поперечного сечения относительно нейтральной оси. Эта величина может быть вычислена как произведение площади сечения F на расстояние её центра тяжести до нейтральной оси, т. е. на z_0 (фиг. 522):

$$S = Fz_0. \tag{31.11}$$

Таким образом, уравнение (31.10) получает вид:

$$M - E\frac{\delta\,d\varphi}{d\varphi}S = 0; \tag{31.12}$$

отсюда

$$\frac{\delta\,d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{ES}, \tag{31.13}$$

и формула для нормальных напряжений напишется так:

$$\sigma = \frac{M}{S}\cdot\frac{z}{\rho}. \tag{31.14}$$

В уравнении (31.12) мы находим подтверждение того, что здесь статический момент S площади сечения относительно нейтральной оси *не равен нулю*, т. е. нейтральная ось при изгибе кривого стержня не проходит *через центр тяжести сечения*, а несколько (на величину z_0) смещена. На фиг. 522 мы изобразили это смещение в сторону к центру кривизны стержня. Результаты определения величины r из уравнения (31.9) для различных сечений показывают, что нейтральная ось действительно смещается в указанном направлении.

Это смещение связано с условием равенства между собой сумм сжимающих и растягивающих напряжений, действующих по сечению. Так как напряжения от изгибающего момента у наружного края сечения меньше, а у внутреннего — больше, чем в соответствующих волокнах прямого стержня того же сечения (фиг. 522), то для равенства указанных сумм нейтральная ось должна сместиться от центра тяжести сечения в сторону внутренних волокон.

Добавляя к полученным напряжениям найденные в предыдущем параграфе напряжения от нормальной силы, получаем формулу для вычисления *полных* нормальных напряжений в кривом стержне:

$$\sigma=\frac{N}{F}+\frac{M}{S}\cdot\frac{z}{\rho}. \qquad (31.15)$$

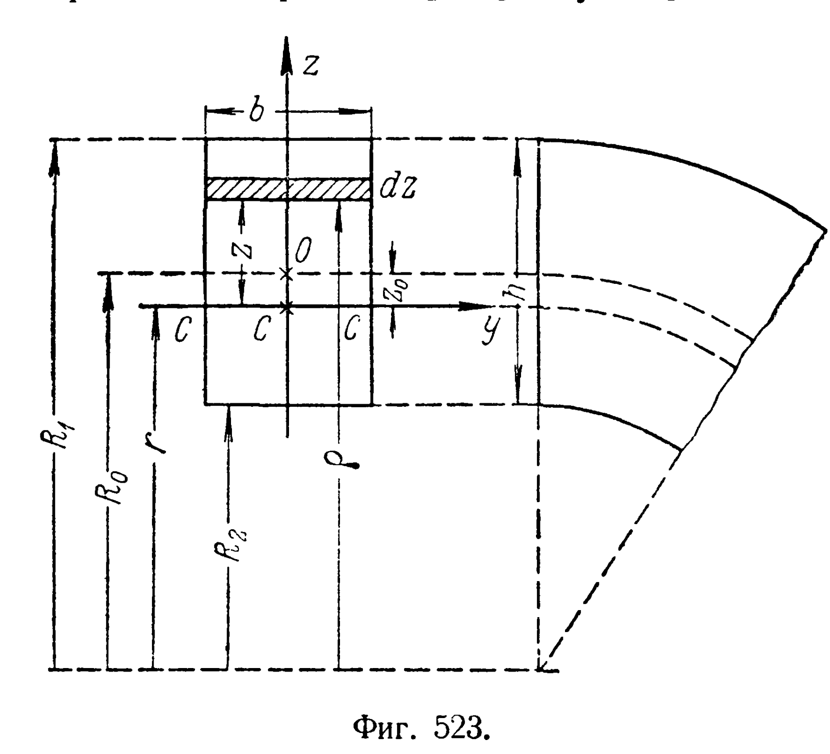
Наибольшие по абсолютной величине растягивающие и сжимающие напряжения будут иметь место в крайних волокнах *1* и *2* (фиг. 522).

§ 188. Определение радиуса кривизны нейтрального слоя при прямоугольном сечении.

Для определения величины r служит уравнение (31.9):

$$r=\frac{F}{\int\limits_F \frac{dF}{\rho}}.$$

Развернём это уравнение для случая прямоугольного сечения стержня. Назовём (фиг. 523) h — высоту, b — ширину сечения, R_0 — радиус кривизны стержня, R_1 — радиус кривизны наружных волокон, R_2 — радиус кривизны внутренних волокон, r — радиус кривизны нейтрального слоя.



Фиг. 523.

Разделим сечение на полоски $dF=b\,d\rho$; тогда уравнение (31.9) примет вид:

$$r=\frac{bh}{\int\limits_F \frac{b\,d\rho}{\rho}}=\frac{h}{\int\limits_{R_2}^{R_1}\frac{d\rho}{\rho}}=\frac{h}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\text{[1]} \qquad (31.16)$$

отсюда

$$z_0=R_0-\frac{h}{\ln\frac{R_1}{R_2}}. \qquad (31.17)$$

Формулы (31.16) и (31.17) позволяют вычислить r и z_0, а следовательно и S, для прямоугольного сечения.

---

[1]) Натуральный логарифм равен десятичному, умноженному на 2,303.

Решение можно провести приближённо, разложив $\ln\frac{R_1}{R_2}$ в ряд:

$$\ln\frac{R_1}{R_2}=\ln\frac{R_0+\frac{h}{2}}{R_0-\frac{h}{2}}=\frac{h}{R_0}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R_0}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2R_0}\right)^4+\ldots\right]; \quad (31.18)$$

отсюда

$$r=\frac{R_0}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R_0}\right)^2+\ldots}=R_0\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R_0}\right)^2-\frac{4}{45}\left(\frac{h}{2R_0}\right)^4-\ldots\right],$$

$$z_0=\frac{R_0}{3}\left(\frac{h}{2R_0}\right)^2\left[1+\frac{4}{15}\left(\frac{h}{2R_0}\right)^2+\ldots\right].$$

В первом приближении, ограничившись двумя первыми членами ряда (31.18), получим:

$$r=R_0\left[1-\frac{h^2}{12R_0^2}\right], \quad (31.19)$$

$$z_0=\frac{h^2}{12R_0}, \quad (31.20)$$

$$S=\frac{bh^3}{12R_0}=\frac{J}{R_0}. \quad (31.21)$$

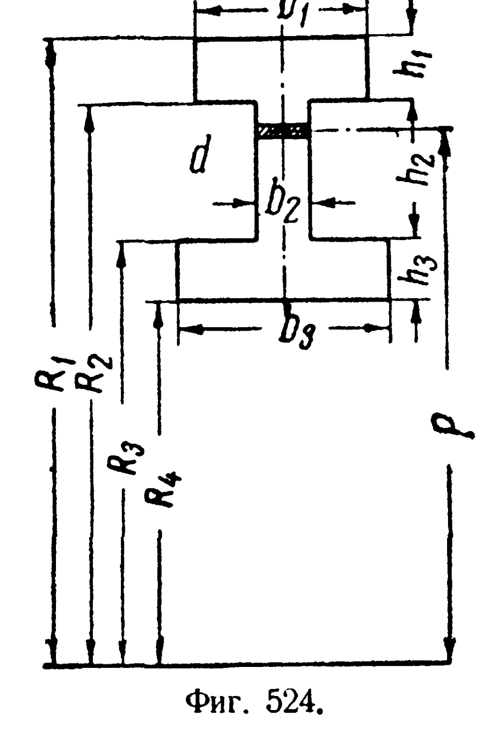
Сохраняя и третий член ряда (31.18), получаем:

$$r=R_0\left[1-\frac{h^2}{12R_0^2}\left(1+\frac{h^2}{15R_0^2}\right)\right], \quad (31.22)$$

$$z_0=\frac{h^2}{12R_0}\left(1+\frac{h^2}{15R_0^2}\right), \quad (31.23)$$

$$S=\frac{bh^3}{12R_0}\left(1+\frac{h^2}{15R_0^2}\right)=$$

$$=\frac{J}{R_0}\left(1+\frac{h^2}{15R_0^2}\right), \quad (31.24)$$



Фиг. 524.

где J — момент инерции сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения.

Положение нейтрального слоя для сечений, образованных из прямоугольников, определяется так же, как и в случае прямоугольного сечения кривого стержня: формула (31.16) приобретает лишь более сложный вид.

Рассмотрим двутавровое сечение с полками разных размеров (фиг. 524). Знаменатель уравнения (31.9) определится следующим образом:

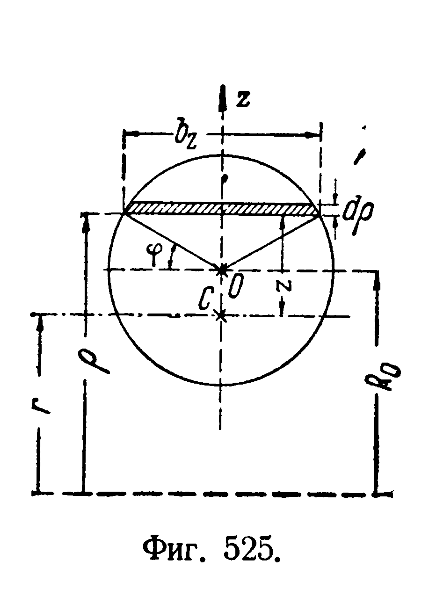
$$\int\limits_F\frac{dF}{\rho}=\int\limits_{R_2}^{R_1}\frac{b_1 d\rho}{\rho}+\int\limits_{R_3}^{R_2}\frac{b_2 d\rho}{\rho}+\int\limits_{R_4}^{R_3}\frac{b_3 d\rho}{\rho}=b_1\ln\frac{R_1}{R_2}+b_2\ln\frac{R_2}{R_3}+b_3\ln\frac{R_3}{R_4}.$$

Радиус кривизны нейтрального слоя будет:

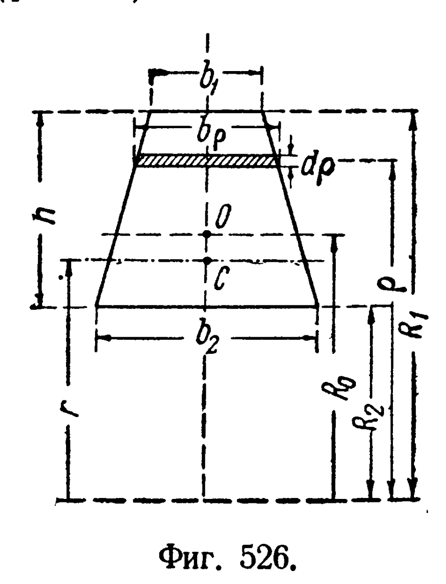
$$r=\frac{b_1h_1+b_2h_2+b_3h_3}{b_1\ln\frac{R_1}{R_2}+b_2\ln\frac{R_2}{R_3}+b_3\ln\frac{R_3}{R_4}}.$$

§ 189. Вычисление радиуса кривизны нейтрального слоя для круга и трапеции.

Для вычисления радиуса нейтрального слоя для кругового сечения, имеющего диаметр d, разбиваем площадь круга на элементарные площадки dF линиями, параллельными нейтральной оси (фиг. 525).



Фиг. 525.



Фиг. 526.

Выразим dF и ρ в функции центрального угла φ. Предварительно вычисляем:

$$\rho = R_0 + \frac{d}{2}\sin\varphi;\quad dF = b_z\,d\rho;\quad \text{но}\quad b_z = d\cos\varphi \quad \text{и}\quad d\rho = \frac{d}{2}\cos\varphi\,d\varphi.$$

Тогда $dF = \frac{d^2}{2}\cos^2\varphi\,d\varphi$. Знаменатель уравнения (31.9) принимает вид:

$$\int\limits_F \frac{dF}{\rho} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d^2\cos^2\varphi\,d\varphi}{2R_0 + d\sin\varphi}. \tag{31.25}$$

Интегрируя, получаем:

$$d^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{2R_0 + d\sin\varphi} = \pi\left[2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2}\right];$$

подставляя полученное значение в уравнение (31.9) и заменяя F через $\frac{\pi d^2}{4}$, находим:

$$r = \frac{d^2}{4\left[2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2}\right]}. \tag{31.26}$$

Для трапецоидального сечения (фиг. 526) снова воспользуемся уравнением (31.9). Площадь трапеции равна

$$F = \frac{b_1 + b_2}{2}h.$$

Ширина сечения трапеции на расстоянии ρ от центра кривизны

$$b(\rho) = b_1 + (b_2 - b_1)\frac{R_1 - \rho}{R_1 - R_2};$$
$$dF = b(\rho)\,d\rho.$$

Интеграл $\int\limits_F \frac{dF}{\rho}$ имеет значение (опускаем промежуточные выкладки):

$$\int\limits_F \frac{dF}{\rho} = \left[b_1 + R_1\frac{b_2 - b_1}{h}\right]\ln\frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1).$$

Теперь по уравнению (31.9) получаем:

$$r = \frac{h\dfrac{b_1 + b_2}{2}}{\left(b_1 + R_1\dfrac{b_2 - b_1}{h}\right)\ln\dfrac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1)}. \qquad (31.27)$$

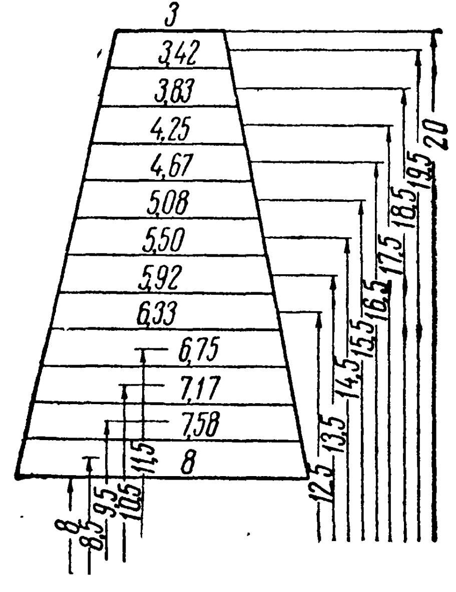
При $b_2 = b_1$, т. е. для прямоугольника, эта формула переходит в формулу (31.16).

При $b_1 = 0$ получим формулу для определения положения нейтральной оси при треугольном сечении:

$$r = \frac{hb}{2R_1\dfrac{b}{h}\ln\dfrac{R_1}{R_2} - 2b}.$$

§ 190. Приближённый способ определения положения нейтрального слоя.

Вычисление $\int\limits_F \frac{dF}{\rho}$ может быть заменено приближённым суммированием. Для этого площадь любой фигуры, изображённой строго в масштабе, должна быть разделена линиями, параллельными нейтральной оси, на полоски площадью ΔF. Величины ΔF_1, ΔF_2, $\Delta F_3, \ldots$, равно как и расстояние полосок от центра кривизны ρ_1, ρ_2, $\rho_3, \ldots$, могут быть измерены в масштабе чертежа. Суммирование отношений $\frac{\Delta F}{\rho}$ даёт возможность определить радиус кривизны r нейтрального слоя по формуле



Фиг. 527.

$$r = \frac{\Sigma\Delta F}{\Sigma\dfrac{\Delta F}{\rho}}. \qquad (31.28)$$

Покажем применение этого способа на примере трапеции. Разделим трапецию (фиг. 527) на 12 полосок, параллельных нейтральному слою, высотой по 1 *см* каждая. Площадь каждой полоски, делённая на средний радиус полоски, просуммируется следующим образом:

$$\frac{3{,}21}{19{,}5} + \frac{3{,}63}{18{,}5} + \frac{4{,}04}{17{,}5} + \frac{4{,}46}{16{,}5} + \frac{4{,}88}{15{,}5} + \frac{5{,}29}{14{,}5} +$$
$$+ \frac{5{,}71}{13{,}5} + \frac{6{,}13}{12{,}5} + \frac{6{,}54}{11{,}5} + \frac{6{,}96}{10{,}5} + \frac{7{,}38}{9{,}5} + \frac{7{,}79}{8{,}5} = 5{,}383 \text{ см}.$$

Т а б л и ц а 29. **Определение положения нейтральной оси кривых стержней.**

$\frac{R_0}{c}$			От b до 3b			
1,2	0,224	0,305	0,336	0,352	0,361	0,418
1,4	0,151	0,204	0,229	0,243	0,251	0,299
1,6	0,108	0,149	0,168	0,179	0,186	0,229
1,8	0,084	0,112	0,128	0,138	0,144	0,183
2,0	0,069	0,090	0,102	0,110	0,116	0,149
2,2	0,058	0,077	0,084	0,092	0,096	0,125
2,4	0,049	0,065	0,071	0,078	0,082	0,106
2,6	0,042	0,055	0,061	0,067	0,070	0,091
2,8	0,036	0,047	0,053	0,058	0,060	0,079
3,0	0,030	0,041	0,046	0,050	0,052	0,069
3,5	0,022	0,028	0,033	0,037	0,038	0,052
4,0	0,016	0,021	0,024	0,028	0,029	0,040
6,0	0,0070	0,0093	0,011	0,012	0,013	0,018
8,0	0,0039	0,0052	0,0060	0,0060	0,0060	0,010
10,0	0,0025	0,0033	0,0039	0,0039	0,0039	0,0065

Продолжение табл. 29.

$\frac{R_0}{c}$						$\frac{R_0}{c}$
1,2	0,409	0,408	0,453	0,269	0,399	1,2
1,4	0,292	0,285	0,319	0,182	0,280	1,4
1,6	0,224	0,208	0,236	0,134	0,205	1,6
1,8	0,178	0,160	0,183	0,104	0,159	1,8
2,0	0,144	0,127	0,147	0,083	0,127	2,0
2,2	0,120	0,104	0,122	0,068	0,104	2,2
2,4	0,103	0,088	0,104	0,057	0,088	2,4
2,6	0,089	0,077	0,090	0,049	0,077	2,6
2,8	0,077	0,067	0,078	0,043	0,067	2,8
3,0	0,067	0,058	0,067	0,038	0,058	3,0
3,5	0,049	0,041	0,048	0,028	0,042	3,5
4,0	0,038	0,030	0,036	0,020	0,031	4,0
6,0	0,018	0,013	0,016	0,0087	0,014	6,0
8,0	0,010	0,0076	0,0089	0,0049	0,0076	8,0
10,0	0,0065	0,0048	0,0057	0,0031	0,0048	10,0

Радиус кривизны нейтрального слоя

$$r=\frac{66}{5,383}=12,25\ см$$

вместо 12,26 *см* по точной формуле (31.27) (см. пример 122, стр. 599).

Если разделить трапецию не на 12, а только на 6 частей, то вычисления будут короче:

$$2\left(\frac{3,42}{19}+\frac{4,25}{17}+\frac{5,08}{15}+\frac{5,92}{13}+\frac{6,75}{11}+\frac{7,58}{9}\right)=5,36.$$

Радиус кривизны $r=66:5,36=12,30$ *см*.

Таким путём, как показано выше в §§ 188—189 для прямоугольного, круглого и трапецоидального сечений, можно вычислить величины r и z_0 для сечения любой формы. При сложном очертании контура сечения может быть применён приближённый способ вычисления, изложенный в настоящем параграфе. Результаты таких вычислений для некоторых форм сечения даны в таблице 29.

В этой таблице приведены значения z_0 в долях радиуса R_0 в зависимости от отношения R_0/c, где c — расстояние от центра тяжести сечения до внутренних волокон.

В крайней левой и крайней правой графах указаны значения отношения $(R_0:c)$.

В верхней части всех средних граф изображена форма сечения кривого стержня. Величина z_0 определяется умножением соответствующего табличного числа «k» на R_0, т. е.

$$z_0=kR_0.$$

Из этой таблицы видно, что с увеличением отношения R_0/c отношение z_0/R_0 быстро приближается к нулю, т. е. нейтральная ось приближается к центру тяжести сечения, а это значит, что уничтожается разница между работой материала в кривом и прямом стержнях. Отсюда же следует, что нейтральная ось в пределе пройдёт через центр тяжести сечения. Таким образом, при значительных величинах отношения R_0/c положение нейтральной оси и величина напряжений в кривом стержне определяются с небольшой погрешностью теми же формулами, что и в прямом.

Уже при отношении R_0/c, равном десяти, можно считать величину z_0 практически равной нулю.

§ 191. Анализ формулы нормальных напряжений в кривом стержне.

Подставляя в формулу нормальных напряжений (31.15) координаты наиболее удалённых точек сечения (фиг. 522):

точки *1* ... z_1 и R_1 (наружные волокна),
точки *2* ... $-z_2$ и R_2 (внутренние волокна),

можем написать условие прочности кривого стержня

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\frac{N}{F}+\frac{M}{S}\cdot\frac{z_1}{R_1}\leqslant[\sigma],\\ \sigma_2&=\frac{N}{F}-\frac{M}{S}\cdot\frac{z_2}{R_2}\leqslant[\sigma].\end{aligned}\right\}\qquad(31.29)$$

Если материал различно сопротивляется растяжению и сжатию, величины $[\sigma]$ будут иметь различные значения. Что же касается отыскания опасного сечения, то благодаря наличию двух факторов, вызывающих нормальные напряжения, M и N, этот вопрос более сложен, чем для прямого стержня. В некоторых случаях (см. пример § 185) M и N достигают наибольшей величины в одном и том же сечении, тогда оно и будет опасным. Если же это не имеет места, то приходится проверять прочность материала в ряде сечений, отыскивая вычислением наиболее напряжённое.

Если значение радиуса кривизны стержня R_0 велико по сравнению с высотой сечения h (а именно, $R_0 > 5h$), то отношения z/ρ, или z_1/R_1, или z_2/R_2 становятся незначительными, и нормальные напряжения, зависящие от изгибающего момента, будут мало чем отличаться от напряжений, определяемых по формулам прямого бруса. Это легко установить при помощи данных §§ 187 и 188. Возьмём, например, уравнения (31.10) и (31.7). Исключая из них $E\frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi}$ и заменяя ρ через $r+z$, получаем:

$$\sigma=\frac{M\cdot z}{(r+z)\int\limits_F \frac{z^2}{r+z}\,dF}=\frac{M\cdot z}{\left(1+\frac{z}{r}\right)\int \frac{z^2 dF}{1+\frac{z}{r}}}. \qquad (31.30)$$

Если пренебречь здесь величиной $\frac{z}{r}$, то формула (31.30) обратится в формулу напряжений в прямом стержне:

$$\sigma=\frac{Mz}{J}.$$

Определим, какова будет погрешность при вычислении наибольших нормальных напряжений от изгибающего момента по формуле прямого стержня при значении

$$R_0=5h$$

на примере стержня прямоугольного сечения. Радиус кривизны нейтрального слоя в этом случае равен:

$$r=\frac{h}{\ln\frac{R_0+0{,}5h}{R_0-0{,}5h}}=\frac{h}{\ln\frac{5{,}5}{4{,}5}}=\frac{h}{0{,}20067}=4{,}9833h.$$

Тогда

$$z_0=R_0-r=0{,}0167h \text{ и } z_0=0{,}00334R_0,$$

т. е. нейтральная ось отстоит всего на 1/60 высоты от центра тяжести сечения.

Напряжения изгиба по формулам кривого стержня составляют:

$$\sigma_1=\frac{M}{S}\cdot\frac{z_1}{R_1}=\frac{M\cdot 0{,}5167h}{bh\cdot 0{,}0167h\cdot 5{,}5h}=\frac{0{,}5167\cdot M\cdot 6}{0{,}5511bh^2}=0{,}935\frac{M}{W},$$

$$\sigma_2=\frac{M}{S}\cdot\frac{z_2}{R_2}=\frac{M\cdot 0{,}4833h}{bh\cdot 0{,}0167h\cdot 4{,}5h}=\frac{0{,}4833\cdot M\cdot 6}{0{,}4509bh^2}=1{,}071\frac{M}{W};$$

т. е. величина напряжений отличается на $\pm 7\%$ от определяемой по формуле прямого стержня.

Это обстоятельство является причиной того, что для проверки прочности кривые стержни разделяют часто на две категории. К первой относят стержни *большой кривизны* с $\frac{R_0}{h}\leqslant 5$; для них подсчёт нормальных напряжений следует вести по формуле

$$\sigma_{1,2}=\frac{N}{F}\pm\frac{M}{S}\cdot\frac{z_{1,2}}{R_{1,2}}\leqslant[\sigma]. \qquad (31.29)$$

На практике это будет иметь место, главным образом, для частей машин, крюков, звеньев цепей, колец и т. д. Ко второй категории относят стержни *малой кривизны*, у которых радиус оси велик по сравнению с размерами сечения, т. е. $\frac{R_0}{h}>5$; для таких стержней при вычислении напряжений от изгиба можно пользоваться формулой прямого стержня

$$\sigma_{1,2}=\frac{N}{F}\pm\frac{M}{W_{1,2}}\leqslant[\sigma]. \qquad (31.31)$$

Эта категория обычно включает в себя кривые стержни, встречающиеся в различных инженерных сооружениях, — арки, своды и т. д.

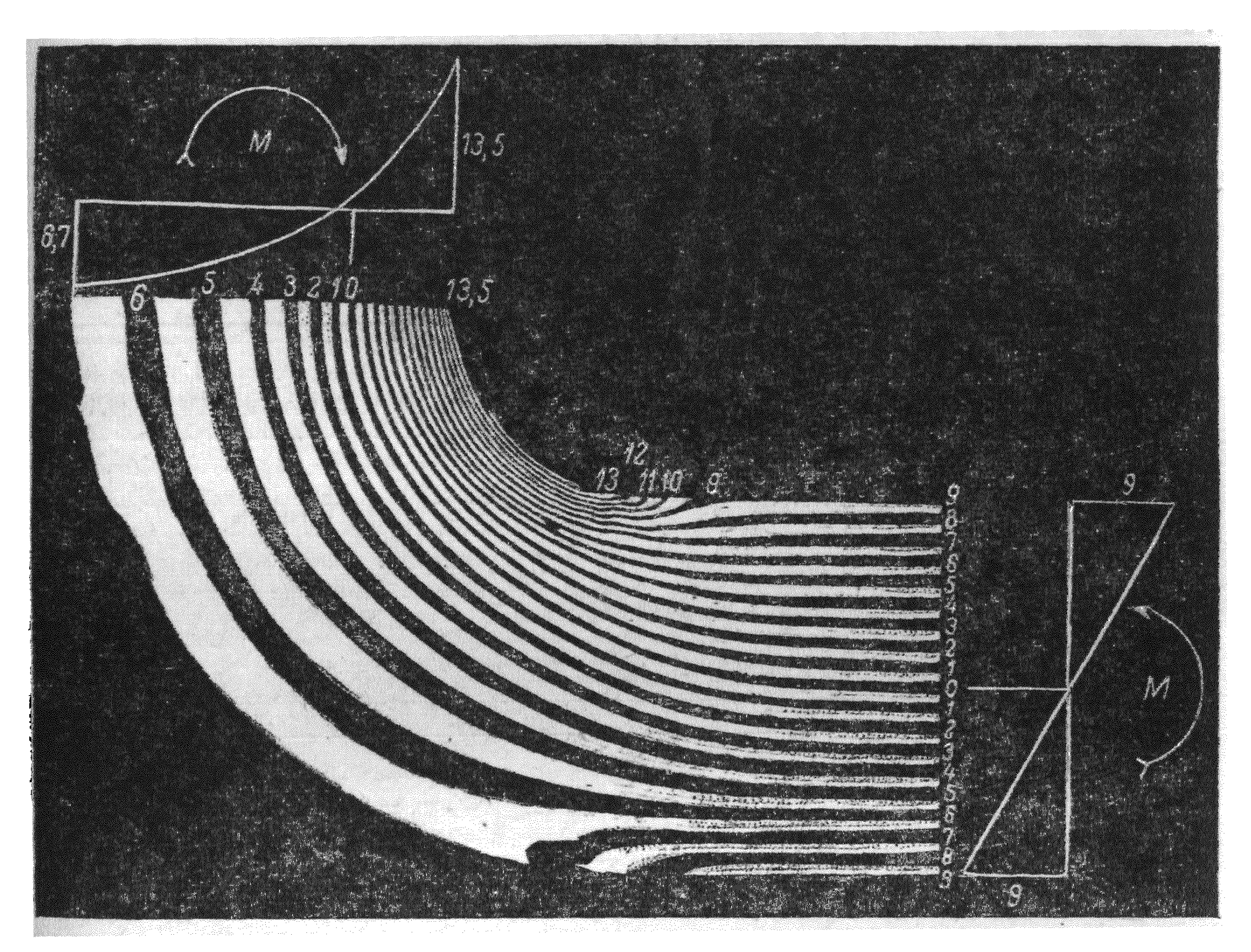
§ 192. Дополнительные замечания к формуле нормальных напряжений.

Проверяя прочность кривых стержней, мы очень часто получаем весьма значительные напряжения у внутренних волокон. Надо иметь в виду, что эти напряжения (фиг. 522) падают весьма резко уже на небольшом расстоянии от края сечения. Таким образом, они носят явно выраженный характер местных напряжений, а потому при оценке их влияния на прочность детали следует иметь в виду указания § 16: при *статической* нагрузке и при пластичном материале (мягкая сталь) переход этих напряжений за предел текучести опасности не представляет.

Основы изложенной в § 187 теории расчёта кривых стержней были даны русским академиком А. В. Гадолиным в 1856—1860 гг. Точная теория изгиба кривых стержней прямоугольного сечения впервые была изложена русским учёным Х. С. Головиным в 1880 году; полученные им результаты устанавливают, что сечения прямоуголь-

ной формы при изгибе кривого стержня остаются плоскими. Экспериментальные работы по проверке изложенной теории показывают достаточно удовлетворительное совпадение результатов опыта и вычислений.

Гиперболический закон распределения напряжений отчётливо виден при просвечивании напряжённой прозрачной модели кривого стержня поляризованным одноцветным светом. В этом случае внутри контура модели можно видеть ряд тёмных и светлых полос; чем резче изменяются напряжения, тем эти полосы делаются у́же и располагаются чаще. На фиг. 528 показано это распределение полос



Фиг. 528.

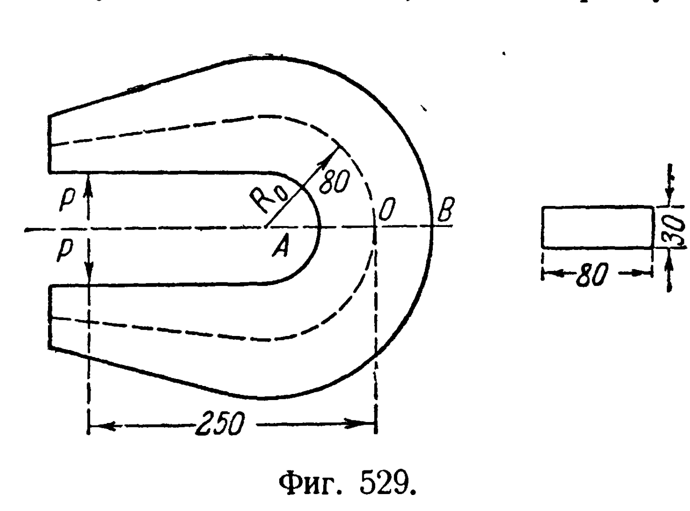
для *чистого* изгиба модели, имеющей и прямую и кривую части. В пределах прямого участка полосы располагаются равномерно, так как напряжения *меняются* по линейному закону, т. е. равномерно; в кривой части наблюдается сгущение полос у вогнутой стороны и обратная картина у выпуклой, что соответствует резкому и неравномерному росту напряжений в первой зоне и значительно более медленному — во второй.

При исследовании распределения нормальных напряжений в кривых стержнях мы пренебрегли наличием нормальных напряжений, радиально направленных, т. е. *давлением* волокон *друг на друга.*

Для кривых стержней эти напряжения имеют большее значение, чем для прямой балки, как это показали исследования, произведённые на гипсовых (хрупких) моделях. Особенно значительную величину получают эти напряжения для сечений, ширина которых резко меняется (двутавр).

§ 193. Примеры определения напряжений в кривых стержнях.

Пример 121. Изогнутая рама машины (фиг. 529) подвергается действию двух сил P по 800 *кг* каждая. Найти краевые напряжения в сечении AB. Радиус оси $R_0 = 80$ *мм*; сечение прямоугольное 80×30 *мм*.



Фиг. 529.

Так как $\frac{R_0}{h} < 5$, то следует применить формулы для стержней большой кривизны. Находим радиус нейтрального слоя r:

$$r = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}};$$

в нашем случае $h = 80$ *мм*, $R_1 = 120$ *мм*, $R_2 = 40$ *мм*; следовательно,

$$r = \frac{120}{\ln \frac{120}{40}} = \frac{80}{1{,}099} = 72{,}8 \text{ мм}.$$

Отсюда необходимые данные для расчёта:

$$z_0 = R_0 - r = 80 - 72{,}8 = 7{,}2 \text{ мм} = 0{,}72 \text{ см};$$

$$S = F \cdot z_0 = 8 \cdot 3 \cdot 0{,}72 = 17{,}3 \text{ см}^3;$$

$$z_1 = \frac{h}{2} + z_0 = 4 + 0{,}72 = 4{,}72 \text{ см}, \quad z_2 = \frac{h}{2} - z_0 = 4 - 0{,}72 = 3{,}28 \text{ см}.$$

Изгибающий момент относительно центра тяжести сечения равен

$$M = -800 \cdot 25 = -20\,000 \text{ кгсм}.$$

Нормальная сила $N = +800$ *кг*. Площадь поперечного сечения $F = 24$ *см*^{2}. Нормальные напряжения в точках $A\,(\sigma_2)$ и $B\,(\sigma_1)$ равны

$$\sigma_1 = +\frac{800}{24} - \frac{20\,000}{17{,}3} \cdot \frac{4{,}72}{12} = +33 - 455 = -422 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_2 = +\frac{800}{24} + \frac{20\,000}{17{,}3} \cdot \frac{3{,}28}{4} = +33 + 948 = +981 \text{ кг/см}^2.$$

Если бы мы воспользовались таблицей для вычисления z_0, то имели бы

$$c = \frac{h}{2} = 4 \text{ см}; \quad \frac{R_0}{c} = \frac{80}{40} = 2, \quad z_0 = 0{,}09 R_0 = 0{,}09 \cdot 8 = 0{,}72 \text{ см},$$

т. е. то же самое значение z_0. Если бы мы пренебрегли кривизной стержня и вычислили напряжения по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W},$$

то. получили бы

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = +\frac{800}{24} \mp \frac{20\,000}{\frac{3 \cdot 8^2}{6}} = +33 \mp 625 = \left\{\begin{matrix}-593 \\ +658\end{matrix}\right\} \text{ кг/см}^2.$$

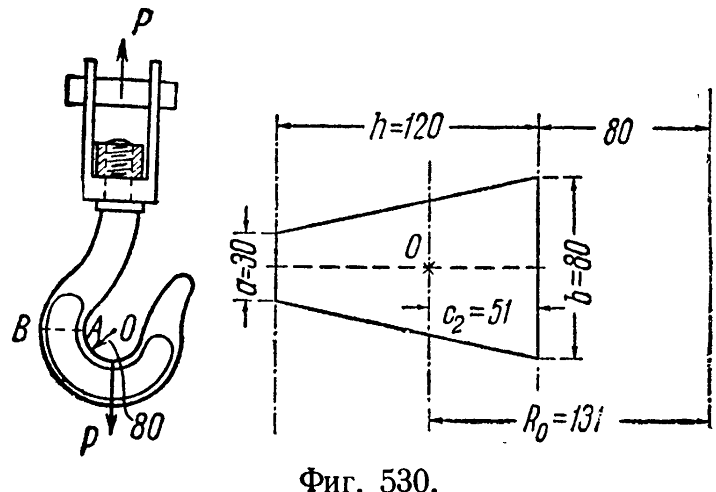
Мы получили бы напряжения во внутреннем волокне на

$$\frac{981 - 658}{981} \cdot 100 = 33\%$$

меньше, *не в запас прочности*. Таким образом, подбор сечения без учёта кривизны стержня может повлечь за собой значительные перенапряжения.

Пример 122. Проверить прочность крюка грузоподъёмностью 10 *т*. Размеры крюка приведены на фиг. 530. Опасным сечением, для которого M и N достигают максимума, будет сечение AB. Форма его — трапецоидальная, что вызвано желанием усилить зону наибольших напряжений, прилегающую к внутренним волокнам. Площадь сечения

$$F = \frac{3+8}{2} \cdot 12 = 66 \text{ см}^2.$$



Фиг. 530.

Расстояние центра тяжести от внутренних волокон равно

$$c_2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b} = \frac{12}{3} \cdot \frac{6+8}{3+8} = 5{,}09 \text{ см},$$

а от наружных,

$$c_1 = 6{,}91 \text{ см}.$$

Воспользуемся формулой (31.27):

$$r = \frac{12 \cdot 5{,}5}{\left(3 + 20 \cdot \frac{5}{12}\right) \ln \frac{20}{8} - 5} = \frac{66}{\frac{34}{3} \cdot 0{,}9163 - 5} = 12{,}26 \text{ см},$$

$$R_0 = 8 + 5{,}09 = 13{,}09 \text{ см};$$

$$z_0 = 13{,}09 - 12{,}26 = 0{,}83 \text{ см};$$

$$S = 66 \cdot 0{,}83 = 54{,}8 \text{ см}^3;$$

$$z_1 = 6{,}91 + 0{,}83 = 7{,}74 \text{ см};$$

$$z_2 = 5{,}09 - 0{,}83 = 4{,}26 \text{ см}.$$

Нормальная сила для сечения AB равна $N = P = +10\,000$ *кг*. Изгибающий момент $M = -P \cdot R_0 = -10\,000 \cdot 13{,}1 = -131\,000$ *кгсм*.

Напряжения в крайних волокнах будут:

$$\sigma_1 = +\frac{10\,000}{66} - \frac{131\,000 \cdot 7{,}74}{54{,}8 \cdot 20} = 152 - 924 = -772 \text{ кг/см}^2,$$

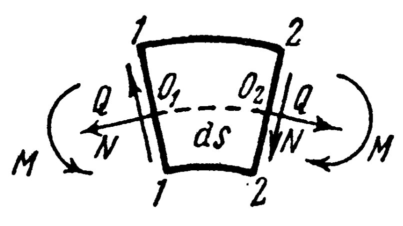
$$\sigma_2 = +\frac{10\,000}{66} + \frac{131\,000 \cdot 4{,}26}{54{,}8 \cdot 8} = 152 + 1272 = 1424 \text{ кг/см}^2.$$

§ 194. Деформации кривых стержней.

При решении статически неопределимых задач по расчёту конструкций, куда входят кривые стержни (арки, своды, звенья цепи и кольца), необходимо уметь вычислять деформации кривых стержней. Опыт и расчёты показывают, что если при *определении напряжений необходимо* для стержней большой кривизны учитывать влияние этой кривизны, то при *вычислении деформаций* в подавляющем большинстве случаев можно *пренебречь* этим влиянием.

Рассмотрим, как определяется количество потенциальной энергии при изгибе кривого стержня.

Вырежем из стержня двумя поперечными сечениями элемент длиной ds (фиг. 531). На него будут действовать по обоим сечениям касательные напряжения, складывающиеся в усилие Q, и нормальные, складывающиеся в усилия N и M.



Фиг. 531.

Для определения количества потенциальной энергии, накапливающейся в этом элементе, надо подсчитать работу всех этих усилий, приложенных к элементу. Уже в балках при подобных вычислениях мы пренебрегали работой касательных усилий; в кривом стержне это тем более возможно, так как влияние поперечных сил будет ещё меньше.

Остаётся подсчитать работу усилий N и M. Если мы пренебрежём влиянием кривизны стержня, то это будет эквивалентно предположению, что деформация выделенного элемента под действием пар M происходит так же, как в балке; тогда количество потенциальной энергии, связанной с этой деформацией, будет равно $\frac{M^2 ds}{2EJ}$; разница по отношению к балке лишь в другом обозначении длины элемента — вместо dx написано ds.

Так как мы пренебрегаем кривизной стержня, то нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения; поэтому при повороте сечения под действием пар M центры тяжести сечений O_1 и O_2 не перемещаются, и усилие N работы не производит. Поэтому мы можем вычислить его работу независимо от действия пар M и результат прибавить к полученному выше.

Усилия N, действующие на элемент, производят простое растяжение или сжатие; количество потенциальной энергии, накопленной при этом, будет равно $\frac{N^2 ds}{2EF}$; вместо длины l растянутого или сжатого стержня подставлена длина элемента ds.

Количество потенциальной энергии, накопившейся в выделенном элементе, равно

$$dU = \frac{M^2 ds}{2EJ} + \frac{N^2 ds}{2EF};$$

потенциальная энергия, накопившаяся во всём стержне, выразится интегралом от этой величины, охватывающим всю длину стержня:

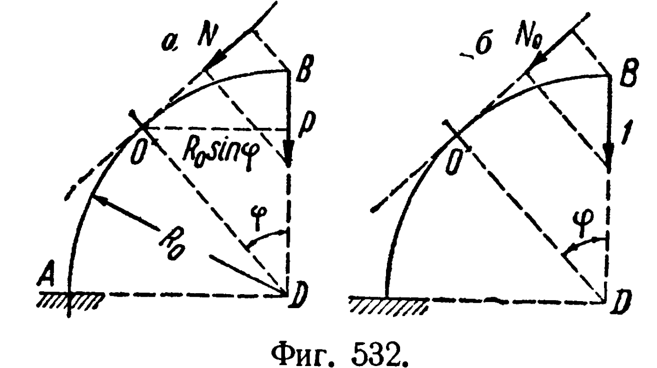
$$U = \int_s \frac{M^2 ds}{2EJ} + \int_s \frac{N^2 ds}{2EF}. \qquad (31.32)$$

Пользуясь теоремой Кастильяно, мы получим, что производная этой величины по сосредоточенной силе P даст нам линейное перемещение центра тяжести того сечения, где эта сила приложена; точно так же производная от U по моменту M_0 будет равна углу поворота соответствующего сечения:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{\partial U}{\partial P} = \int_s \frac{M\,ds}{EJ}\cdot\frac{\partial M}{\partial P} + \int_s \frac{N\,ds}{EF}\cdot\frac{\partial N}{\partial P}, \\ \theta &= \frac{\partial U}{\partial M_0} = \int_s \frac{M\,ds}{EJ}\cdot\frac{\partial M}{\partial M_0} + \int_s \frac{N\,ds}{EF}\frac{\partial N}{\partial M_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (31.33)$$

Для вычисления деформаций кривого стержня удобно воспользоваться способом Мора.

Возьмём кривой стержень, представляющий собой четверть окружности (фиг. 532), защемлённый концом в точке A. Радиус оси назовём R_0. Нагрузим этот стержень вертикальной силой P на свободном конце и найдём вертикальное перемещение точки B.



Фиг. 532.

Нужно изобразить стержень в двух состояниях:

а) при загружении заданной нагрузкой и

б) при загружении единичной силой, приложенной в том сечении, где определяется перемещение.

Так, для определения вертикальной составляющей перемещения конца стержня B (фиг. 532) нужно приложить в этом сечении единичную вертикальную силу $P^0 = 1$ (фиг. 532, *б*).

Для определения вертикального перемещения будут служить формулы (21.21′) и (21.21‴) с заменой в них длины элемента dx длиной оси криволинейного элемента ds

$$f = \int_s \frac{M(x)\,M^0\,ds}{EJ} + \int \frac{N(x)\,N^0\,ds}{EF}.$$

Вычислим $M(x)$, M^0, $N(x)$, N^0:

$$M = +PR_0 \sin\varphi; \qquad M^0 = R_0 \sin\varphi;$$

$$N = -P\sin\varphi; \qquad N^0 = -\sin\varphi;$$

$$ds = R_0\,d\varphi.$$

Подставляя полученные величины в формулу (31.33), получаем:

$$f=\frac{1}{EJ}\int_0^{\frac{\pi}{2}} P\sin^2\varphi R_0^3\,d\varphi+\frac{1}{EF}\int_0^{\frac{\pi}{2}} P\sin^2\varphi R_0\,d\varphi=$$

$$=\left[\frac{PR_0^3}{EJ}+\frac{PR_0}{EF}\right]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi=\left[\frac{PR_0^3}{EJ}+\frac{PR_0}{EF}\right]\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{\pi PR_0^3}{4EJ}\left[1+\frac{J}{FR_0^2}\right]=\frac{\pi PR_0^3}{4EJ}\left[1+\frac{i^2}{R_0^2}\right],$$

где i — радиус инерции сечения.

Первое слагаемое в скобках отражает влияние на прогиб изгибающего момента, второе — нормальной силы. Так как в большинстве случаев отношение $\frac{i^2}{R_0^2}$ — малая величина, то роль нормальной силы при деформации кривых стержней в ряде случаев сравнительно невелика.

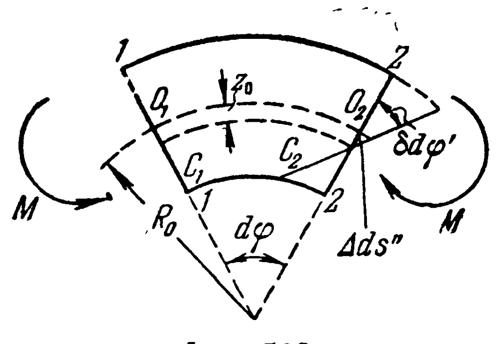
Если бы мы хотели найти горизонтальное перемещение точки B, то следовало бы приложить в этой точке горизонтальную силу $P^0=1$. Подобным же образом надо было бы поступить при отыскании угла поворота этого сечения; следует ввести $M^0=1$.

Если при вычислении M и N приходится разбивать стержень на участки, то соответственно этому каждый из интегралов в формулах (31.33) распадается на сумму интегралов с соответственно выбранными пределами.

§ 195. Вычисление деформаций с учётом кривизны стержня.

При рассмотрении деформаций элемента кривого стержня длиной ds мы исходили из предположения о том, что деформация этого элемента происходит так же, как в прямом стержне. Решим эту задачу более точно. Деформация рассматриваемого элемента (фиг. 531) от действия усилий M и N состоит из удлинения $\Delta\,ds$ отрезка ds оси элемента и из относительного поворота $\delta\,d\varphi$ сечений, ограничивающих наш элемент. Относительный поворот сечений, вызванный парами M (фиг. 533), получается из формулы (31.13) равным

$$\delta\,d\varphi'=\frac{M}{ES}\,d\varphi=\frac{M\,ds}{ESR_0}. \qquad (31.34)$$



Фиг. 533.

Но и усилия N, действующие на элемент, вызывают дополнительный поворот сечений 1—1 и 2—2 на угол $\delta\,d\varphi''$.

Нормальные напряжения, соответствующие усилию N, распределяются по сечению равномерно, но длины волокон нашего элемента увеличиваются от вогнутой к выпуклой стороне пропорционально расстояниям от центра кривизны; в том же отношении возрастают и их абсолютные удлинения и, таким образом, сечение 2—2 перемещается относительно 1—1 не парал-

лельно самому себе, а поворачиваясь вокруг центра кривизны элемента на некоторый угол $\delta\, d\varphi''$. Величина угла поворота $\delta\, d\varphi''$ равна, как видно из фиг. 534, удлинению осевого волокна, делённому на радиус кривизны R_0:

$$\delta\, d\varphi'' = \frac{N\,ds}{EFR_0}. \qquad (31.35)$$

Удлинение осевого волокна $\Delta\, ds$ вырезанного элемента в первую очередь зависит от нормальных усилий N; эта доля удлинения будет равна

$$\Delta\, ds' = \frac{N\,ds}{EF}. \qquad (31.36)$$

Фиг. 534.

Изгибающий момент M, вызывая относительный поворот сечений вокруг нейтральных осей на угол $\delta\, d\varphi'$, влечёт за собой дополнительное удлинение осевого волокна, как это видно из фиг. 533, на величину

$$\Delta\, ds'' = z_0 \delta\, d\varphi' = z_0 \frac{M\,ds}{ER_0 S} = \frac{M\,ds}{EFR_0}. \qquad (31.37)$$

Таким образом, деформация элемента стержня свелась к относительному повороту сечений $1—1$ и $2—2$ на угол

$$\delta\, d\varphi = \delta\, d\varphi' + \delta\, d\varphi'' = \frac{M\,ds}{ESR_0} + \frac{N\,ds}{EFR_0} \qquad (31.38)$$

и к удлинению осевого волокна на

$$\Delta\, ds = \Delta\, ds' + \Delta\, ds'' = \frac{N\,ds}{EF} + \frac{M\,ds}{EFR_0}. \qquad (31.39)$$

Подсчитаем теперь работу, производимую усилиями M и N при постепенном их возрастании. Постепенно и пропорционально этим усилиям будут возрастать и деформации $\delta\, d\varphi$ и $\Delta\, ds$.

Количество потенциальной энергии, накопленной в элементе при этой деформации, будет численно равно

$$dU = dA = \frac{1}{2} M\delta\, d\varphi + \frac{1}{2} N\Delta\, ds = \frac{1}{2} M\left(\frac{M\,ds}{ESR_0} + \frac{N\,ds}{EFR_0}\right) + \frac{1}{2} N\left(\frac{N\,ds}{EF} + \frac{M\,ds}{EFR_0}\right) = \frac{M^2\,ds}{2ESR_0} + \frac{N^2\,ds}{2EF} + \frac{MN\,ds}{EFR_0}. \qquad (31.40)$$

Вся энергия, накопленная в стержне, выразится суммой трёх интегралов:

$$U = \int\limits_s \frac{M^2\,ds}{2ESR_0} + \int\limits_s \frac{N^2\,ds}{2EF} + \int\limits_s \frac{MN\,ds}{EFR_0}. \qquad (31.41)$$

Теперь на примере прямоугольного сечения легко установить погрешность, допущенную нами при применении упрощённой формулы (31.32)

$$U = \int\limits_s \frac{M^2\,ds}{2EJ} + \int\limits_s \frac{N^2\,ds}{2EF}.$$

Как видим, упрощение заключается в замене произведения SR_0 величиной момента инерции J и в отбрасывании третьего слагаемого.

Мы имели для прямоугольного сечения

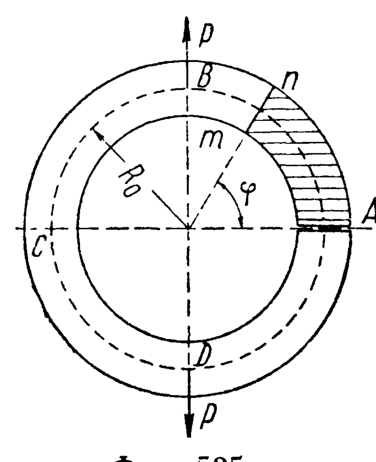
$$S = \frac{J}{R_0}\left(1 + \frac{h^2}{15R_0^2}\right); \qquad (31.24)$$

таким образом, принимая $SR_0 = J$, мы делаем относительную погрешность

порядка $\frac{h^2}{15R_0^2}$; даже при $R_0 = h$ (крюк) эта погрешность не превысит $6 \div 7\%$; при $\frac{R_0}{h} = 5$ она упадёт до 0,3%. Что же касается отбрасывания третьего слагаемого, то относительная погрешность при этой операции зависит от соотношения изгибающего момента и продольной силы и, вообще говоря, невелика.

§ 196. Примеры расчёта кривых стержней.

Пример 123. Рассчитать круговое кольцо под действием двух сил P (фиг. 535). Радиус оси кольца назовём R_0. Найдём напряжения в каком-нибудь сечении кольца mn, наклонённом под углом φ к горизонту; для этого разрежем стержень в этом сечении. Этот разрез не разделяет кольцо на две независимые друг от друга части, как это мы имели, например, в случае растянутого стержня. О величине напряжений мы из условий статики ничего узнать не можем, — задача, как говорят, *внутренне* статически неопределимая, хотя внешние силы, действующие на кольцо, известны.



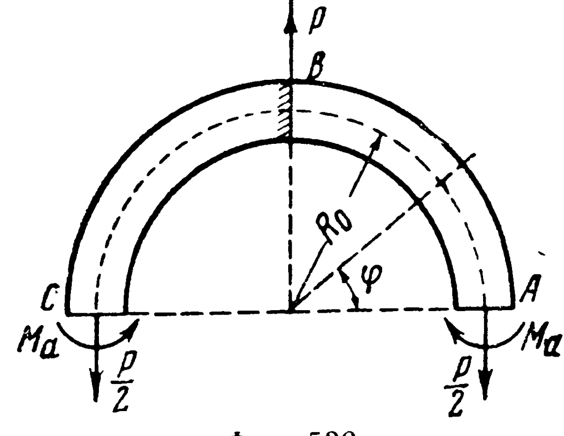
Фиг. 535.

С другой стороны, если мы найдём напряжения, действующие по какому-либо сечению, например A, и складывающиеся в общем случае в пару M_a, нормальную и касательную силы N_a и Q_a, то для каждого другого сечения mn мы сможем вычислить изгибающий момент M, нормальную и поперечную силы N и Q и найти потом напряжения. Для этого надо будет выделить из кольца заштрихованную часть между сечениями A и mn (фиг. 535) и уравновесить действующие на неё по сечению A силы M_a, N_a и Q_a системой M, N и Q для сечения mn.

Считая M_a, N_a и Q_a положительными и обозначая угол между сечениями A и mn через φ, получим:

$$\left.\begin{aligned} M &= +M_a + N_a R_0 (1-\cos\varphi) + \\ &\quad + Q_a R_0 \sin\varphi, \\ N &= N_a \cos\varphi - Q_a \sin\varphi, \\ Q &= Q_a \cos\varphi + N_a \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (31.42)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению трёх статически неопределимых величин внутренних усилий в каком-либо сечении A кольца: изгибающего момента M_a, нормальной силы N_a и поперечной силы Q_a.



Фиг. 536.

Разрезав кольцо сечениями в точках A и C на две половины (фиг. 536), мы видим, что по симметрии нормальные усилия в сечениях A и C равны $P/2$, а касательные равны нулю. Таким образом, из трёх лишних неизвестных остаётся только усилие M_a. Далее, тоже по симметрии, сечения B и A при деформации полукольца не поворачиваются; поэтому четверть кольца AB мы можем рассматривать как кривой стержень, защемлённый в сечении B и нагружённый на свободном конце силой $\frac{P}{2}$

и моментом M_a; условие же для нахождения M_a получится, если записать, что поворот сечения A равен нулю, т. е.

$$\int_0^{s/4} \frac{MM^0\,ds}{EJ} = 0. \tag{31.43}$$

Здесь $M^0 = 1$ — момент, приложенный в сечении A по направлению действующего неизвестного момента M_a. Изгибающий момент [формула (31.42)] равен

$$M = +M_a + \frac{P}{2}(1 - \cos\varphi) R_0;$$

далее,

$$M^0 = +1 \quad \text{и} \quad ds = R_0\,d\varphi.$$

Подставляя эти значения в уравнение (31.43), получаем:

$$\frac{1}{EJ}\int_0^{\pi/2}\left[+M_a + \frac{P}{2}(1 - \cos\varphi) R_0\right] R_0\,d\varphi = 0.$$

Отсюда

$$+\int_0^{\pi/2} M_a R_0\,d\varphi + \int_0^{\pi/2} \frac{P}{2}(1 - \cos\varphi) R_0^2\,d\varphi = 0,$$

или

$$+M_a R_0 \frac{\pi}{2} + \frac{P}{2} R_0^2 \frac{\pi}{2} - \frac{P}{2} R_0^2 = 0.$$

Отсюда

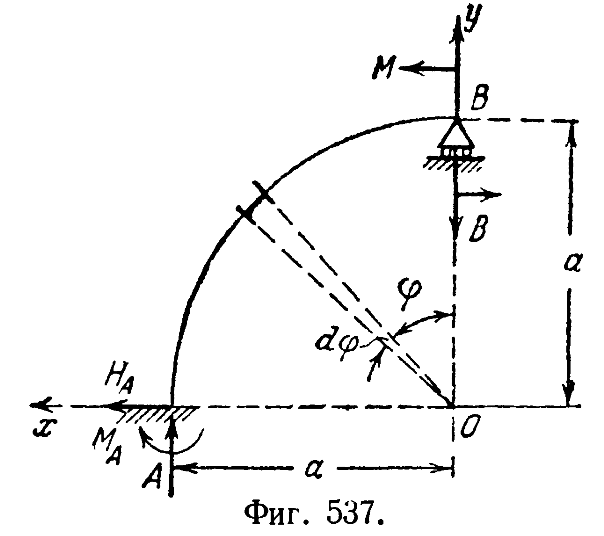
$$M_a = -\frac{1}{2} PR_0\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = -0{,}182\,PR_0.$$

Таким образом, изгибающий момент M_a получился отрицательным.

Теперь для сечения B при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ находим:

$$M_b = M_a + \frac{P}{2} R_0 (1 - \cos\varphi) =$$
$$= -0{,}182\,PR_0 + 0{,}5\,PR_0 = +0{,}318\,PR_0,$$
$$N_b = \frac{P}{2}\cos\varphi = 0.$$

Таким образом, для кольца опасным является сечение B, хотя нормальная сила в этом сечении и равна нулю.



Фиг. 537.

Пример 124. Найти изгибающие моменты и нормальные силы в кривом стержне (фиг. 537) под действием пары M. Обозначая реакции через H_A, M_A, A и B, составляем уравнения статики:

$$\Sigma X = 0; \quad H_A = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad A = B;$$
$$\Sigma M_A = 0; \quad Ba + M_A - M = 0.$$

Задача статически неопределима; за лишнюю неизвестную выбираем реакцию B; за основную систему примем стержень, защемлённый концом A. Из условия равенства нулю прогиба в точке B имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial B}=\int\limits_s \frac{M_\varphi}{EJ}\frac{\partial M_\varphi}{\partial B}\,ds=0.$$

Вычисляем изгибающий момент M_φ и его производную по B; получаем:

$$M_\varphi=Ba\sin\varphi-M;\quad \frac{\partial M_\varphi}{\partial B}=a\sin\varphi;\quad ds=a\cdot d\varphi.$$

Тогда уравнение для определения реакции B принимает вид:

$$\frac{1}{EJ}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(Ba\sin\varphi-M)\,a^2\sin\varphi\,d\varphi=0,\quad \text{или}\quad Ba\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi-M\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi=0.$$

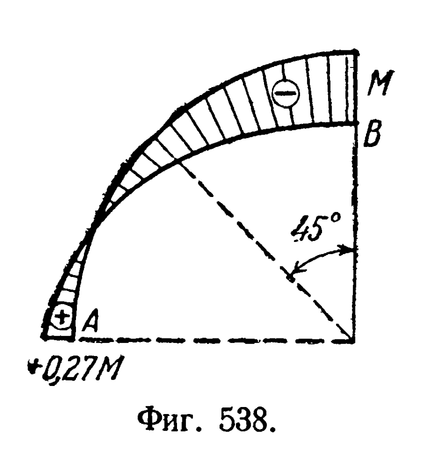
Выполняя интегрирование и решая полученное уравнение относительно B, находим:

$$B=\frac{4M}{\pi a}.$$

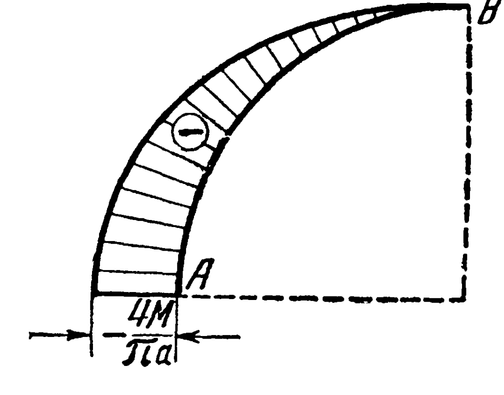
Подставляя это значение B в выражение для M_φ, получаем:

$$M_\varphi=\frac{4Ma}{\pi a}\sin\varphi-M=M\left(\frac{4}{\pi}\sin\varphi-1\right).$$

Таким образом, имеем: при $\varphi=0$ момент $M_\varphi=-M$, при $\varphi=\pi/4$ момент



Фиг. 538.



Фиг. 539.

$M_\varphi=-0{,}11\,M$, при $\varphi=\pi/2$ момент $M_\varphi=+0{,}27\,M$. Нормальная сила N_φ равна

$$N_\varphi=-B\sin\varphi=-\frac{4M}{\pi a}\sin\varphi.$$

Следовательно, при $\varphi=0$ $N_\varphi=0$,

$$\text{при } \varphi=\frac{\pi}{2}\ N_\varphi=-\frac{4M}{\pi a}.$$

Эпюры M_φ и N_φ показаны на фиг. 538 и 539.

ГЛАВА XXXII.

РАСЧЁТ ТОЛСТОСТЕННЫХ И ТОНКОСТЕННЫХ СОСУДОВ.

§ 197. Расчёт толстостенных цилиндров.

В тонкостенных цилиндрических резервуарах, подвергнутых внутреннему давлению, вполне возможно при вычислениях считать напряжения равномерно распределёнными по толщине стенки (§ 35). Это допущение очень мало отзывается на точности расчёта.

В цилиндрах, у которых толщина стенок не мала по сравнению с радиусом, подобное предположение повело бы к слишком большим погрешностям. Расчёт таких цилиндров дан Ляме и Гадолиным в 1852—1854 гг. Работы русского академика А. В. Гадолина в области расчёта кривых стержней в применении к расчёту прочности артиллерийских орудий создали ему мировую известность. Отечественные артиллерийские заводы (и многие зарубежные) до сих пор проектируют и изготовляют орудия, пользуясь исследованиями Гадолина.

Фиг. 540.

На фиг. 540 изображено поперечное сечение толстостенного цилиндра с наружным радиусом r_1, внутренним r_2; цилиндр подвергнут наружному p_1 и внутреннему давлению p_2.



Рассмотрим очень узкое кольцо материала радиусом r внутри стенки цилиндра. Толщину кольца обозначим dr. Пусть AB (фиг. 540) изображает небольшую часть этого кольца, соответствующую центральному углу $d\theta$.

Размер выделенного элемента, перпендикулярный к плоскости чертежа, возьмём равным единице. Пусть σ_r и $\sigma_r + d\sigma_r$ будут напряжения, действующие по внутренней и наружной поверхностям элемента AB, а σ_t — напряжения по его боковым граням. По симметрии сечения цилиндра и действующей нагрузки элемент AB перекашиваться не будет, и касательные напряжения по его граням будут отсутствовать. По граням элемента AB, совпадающим с плоскостью чертежа, будет действовать третье главное напряжение σ_z, вызванное давлением на днище цилиндра. Это напряжение можно считать постоянным по всем точкам поперечного сечения цилиндра.

Фиг. 541.

На элемент AB действуют в плоскости чертежа две силы $\sigma_t dr \cdot 1$, составляющие между собой угол $d\theta$, и радиальная сила, равная

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)\,d\theta \cdot 1 - \sigma_r\, r\, d\theta \cdot 1.$$

Эта сила направлена в сторону наружной поверхности. Уравновешиваясь, эти три силы составляют замкнутый треугольник abc (фиг. 541).

Из него следует, что радиальная сила, изображаемая отрезком ab, связана с силой $\sigma_t\,dr$ (отрезок ca) соотношением

$$\overline{ab} = \overline{ca}\,d\theta,$$

или

$$[(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) - \sigma_r r]\,d\theta = \sigma_t\,dr\,d\theta;$$

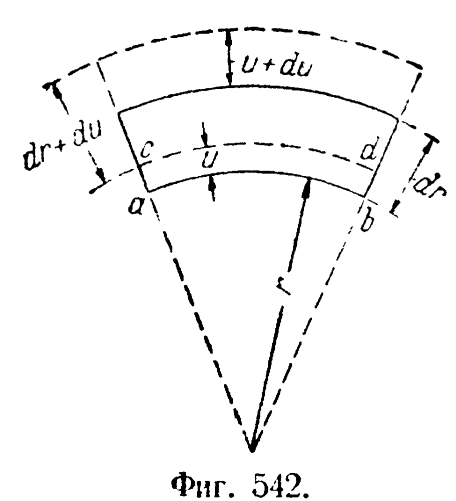
пренебрегая малыми высшего порядка, получаем:

$$\sigma_r\,dr + d\sigma_r r = \sigma_t\,dr;$$

отсюда

$$\sigma_r - \sigma_t + \frac{d\sigma_r}{dr}\,r = 0. \qquad (32.1)$$

Условие равновесия дало только одно уравнение для нахождения двух неизвестных напряжений. Задача статически неопределима, и необходимо обратиться к рассмотрению деформаций.



Фиг. 542.

Деформация цилиндра будет заключаться в его удлинении и в *радиальном* перемещении всех точек его поперечных сечений. Назовём радиальное перемещение точек внутренней поверхности рассматриваемого элемента через u (фиг. 542). Точки наружной поверхности переместятся по радиусу на другую величину $u + du$; таким образом, толщина dr выделенного элемента увеличится на du, и относительное удлинение материала в радиальном направлении будет $\varepsilon_r = \dfrac{du}{dr}$.

В направлении напряжений σ_t относительное удлинение ε_t будет равно относительному удлинению дуги ab, занявшей положение cd; так как относительное удлинение дуги таково же, как относительное удлинение радиуса r, то $\varepsilon_t = \dfrac{u}{r}$. По закону Гука [формулы (7.16) § 40]

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu\sigma_t - \mu\sigma_z] = \frac{du}{dr},\\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E}[\sigma_t - \mu\sigma_r - \mu\sigma_z] = \frac{u}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad (32.2)$$

Так как ε_t и ε_r определяются одной и той же функцией u, то они связаны условием совместности. Дифференцируем ε_t по r:

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r};\quad \frac{d\varepsilon_t}{dr} = \frac{\frac{du}{dr}r - u}{r^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) = \frac{1}{r}(\varepsilon_r - \varepsilon_t). \qquad (32.3)$$

Это и будет условие совместности деформаций; заменяя в нём значения ε_r и ε_t по (32.2), получим второе уравнение, связывающее σ_t и σ_r:

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{E}[\sigma_t - \mu\sigma_r - \mu\sigma_z]\right\} = \frac{1}{r}\frac{1+\mu}{E}[\sigma_r - \sigma_t],$$

или

$$\frac{d\sigma_t}{dr} - \mu\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1+\mu}{r}[\sigma_r - \sigma_t]. \qquad (32.4)$$

Подставляя в это уравнение значение разности $\sigma_r - \sigma_t$ из (32.1), находим:

$$\frac{d\sigma_t}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r}{dr} = -(1+\mu)\frac{d\sigma_r}{dr},$$

или

$$\frac{d\sigma_t}{dr} + \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \qquad (32.5)$$

Для совместного решения уравнений (32.1) и (32.5) продифференцируем первое по r и подставим в него значение $\frac{d\sigma_t}{dr}$ из второго; получим:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{d\sigma_t}{dr} + r\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{d\sigma_r}{dr} = 0;$$

отсюда дифференциальное уравнение задачи:

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \qquad (32.6)$$

Интеграл этого уравнения будет

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2}, \qquad (32.7)$$

что можно проверить подстановкой.

Постоянные A и B определятся из условий на внутренней и наружной поверхностях цилиндра:

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1; \quad (\sigma_r)_{r=r_2} = -p_2. \qquad (32.8)$$

Знак минус в правых частях этих формул поставлен потому, что положительными σ_r мы приняли растягивающие напряжения (фиг. 541).

Из условий (32.8) получаем:

$$A = \frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2}; \quad B = -\frac{(p_2 - p_1) r_1^2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Пользуясь этими значениями и уравнением (32.7), получаем окончательные формулы для σ_r и σ_t:

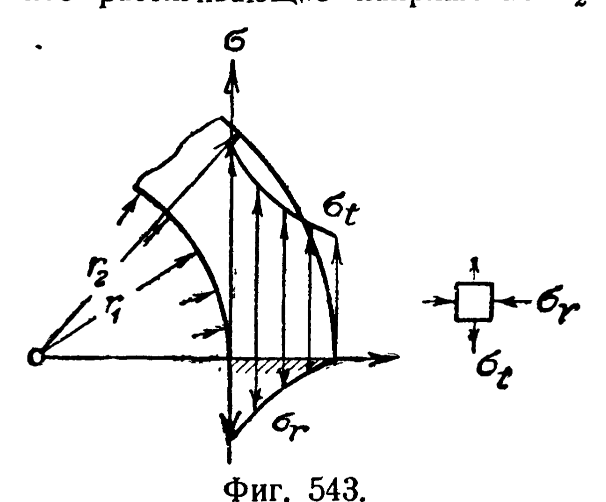
$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} - \frac{(p_2 - p_1) r_1^2 r_2^2}{r^2 (r_1^2 - r_2^2)}, \\ \sigma_t &= \frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} + \frac{(p_2 - p_1) r_1^2 r_2^2}{r^2 (r_1^2 - r_2^2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (32.9)$$

Как видно из этих формул, сумма $\sigma_r + \sigma_t$ не зависит от r, т. е. относительная деформация вдоль оси цилиндра во всех точках сечения одинакова (так как и σ_z одинаково), и сечение остаётся плоским.

Представляет очень большой практический интерес случай, когда имеет место только одно внутреннее давление p_2; тогда

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}\left[1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right], \\ \sigma_t &= \frac{p_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}\left[1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (32.10)$$

График, изображающий распределение напряжений по толщине цилиндра в случае $p_1=0$, дан на фиг. 543. Так как по абсолютной величине продольное растягивающее напряжение σ_z обычно значительно меньше σ_r и σ_t, то прочность цилиндра определяется этими последними. Применяя третью теорию прочности (наибольших касательных напряжений), получаем, что наибольшая разность главных напряжений, равная (для случая $p_1=0$)

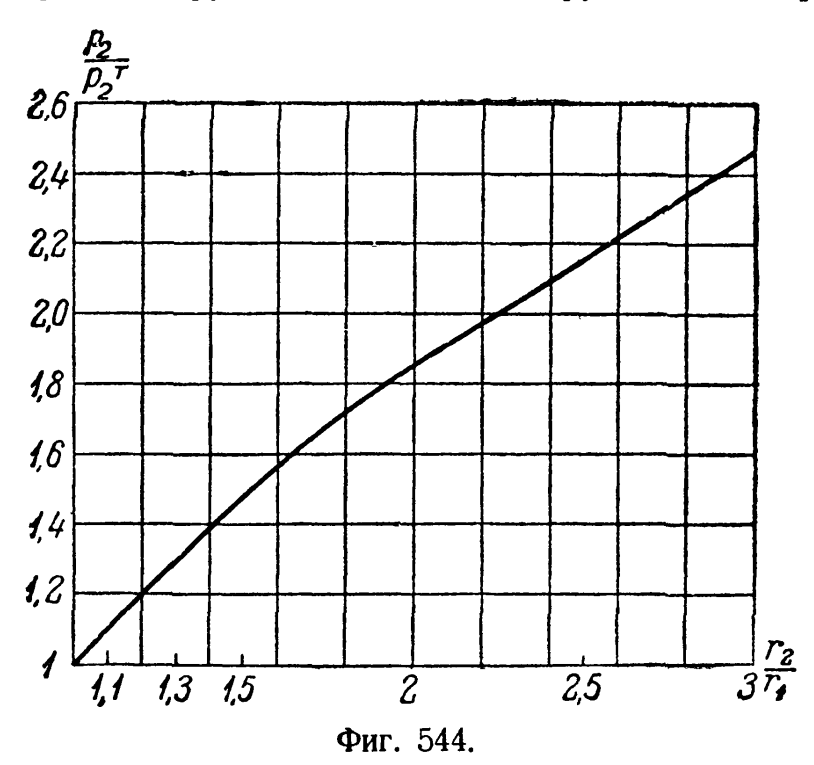


Фиг. 543.

$$(\sigma_t-\sigma_r)_{max}=\frac{2p_2r_1^2}{r_1^2-r_2^2}, \qquad (32.11)$$

будет иметь место в точках внутренней поверхности цилиндра и всегда будет по абсолютной величине значительно больше внутреннего давления.

Таким образом, остаточные деформации появятся прежде всего у внутренней поверхности цилиндра, когда $(\sigma_t-\sigma_r)_{max}$ будет равно пределу текучести материала; борьба с их появлением путём увеличения наружного радиуса r_1 практически безнадёжна, — с увеличением r_1 растут и числитель, и знаменатель формулы (32.11); поэтому разность главных напряжений $(\sigma_t-\sigma_r)_{max}$ хотя и убывает, но очень медленно. Однако момент появления пластических деформаций у внутренней поверхности цилиндра далеко не соответствует исчерпанию грузоподъёмности конструкции; для правильной оценки прочности цилиндра необходимо перейти к расчёту по допускаемым нагрузкам.



Фиг. 544.

Полное исчерпание грузоподъёмности произойдёт тогда, когда кольцевая пластическая зона, распространяясь от внутренней поверхности цилиндра, дойдёт до наружной; состояние разрушения наступит тогда, когда материал у *наружной* поверхности достигнет состояния, при котором произойдёт разрыв. Подробное исследование работы толстостенных цилиндров при наличии остаточных деформаций дано в нашей работе[1]).

На фиг. 544 показано отношение внутреннего давления p_2, при котором пластическая зона охватывает всё сечение, к давлению, соответствующему началу пластических деформаций p_2^T. Оказывается, что действительная грузоподъёмность значительно выше получаемой при обычном методе расчёта.

[1]) Беляев Н. М. и Синицкий А. К., Напряжения и деформации в толстостенных цилиндрах при упруго-пластическом состоянии материала. «Известия Отделения технических наук Академии Наук СССР», 1938.

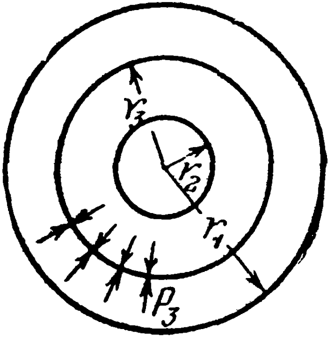
Упругая грузоподъёмность толстостенных цилиндров может быть поднята путём создания начальных напряжений. Для этого необходимо изготовить цилиндр, составленный из двух цилиндров, вставленных один в другой; наружный диаметр внутреннего цилиндра делается несколько больше внутреннего диаметра наружного цилиндра; после надевания наружного цилиндра в нагретом состоянии на внутренний и его остывания по поверхности соприкасания возникнут реакции, сжимающие внутренний и растягивающие внешний цилиндры. Наличие этих *начальных* напряжений улучшает работу составного цилиндра при внутреннем давлении, как видно из приведённого ниже расчёта.

На фиг. 545 изображён составной цилиндр после остывания. Напряжения в тангенциальном направлении σ_t будут равны: для наружного цилиндра (растяжение)

$$\sigma'_t = \frac{p_3 r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} + \frac{p_3 r_1^2 r_3^2}{r^2 (r_1^2 - r_3^2)},$$

для внутреннего цилиндра (сжатие)

$$\sigma''_t = -\frac{p_3 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{p_3 r_3^2 r_2^2}{r^2 (r_3^2 - r_2^2)}.$$



Фиг. 545.

На фиг. 546 показаны кривые распределения этих начальных напряжений при следующих числовых данных:

$$r_1 = 11{,}50 \text{ см}; \quad r_2 = 5{,}70 \text{ см}; \quad r_3 = 8{,}25 \text{ см}; \quad p_3 = 280 \text{ кг/см}^2.$$

Для наружного цилиндра напряжения у наружной поверхности равны:

$$\sigma'_{t_1} = +p_3 \frac{2r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} = +613 \text{ кг/см}^2;$$

у внутренней поверхности

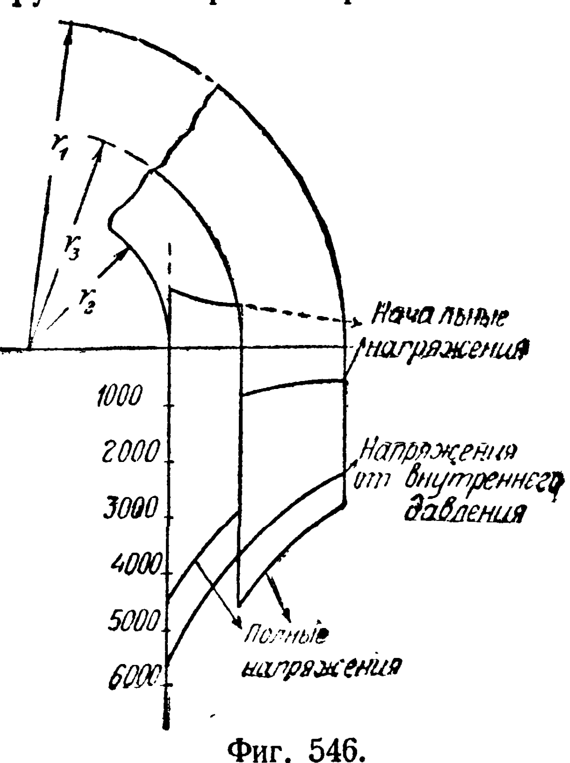
$$\sigma'_{t3} = +p_3 \frac{r_1^2 + r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} = +895 \text{ кг/см}^2.$$

Для внутреннего цилиндра напряжения у внутренней поверхности равны:

$$\sigma''_{t_2} = -p_3 \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} = -1080 \text{ кг/см}^2;$$

у наружной

$$\sigma''_{t_3} = -p_3 \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = -800 \text{ кг/см}^2.$$



Фиг. 546.

Предположим теперь, что цилиндр подвергается внутреннему давлению $p_2 = 3400$ кг/см²; тогда распределение напряжений σ_t без *учёта начальных усилий* p_3 представится формулой (32.10)

$$\sigma_t = \frac{p_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \left[1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right].$$

Крайние значения этих напряжений равны:

у наружной поверхности $\sigma_{t1} = +2245$ *кг/см²*,
» внутренней » $\sigma_{t2} = +5620$ »

Соответствующая кривая изображена на фиг. 546. При совместном действии внутреннего давления и начальных усилий напряжения выразятся суммой ординат кривых $\sigma_t + \sigma_t'$ и $\sigma_t + \sigma_t''$; кривая, изображающая эти суммарные напряжения, имеет зубчатое очертание; она тоже представлена на фиг. 546.

Вид результирующей кривой показывает, что при наличии начальных усилий p_3 напряжения в наружном цилиндре повышаются, а во внутреннем — понижаются; таким образом, материал работает более равномерно; наибольшее напряжение падает до $5620 - 1080 = +4540$ *кг/см²*, а наименьшее повышается до $2245 + 613 = 2858$ *кг/см²*. Конечно, это распределение напряжений имеет место при работе материала в пределах упругости.

Установим, какую разницу в радиусах $\Delta r_3 = r_3'' - r_3'$ надо дать, чтобы осуществить желательное начальное усилие p_3; r_3' — это начальный наружный радиус внутреннего цилиндра, а r_3'' — начальный внутренний радиус наружного цилиндра.

При остывании наружной трубы происходит выравнивание этих радиусов за счёт уменьшения r_3'' на $\Delta r_3''$ и увеличения r_3' на $\Delta r_3'$; сумма абсолютных величин этих деформаций должна быть равна Δr_3:

$$|\Delta r_3'| + |\Delta r_3''| = \Delta r_3.$$

Относительное тангенциальное удлинение материала на внутренней поверхности наружного цилиндра равно

$$\varepsilon_t' = \frac{1}{E}[\sigma_{t_3}' - \mu\sigma_{r_3}'] = \frac{p_3}{E}\left[\frac{r_1^2 + r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} + \mu\right];$$

в эту формулу вместо r_3'' подставлена величина общего для обоих цилиндров радиуса $r_3 = r_3' - \Delta r_3'$, так как $\Delta r_3'$ — *малая* величина и такая замена вводит очень небольшую погрешность. Относительное увеличение радиуса r_3' будет тоже ε_t'; поэтому

$$\Delta r_3' = \varepsilon_t' r_3 = \frac{p_3 r_3}{E}\left[\frac{r_1^2 + r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} + \mu\right].$$

Относительное тангенциальное сжатие материала на наружной поверхности внутренней трубы равно:

$$\varepsilon_t'' = \frac{1}{E}[\sigma_{t_3}'' - \mu\sigma_{r_3}''] = -\frac{p_3}{E}\left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \mu\right];$$

укорочение радиуса r_3'' будет равно:

$$\Delta r_3'' = -\frac{p_3 r_3}{E}\left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \mu\right].$$

Сумма абсолютных величин $\Delta r_3'$ и $\Delta r_3''$ равна по предыдущему

$$\frac{p_3 r_3}{E}\left[\frac{r_1^2 + r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} + \mu\right] + \frac{p_3 r_3}{E}\left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \mu\right] = \frac{2p_3 r_3^3}{E}\,\frac{r_1^2 - r_2^2}{(r_1^2 - r_3^2)(r_3^2 - r_2^2)} = \Delta r_3.$$

Таким образом, чтобы обеспечить наличие принятого нами начального усилия p_3, необходимо дать разницу диаметров Δd_3, равную

$$\Delta d_3 = \frac{4p_3 r_3^3}{E}\,\frac{r_1^2 - r_2^2}{(r_1^2 - r_3^2)(r_3^2 - r_2^2)}.$$

Минимальная температура t°, до которой надо нагреть наружный цилиндр при надевании его на внутренний, определяется уравнением

$$\alpha_t r_3 t^\circ = \Delta r_3,$$

отсюда

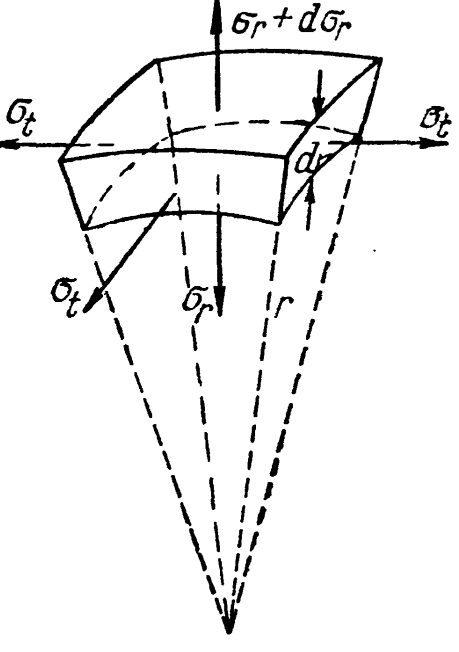
$$t^\circ = \frac{2p_3 r_3^2}{E\alpha_t} \frac{r_1^2 - r_2^2}{(r_1^2 - r_3^2)(r_3^2 - r_2^2)} = 66^\circ \text{ C}$$

(при наших числовых данных: $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$; $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*²; $\Delta d_3 = 0{,}0137$ *см*).

§ 198. Напряжения в сферических толстостенных сосудах.

На фиг. 547 изображён элемент, вырезанный из толщи стенки толстостенного сферического сосуда; внутренний радиус этого элемента равен r, а наружный $r + dr$; напряжения, действующие на этот элемент, изображены на чертеже. Составляя уравнения равновесия и совместности, получаем для σ_r и σ_t значения:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= A + \frac{B}{r^3}, \\ \sigma_t &= A - \frac{B}{2r^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (32.12)$$



Фиг. 547.

Постоянные A и B могут быть определены из условий на внутренней и внешней поверхностях сосуда при

$$r = r_2 \quad \text{и} \quad r = r_1$$

соответственно, где r_1 и r_2 — наружный и внутренний радиусы.

Так, при действии внешнего p_1 и внутреннего p_2 давлений A и B определяются из условий:

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r_2^3} = -p_2 \quad \text{на внутренней поверхности,}$$

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r_1^3} = -p_1 \quad \text{на внешней поверхности.}$$

Отсюда

$$B = -(p_2 - p_1)\frac{r_1^3 r_2^3}{r_1^3 - r_2^3}, \qquad A = +\frac{p_2 r_2^3 - p_1 r_1^3}{r_1^3 - r_2^3}.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= +\frac{p_2 r_2^3 - p_1 r_1^3}{r_1^3 - r_2^3} - (p_2 - p_1)\frac{r_1^3 r_2^3}{r^3(r_1^3 - r_2^3)}, \\ \sigma_t &= +\frac{p_2 r_2^3 - p_1 r_1^3}{r_1^3 - r_2^3} + (p_2 - p_1)\frac{r_1^3 r_2^3}{2r^3(r_1^3 - r_2^3)}. \end{aligned}\right\} \qquad (32.13)$$

§ 199. Расчёт тонкостенных сосудов.

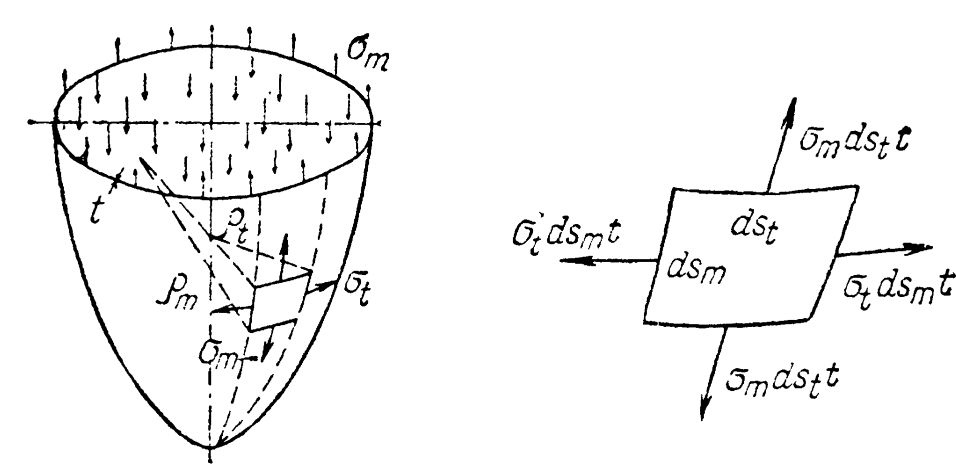
Если толщина стенок цилиндра $t = r_1 - r_2$ мала по сравнению с радиусами r_1 и r_2, то из формулы (32.10) мы получаем:

$$\sigma_t = \frac{p_2 r}{t},$$

т. е. величину, определённую нами раньше (§ 34).

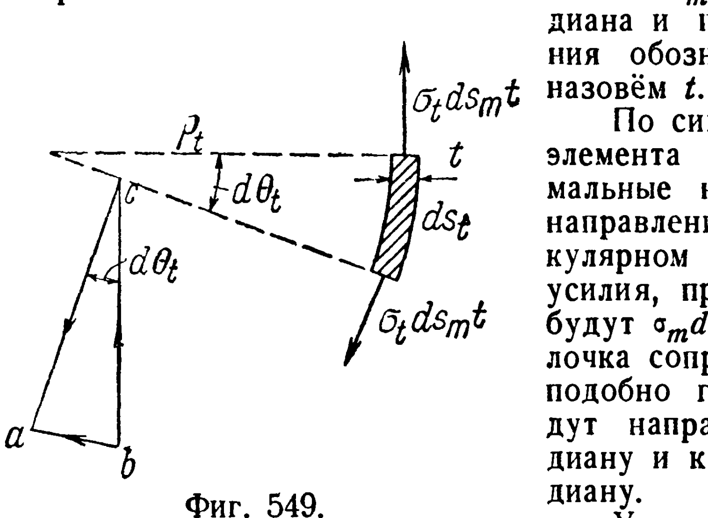
Для тонкостенных резервуаров, имеющих форму поверхностей вращения и находящихся под внутренним давлением p, распределённым симметрично относительно оси вращения, можно вывести общую формулу для вычисления напряжений.

Выделим (фиг. 548) из рассматриваемого резервуара элемент двумя смежными меридиональными сечениями и двумя сечениями, нормальными



Фиг. 548.

к меридиану. Размеры элемента по меридиану и по перпендикулярному к нему направлению обозначим соответственно ds_m и ds_t, радиусы кривизны меридиана и перпендикулярного к нему сечения обозначим ρ_m и ρ_t; толщину стенки назовём t.



Фиг. 549.

По симметрии по граням выделенного элемента будут действовать только нормальные напряжения σ_m в меридиальном направлении и σ_t в направлении, перпендикулярном к меридиану. Соответствующие усилия, приложенные к граням элемента, будут $\sigma_m ds_t t$ и $\sigma_t ds_m t$. Так как тонкая оболочка сопротивляется только растяжению, подобно гибкой нити, то эти усилия будут направлены по касательной к меридиану и к сечению, нормальному к меридиану.

Усилия $\sigma_t ds_m t = ac = bc$ (фиг. 549) дадут в нормальном к поверхности элемента направлении равнодействующую ab, равную

$$\overline{ab} = \overline{bc}\, d\theta_t = \sigma_t ds_m t\, \frac{ds_t}{\rho_t}.$$

Подобным же образом усилия $\sigma_m ds_t t$ дадут в том же направлении равнодей-

ствующую $\sigma_m ds_t ds_m \frac{t}{\rho_m}$. Сумма этих усилий уравновешивает нормальное давление, приложенное к элементу

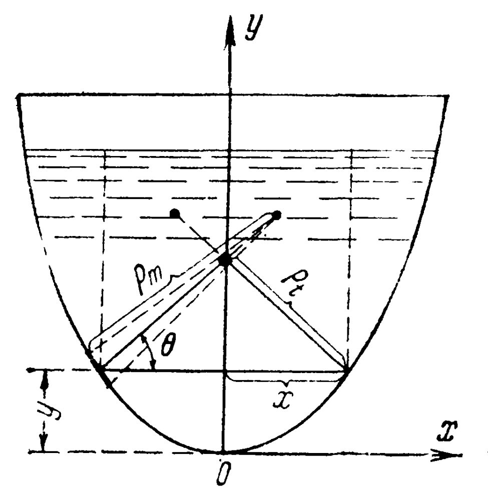
$$p\, ds_m ds_t = \sigma_m ds_t ds_m \frac{t}{\rho_m} + \sigma_t\, ds_m ds_t \frac{t}{\rho_t}.$$

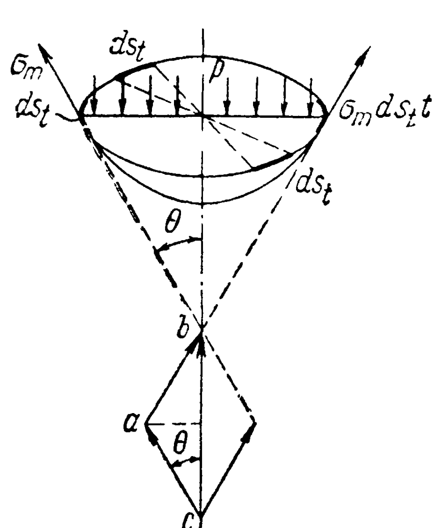
Отсюда

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{t}. \tag{32.14}$$

Это основное уравнение, связывающее напряжения σ_m и σ_t для тонкостенных сосудов вращения, дано Лапласом.

Так как мы *задались* распределением (равномерным) напряжений по толщине стенки, то задача статически определима; второе уравнение равновесия получится, если мы рассмотрим равновесие нижней, отрезанной каким-либо параллельным кругом, части резервуара.





Фиг. 550.

Рассмотрим случай гидростатической нагрузки (фиг. 550). Меридиональную кривую отнесём к осям x и y с началом координат в вершине кривой. Сечение проведём на уровне y от точки O. Радиус соответствующего параллельного круга будет x.

Каждая пара усилий $\sigma_m ds_t t$, действующих на диаметрально противоположные элементы ds_t проведённого сечения, даёт вертикальную равнодействующую bc, равную

$$bc = 2ab \cos\theta = 2\sigma_m\, ds_t t \cos\theta;$$

сумма этих усилий, действующих по всей окружности проведённого сечения, будет равна $2\pi x \sigma_m t \cos\theta$; она будет уравновешивать давление жидкости $p = \gamma(h - y)$ на этом уровне плюс вес жидкости в отрезанной части сосуда P_y:

$$2\pi x \sigma_m t \cos\theta = \pi x^2 p + P_y.$$

Отсюда

$$\sigma_m = \frac{px}{2t\cos\theta} + \frac{P_y}{2\pi x t \cos\theta}. \tag{32.15}$$

Зная уравнение меридиональной кривой, можно найти θ, x и P_y для каждого значения y, и стало быть, найти σ_m, а из уравнения (32.14) и σ_t.

Например, для конического резервуара с углом при вершине 2α, наполненного жидкостью с объёмным весом γ на высоту h, будем иметь:

$$\rho_m = \infty; \quad x = y\,\mathrm{tg}\,\alpha; \quad P_y = \frac{1}{3}\gamma\pi x^2 y = \frac{1}{3}\gamma\pi y^3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha;$$

$$p = \gamma(h - y); \quad \theta = \alpha; \quad \rho_t = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha};$$

тогда

$$\sigma_m = \frac{\gamma(h-y)y\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2t\cos\alpha} + \frac{\gamma\pi y^3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{6\pi y\,\mathrm{tg}\,\alpha\, t\cos\alpha} = \frac{\gamma(h-y)y\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2t\cos\alpha} + \frac{\gamma y^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{6t\cos\alpha} = \frac{y\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2t\cos\alpha}\left[h - \frac{2}{3}y\right];$$

$$\sigma_t = \frac{p\rho_t}{t} = \frac{\gamma(h-y)y\,\mathrm{tg}\,\alpha}{t\cos\alpha}.$$

Для сферического сосуда радиусом r_0, находящегося под внутренним давлением p_0, по симметрии $\sigma_t = \sigma_m = \sigma$; тогда из уравнения (32.14), так как

$$\rho_m = \rho_t = r_0,$$

$$\frac{2\sigma}{r_0} = \frac{p_0}{t} \quad \text{и} \quad \sigma = \frac{p_0}{2tr_0}.$$

Если меридиональная кривая будет иметь переломы с разрывом непрерывности угла θ, то равновесие тонкой оболочки у места перелома может быть обеспечено лишь наличием реакций, приложенных к оболочке по окружности в этом месте. Появление таких реакций обеспечивается устройством специальных колец, способных брать на себя усилия, возникающие в них в связи с неуравновешенностью напряжений σ_m по обе стороны точки перелома.

ОТДЕЛ IX.
УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ.

ГЛАВА XXXIII.
ПРОВЕРКА СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ.

§ 200. Введение. Понятие об устойчивости формы сжатых стержней.

Во всём предыдущем изложении мы определяли поперечные размеры стержней из условий *прочности*. Однако разрушение стержня может произойти не только потому, что будет нарушена прочность, но и оттого, что стержень не сохранит той формы, которая ему придана конструктором; при этом изменится и характер напряжённого состояния в стержне.

Наиболее типичным примером является работа стержня, сжатого силами P. До сих пор для проверки прочности мы имели условие

$$\sigma=\frac{P}{F}\leqslant[\sigma],\ \text{где}\ [\sigma]=\frac{\sigma_{т}}{k_{т}}\ \text{или}\ [\sigma]=\frac{\sigma_{в}}{k_{в}}.$$

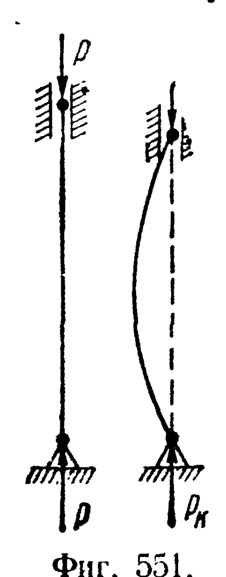
Это условие предполагает, что стержень всё время, вплоть до разрушения его напряжениями $\sigma_т$ или $\sigma_в$, работает на осевое сжатие. Уже простейший опыт показывает, что далеко не всегда возможно разрушить стержень путём доведения напряжений сжатия до предела текучести или до предела прочности материала.

Если мы подвергнем продольному сжатию тонкую деревянную линейку, то она может сломаться, изогнувшись; перед изломом сжимающие силы, при которых произойдёт разрушение линейки, будут значительно меньше тех, которые вызвали бы при простом сжатии напряжение, равное пределу прочности материала. Разрушение линейки произойдёт потому, что она не сможет *сохранить* приданную ей форму прямолинейного, сжатого стержня, а *искривится*, что вызовет появление изгибающих моментов от сжимающих сил P и, стало быть, добавочные напряжения от изгиба; линейка потеряет *устойчивость*.

Поэтому для надёжной работы конструкции мало, чтобы она была прочна; надо, чтобы все её элементы были *устойчивы:* они должны при действии нагрузок деформироваться в таких пределах, чтобы *характер* их работы оставался неизменным. Поэтому в целом ряде случаев, в частности, для сжатых стержней, помимо *проверки на прочность,* необходима и *проверка на устойчивость.* Для осуществления этой проверки надо ближе ознакомиться с условиями,

при которых устойчивость прямолинейной формы сжатого стержня нарушается.

Возьмём достаточно длинный по сравнению с его поперечными размерами стержень, шарнирно-прикреплённый к опорам (фиг. 551), и нагрузим его сверху центрально силой P, постепенно возрастающей. Мы увидим, что пока сила P сравнительно мала, стержень будет сохранять прямолинейную форму. При попытках отклонить его в сторону, например путём приложения кратковременно действующей горизонтальной силы, он будет после ряда колебаний возвращаться к первоначальной прямолинейной форме, как только будет удалена добавочная сила, вызвавшая отклонение.



Фиг. 551.

При постепенном увеличении силы P стержень будет всё медленнее возвращаться к первоначальному положению при проверках его устойчивости; наконец, можно довести силу P до такой величины, при которой стержень после небольшого отклонения его в сторону уже не выпрямится, а останется искривлённым. Если мы, не удаляя силы P, выпрямим стержень, он уже, как правило, не сможет сохранить прямолинейную форму. Другими словами, при этом значении силы P, называемом *критическим*, $P_к$, прямолинейная форма перестаёт быть устойчивой формой равновесия сжатого стержня [1]).

Переход к критическому значению силы P происходит *внезапно*; стоит нам очень немного уменьшить сжимающую силу по сравнению с её критической величиной, как прямолинейная форма равновесия вновь делается устойчивой.

С другой стороны, при очень небольшом превышении сжимающей силой P её критического значения прямолинейная форма стержня делается крайне *неустойчивой*; достаточно при этом небольшого эксцентриситета приложенной силы, неоднородности материала по сечению, чтобы стержень искривился, и не только не вернулся к прежней форме, а продолжал искривляться под действием всё возрастающих при искривлении изгибающих моментов; процесс искривления заканчивается либо достижением совершенно новой (устойчивой) формы равновесия, либо разрушением.

Исходя из этого, мы должны практически считать критическую величину сжимающей силы $P_к$ эквивалентной нагрузке, «разрушающей» сжатый стержень, *выводящей* его (и связанную с ним конструкцию) из *условий нормальной работы*. Конечно, при этом надо помнить, что «разрушение» стержня нагрузкой, превышающей кри-

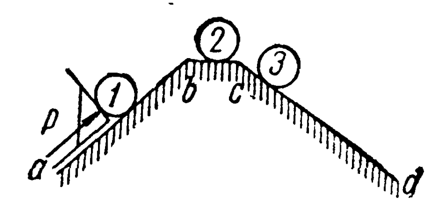
---

[1]) Исследования показывают, что потеря устойчивости становится возможной при значениях P, превышающих критическое на величину второго порядка малости.

тическую, может происходить при непременном условии беспрепятственного возрастания искривления стержня; поэтому если при боковом выпучивании стержень встретит боковую опору, ограничивающую его дальнейшее искривление, то разрушение может и не наступить.

Обычно подобная возможность является исключением; поэтому практически следует считать критическую сжимающую силу *низшим пределом* «разрушающей» стержень силы.

Явление потери устойчивости при сжатии можно по аналогии иллюстрировать следующим примером из механики твёрдого тела (фиг. 552). Будем вкатывать цилиндр на наклонную плоскость ab, которая потом переходит в короткую горизонтальную площадку bc и наклонную плоскость обратного направления cd. Пока мы поднимаем цилиндр по плоскости ab, поддерживая его при помощи упора, перпендикулярного к наклонной плоскости, он будет в состоянии *устойчивого* равновесия; на площадке bc его равновесие делается безразличным; стоит же нам поместить цилиндр в точку c, как его равновесие сделается неустойчивым — при малейшем толчке вправо цилиндр начнёт двигаться вниз.



Фиг. 552.

Описанную выше физическую картину потери устойчивости сжатым стержнем легко осуществить в *действительности* в любой механической лаборатории на очень элементарной установке[1]). Это описание не является какой-то теоретической, идеализированной схемой, а отражает поведение реального стержня под действием сжимающих сил.

Потерю устойчивости прямолинейной формы сжатого стержня иногда называют «продольным изгибом», так как она влечёт за собой значительное искривление стержня под действием продольных сил. Для проверки на устойчивость сохранился и до сих пор термин «проверка на продольный изгиб», являющийся *условным*, так как здесь речь должна итти не о проверке на изгиб, а о проверке на *устойчивость* прямолинейной формы стержня.

Установив понятие о *критической* силе как о *«разрушающей»* нагрузке, выводящей стержень из условий его нормальной работы, мы легко можем составить условие для проверки на устойчивость, аналогичное условию прочности.

Критическая сила $P_к$ вызывает в сжатом стержне напряжение, называемое «критическим напряжением» и обозначаемое буквой $\sigma_к = \frac{P_к}{F}$. Критические напряжения являются опасными напряжениями для сжатого стержня. Поэтому, чтобы обеспечить устойчивость пря-

[1]) См. Н. М. Беляев, Лабораторные работы по сопротивлению материалов, § 85, Гостехиздат, 1951.

молинейной формы стержня, сжатого силами P, необходимо к условию прочности $\left(\sigma = \frac{P}{F} \leqslant [\sigma]\right)$ добавить ещё условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leqslant [\sigma_y], \qquad (33.1)$$

где $[\sigma_y]$ — допускаемое напряжение на устойчивость, равное критическому, делённому на коэффициент запаса на устойчивость, т. е. $[\sigma_y] = \frac{\sigma_к}{k_y}$.

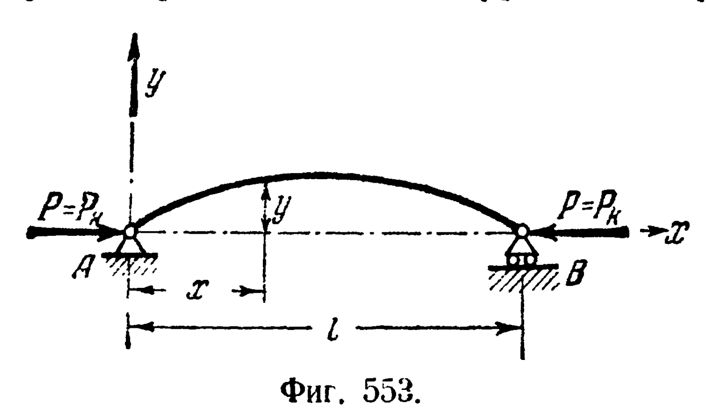
Для возможности осуществить проверку на устойчивость мы должны показать, как определять $\sigma_к$ и как выбрать коэффициент запаса k_y.

§ 201. Формула Эйлера для критической силы.

Для нахождения критических напряжений $\sigma_к$ надо вычислить критическую силу $P_к$, т. е. наименьшую осевую сжимающую силу, способную удержать в равновесии слегка искривлённый сжатый стержень.

Эту задачу впервые решил академик Петербургской Академии наук Л. Эйлер в 1744 году.

Заметим, что самая постановка задачи иная, чем во всех ранее рассмотренных отделах курса. Если раньше мы определяли деформацию стержня при заданных внешних нагрузках, то здесь ставится обратная задача: задавшись искривлением оси сжатого стержня, следует определить, при каком значении осевой сжимающей силы P такое искривление возможно.



Фиг. 553.

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения, шарнирно опёртый по концам; одна из опор допускает возможность продольного перемещения соответствующего конца стержня (фиг. 553). Собственным весом стержня пренебрегаем.

Нагрузим стержень центрально приложенными продольными сжимающими силами $P = P_к$ и дадим ему весьма небольшое искривление в плоскости наименьшей жёсткости; стержень удерживается в искривлённом состоянии, что возможно, так как $P = P_к$.

Деформация изгиба стержня предположена весьма малой, поэтому для решения поставленной задачи можно воспользоваться приближённым дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня (§ 109). Выбрав начало координат в точке A и направление координатных осей, как показано на фиг. 553, имеем (18.7):

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M(x).$$

Возьмём сечение на расстоянии x от начала координат; ордината изогнутой оси в этом сечении будет y, а изгибающий момент равен

$$M(x) = -Py.$$

По схеме, изображённой на фиг. 499, изгибающий момент получается отрицательным, ординаты же при выбранном направлении оси y оказываются положительными. (Если бы стержень искривился выпуклостью книзу, то момент был бы положительным, а y — отрицательным и $M(x) = -Py$.)

Приведённое только что дифференциальное уравнение (18.7) принимает вид:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -Py; \qquad (33.2)$$

деля обе части уравнения на EJ и обозначая дробь $\frac{P}{EJ}$ через k^2, приводим его к виду:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0. \qquad (33.3)$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$y = a\sin kx + b\cos kx. \qquad (33.4)$$

Это решение заключает в себе *три* неизвестных: постоянные интегрирования a и b и значение $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$, так как величина критической силы нам неизвестна.

Условия на концах стержня дают два уравнения:

в точке A при $x = 0$ прогиб $y = 0$,
» » B » $x = l$ » $y = 0$.

Из первого условия следует (так как $\sin kx = 0$ и $\cos ky = 1$)

$$0 = b.$$

Таким образом, изогнутая ось является синусоидой с уравнением

$$y = a\sin kx. \qquad (33.5)$$

Применяя второе условие, подставляем в это уравнение

$$y = 0 \quad \text{и} \quad x = l;$$

получаем:

$$0 = a\sin kl. \qquad (33.6)$$

Отсюда следует, что или a или kl равны нулю.

Если a равно нулю, то из уравнения (33.5) следует, что прогиб в любом сечении стержня равен нулю, т. е. стержень остался пря-

мым. Это противоречит исходным предпосылкам нашего вывода. Следовательно, $\sin kl = 0$, и величина kl может иметь следующий бесконечный ряд значений:

$$kl = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots,\ n\pi, \tag{33.7}$$

где n — любое целое число.

Отсюда $k = \frac{\pi n}{l}$, а так как $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$, то

$$\frac{P}{EJ} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot n^2 \quad \text{и} \quad P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot n^2. \tag{33.8}$$

Иначе говоря, нагрузка, способная удержать слегка искривлённый стержень в равновесии, теоретически может иметь целый ряд значений. Но так как отыскивается, и интересно с практической точки зрения, *наименьшее* значение осевой сжимающей силы, при которой становится возможным продольный изгиб, то следует принять $n = n_{\min}$.

Первый корень $n = 0$ требует, чтобы $P_к$ было равно нулю, что не отвечает исходным данным задачи; поэтому этот корень должен быть отброшен и наименьшим корнем принимается значение $n = 1$. Тогда получаем:

$$P_к = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{33.9}$$

(Здесь J — минимальный момент инерции поперечного сечения стержня.) Это — так называемая *формула Эйлера* для сжатого стержня с шарнирно-опёртыми концами. Значению критической силы (33.9) соответствует изгиб стержня по синусоиде с *одной полуволной* [формула (33.5)]

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l}. \tag{33.10}$$

Значениям критической силы высших порядков соответствуют искривления по синусоидам с двумя, тремя и т. д. полуволнами (фиг. 554):

$$\left.\begin{aligned} P_к &= \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}; \quad k = \frac{2\pi}{l}; \quad y = a \sin \frac{2\pi x}{l}, \\ P_к &= \frac{9\pi^2 EJ}{l^2}; \quad k = \frac{3\pi}{l}; \quad y = a \sin \frac{3\pi x}{l}. \end{aligned}\right\} \tag{33.11}$$

Таким образом, чем больше точек перегиба будет иметь синусоидально-искривлённая ось стержня, тем большей должна быть критическая сила. Более полные исследования показывают, что формы равновесия, определяемые формулами (33.11), неустойчивы; они пе-

реходят в устойчивые формы лишь при наличии промежуточных опор в точках B и C (фиг. 554).

Таким образом, поставленная задача решена; для нашего стержня наименьшая критическая сила определяется формулой

$$P_{к}=\frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

а изогнутая ось представляет синусоиду

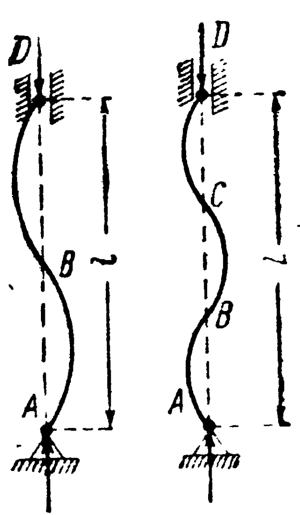
$$y=a\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Величина постоянной интегрирования a осталась неопределённой; физическое значение её выяснится, если в уравнении синусоиды положить $x=l/2$; тогда $y_{x=l/2}$ (т. е. посредине длины стержня) получит значение:

$$y_{max}=f=a.$$

Значит, a — это прогиб стержня в сечении посредине его длины. Так как при критическом значении силы P равновесие изогнутого стержня возможно при различных отклонениях его от прямолинейной формы, лишь бы эти отклонения *были малыми*, то естественно, что прогиб f остался неопределённым.

Он должен быть при этом настолько малым, чтобы мы имели право применять приближённое дифференциальное уравнение изогнутой оси, т. е. чтобы $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ было мало́ по сравнению с единицей (18.5).



Фиг. 554.

Получив значение критической силы, мы можем сейчас же найти и величину критического напряжения $\sigma_{к}$, разделив силу $P_{к}$ на площадь сечения стержня F; так как величина критической силы определялась из рассмотрения деформаций стержня, на которых местные ослабления площади сечения сказываются крайне слабо, то в формулу для $P_{к}$ входит момент инерции $J_{бр}=i^2 F_{бр}$; поэтому принято при вычислении критических напряжений, а также при составлении условия устойчивости вводить в расчёт полную, а не ослабленную, площадь поперечного сечения стержня $F_{бр}$. Тогда

$$\sigma_{к}=\frac{P_{к}}{F_{бр}}=\frac{\pi^2 EJ_{бр}}{l^2 F_{бр}}=\frac{\pi^2 Ei^2}{l^2}=\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{33.12}$$

Таким образом, критическое напряжение для стержней данного материала обратно пропорционально квадрату отношения длины стержня к наименьшему радиусу инерции его поперечного сечения.

Это отношение $\lambda = l/i$ называется *гибкостью стержня* и играет весьма важную роль во всех проверках сжатых стержней на устойчивость.

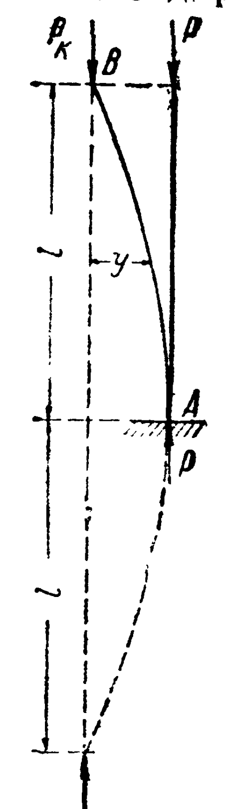
Из формулы (32.12) видно, что критическое напряжение при тонких и длинных стержнях может быть весьма малым, ниже основного допускаемого напряжения на прочность $[\sigma]$. Так, для стали 3 с пределом прочности $\sigma_в \approx 4000$ *кг/см²* допускаемое напряжение может быть принято $[\sigma] = 1600$ *кг/см²*; критическое же напряжение для стержня с гибкостью $\lambda = 150$ при модуле упругости материала $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см²* будет равно

$$\sigma_к = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6}{(150)^2} = 877 \text{ кг/см}^2 < 1600 \text{ кг/см}^2.$$

Таким образом, если бы площадь сжатого стержня с такой гибкостью была подобрана лишь по условию прочности, то стержень разрушился бы от потери устойчивости прямолинейной формы.

§ 202. Влияние способа закрепления концов стержня.

Формула Эйлера была получена путём интегрирования приближённого дифференциального уравнения изогнутой оси стержня при определённом закреплении его концов (шарнирно-опёртых). Значит, найденное выражение критической силы справедливо лишь для стержня с шарнирно-опёртыми концами и изменится при изменении условий закрепления концов стержня.



Фиг. 555.

Закрепление сжатого стержня с шарнирно-опёртыми концами мы будем называть *основным* случаем закрепления. Другие виды закрепления будем приводить к основному случаю.

Если повторить весь ход вывода для стержня, жёстко защемлённого одним концом и нагружённого осевой сжимающей силой на другом конце (фиг. 555), то мы получим другое выражение для критической силы, а следовательно, и для критических напряжений.

Предоставляя учащимся проделать это во всех подробностях самостоятельно, подойдём к выяснению критической силы для этого случая путём следующих простых рассуждений.

Пусть при достижении силой P критического значения колонна будет сохранять равновесие при слабом выпучивании по кривой AB. Сравнивая фиг. 551 и 555, видим, что изогнутая ось стержня, защемлённого одним концом, находится совершенно в тех же условиях, что и верхняя часть стержня двойной длины с шарнирно-закреплёнными концами.

Значит, критическая сила для стойки длиной l с одним защемлённым, а другим свободным концами будет та же, что для стойки с шарнирно-опёртыми концами при длине $2l$:

$$P_к = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \qquad (33.13)$$

Если мы обратимся к случаю стойки, у которой оба конца защемлены и не могут поворачиваться (фиг. 556), то заметим, что при выпучивании, по симметрии, средняя часть стержня, длиной $\frac{l}{2}$, будет работать в тех же условиях, что и стержень при шарнирно-опёртых концах (так как в точках перегиба C и D изгибающие моменты равны нулю, то эти точки можно рассматривать как шарниры).

Поэтому критическая сила для стержня с защемлёнными концами, длиной l, равна критической силе для стержня основного случая длиной $\frac{l}{2}$:

$$P_к = \frac{\pi^2 EJ}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}. \qquad (33.14)$$

Фиг. 556.

Формулы (33.13) и (33.14) можно объединить с формулой для критической силы основного случая $P_к = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ и записать:

$$P_к = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}; \qquad (33.15)$$

здесь μ — так называемый коэффициент длины, равный:

при шарнирных концах (основной случай) $\mu = 1$,
» одном свободном, другом защемлённом $\mu = 2$,
» обоих защемлённых $\mu = {}^1/_2$.

Для стержня, изображённого на фиг. 557, с одним защемлённым, а другим шарнирно-опёртым концами, коэффициент μ оказывается примерно равным $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$, а критическая сила:

$$P_к \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0{,}7l)^2} \approx 2\,\frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \qquad (33.16)$$

Фиг. 557.

Величина μl называется *приведённой* (свободной) *длиной*; при помощи коэффициента длины любой случай устройства опор стержня можно свести к основному; надо лишь при вычислении гибкости вместо действительной длины стержня ввести в расчёт

приведённую длину μl. Понятие о приведённой длине было впервые введено профессором Петербургского института инженеров путей сообщения Ф. Ясинским[1]).

На практике, однако, почти никогда не встречаются в чистом виде те закрепления концов стержня, которые мы имеем на наших расчётных схемах (фиг. 551, 556, 557).

Вместо шаровых опор обычно применяются цилиндрические шарниры. Подобные стержни следует считать шарнирно-опёртыми при выпучивании их в плоскости, перпендикулярной к оси шарниров; при искривлении же в плоскости этих осей концы стержней следует считать защемлёнными (с учётом оговорок, приведённых ниже для защемлённых концов).

В конструкциях очень часто встречаются сжатые стержни, концы которых приклёпаны или приварены к другим элементам, часто ещё с добавлением в месте прикрепления фасонных листов. Такое закрепление, однако, трудно считать защемлением, так как части конструкции, к которым прикреплены эти стержни, не являются абсолютно жёсткими.

Между тем, достаточно возможности уже небольшого поворота опорного сечения в защемлении, чтобы оно оказалось в условиях, очень близких к шарнирному опиранию. Поэтому на практике недопустимо рассчитывать такие стержни, как стойки с абсолютно защемлёнными концами. Лишь в тех случаях, когда имеет место очень надёжное защемление концов, допускается небольшое (процентов на 10—20) уменьшение свободной длины стержня.

Наконец, на практике встречаются стержни, опирающиеся на соседние элементы по всей плоскости опорных поперечных сечений. Сюда относятся деревянные стойки, отдельно стоящие металлические колонны, притянутые болтами к фундаменту, и т. д. При тщательном конструировании опорного башмака и соединения его с фундаментом можно считать эти стержни имеющими защемлённый конец. Сюда же относятся мощные колонны с цилиндрическим шарниром при расчёте их на выпучивание в плоскости оси шарнира. Обычно же трудно рассчитывать на надёжное и равномерное прилегание плоского концевого сечения сжатого стержня к опоре. Поэтому грузоподъёмность таких стоек обычно мало превышает грузоподъёмность стержней с шарнирно-опёртыми концами.

Значения критических нагрузок могут быть получены в виде формул типа эйлеровой (33.15) и для стержней переменного сечения, а также при действии нескольких сжимающих сил. Результаты решения некоторых задач теории упругой устойчивости, имеющих практическое значение, приведены в таблице 30.

---

[1]) Известия собрания инженеров путей сообщения, Петербург, 1892.

Таблица 30. Критические силы.

<table>
<tr><th>Вид нагрузки</th><th>Схема стержня</th><th>Критическая нагрузка</th><th>Коэффициенты длины μ</th></tr>
<tr><td>Равномерно распределённая по длине стержня (собственный вес) q</td><td></td><td>$(ql)_k = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = 0{,}79\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$</td><td>$\mu = 1{,}12$</td></tr>
<tr><td>То же</td><td></td><td>$(ql)_k = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = 1{,}9\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$</td><td>$\mu = 0{,}725$</td></tr>
<tr><td>Две силы P_1 и P_2
$\frac{P_1 + P_2}{P_1} = m$
$J_2 : J_1 = n$</td><td></td><td>$(P_1 + P_2)_k = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}$
μ — по таблице</td><td>
<table>
<tr><th>n \ m</th><th>1,00</th><th>1,25</th><th>1,50</th><th>1,75</th><th>2,00</th><th>3,00</th></tr>
<tr><td>1,00</td><td>1,0</td><td>0,95</td><td>0,91</td><td>0,89</td><td>0,87</td><td>0,82</td></tr>
<tr><td>1,50</td><td>1,12</td><td>1,06</td><td>1,02</td><td>0,99</td><td>0,96</td><td>—</td></tr>
<tr><td>2,00</td><td>1,24</td><td>1,16</td><td>1,12</td><td>1,08</td><td>1,05</td><td>—</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Сосредоточенная сила на свободном конце
$J_1 : J_2 = n$
Площадь постоянная
($F = \text{const}$)
(4 уголка и т. п.)</td><td></td><td>$P_k = \frac{\pi^2 FJ}{(\mu l)^2}$
μ — по таблице</td><td>
<table>
<tr><td>n</td><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,8</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>μ</td><td>6,25</td><td>2,71</td><td>2,42</td><td>2,28</td><td>2,07</td><td>2,0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

§ 203. Пределы применимости формулы Эйлера и построение полного графика критических напряжений.

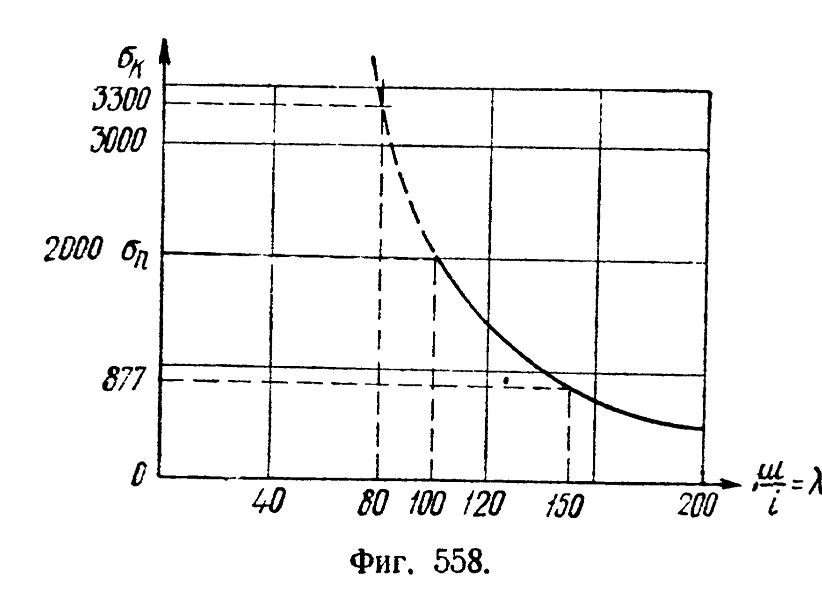
Казалось бы, что полученные в предыдущих параграфах результаты решают задачу проверки сжатого стержня на устойчивость; остаётся выбрать лишь коэффициент запаса $k_у$. Однако это далеко не так. Ближайшее же изучение числовых величин, получаемых по формуле Эйлера, показывает, что она даёт правильные результаты лишь в известных пределах.

В таблице 31 приведены величины критических напряжений, вычисленных при различных значениях гибкости для стали 3, обычно при-

Таблица 31. **Критические напряжения $\sigma_к$.**

Значения гибкости $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	$\sigma_к$ при $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см²*
150	$\sigma_к = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^6}{(150)^2} = 877$ *кг/см²*
100	$\sigma_к = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^6}{(100)^2} \approx 2000$ »
80	$\sigma_к = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^6}{(80)^2} = 3300$ »
50	$\sigma_к = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^6}{(50)^2} = 8000$ »

меняемой в металлических конструкциях; графически зависимость $\sigma_к$ от λ представлена на фиг. 558. Эта зависимость представляется гиперболической кривой, так называемой «гиперболой Эйлера». При пользовании этой кривой надо вспомнить, что представляемая ею формула (32.12) получена при помощи интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси, т. е. в предположении, *что напряжения в стержне в момент потери устойчивости не превосходят предела пропорциональности.*



Фиг. 558.

Следовательно, мы не имеем права пользоваться величинами критических напряжений, вычисленных по формуле Эйлера, если они

получаются выше этого предела для данного материала. Иначе говоря, формула Эйлера применима лишь при соблюдении условия:

$$\sigma_к \leqslant \sigma_п \quad \text{или} \quad \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leqslant \sigma_п. \tag{33.17}$$

Если из неравенства (33.17) выразить гибкость λ, то условие применимости формул Эйлера получит иной вид:

$$\lambda_п \geqslant \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_п}}. \tag{33.18}$$

Подставляя соответствующие значения модуля упругости и предела пропорциональности для данного материала, находим наименьшее значение гибкости, при которой ещё можно пользоваться формулой Эйлера. Для стали 3 предел пропорциональности может быть принят равным $\sigma_п = 2000$ *кг/см*^{2}, поэтому, как видно из таблицы 31 и из формулы (33.18), для стержней из этого материала можно пользоваться формулой Эйлера лишь при гибкости

$$\lambda_п = \sqrt{\frac{\pi^2 2 \cdot 10^6}{2000}} \approx 100,$$

т. е. ***большей, чем*** 100.

Для стали 5 при $\sigma_п \approx 3000$ *кг/см*^{2} формула Эйлера применима при гибкости $\lambda \geqslant 85$; для чугуна — при $\lambda \geqslant 80$, для сосны — при $\lambda \geqslant 110$ и т. д. Если мы на фиг. 558 проведём горизонтальную линию с ординатой, равной $\sigma_п = 2000$ *кг/см*^{2}, то она рассечёт гиперболу Эйлера на две части; пользоваться можно лишь нижней частью графика, относящейся к сравнительно тонким и длинным стержням, потеря устойчивости которых происходит при напряжениях, лежащих не выше предела пропорциональности.

Теоретическое решение, полученное Эйлером, оказалось применимым на практике лишь для очень ограниченной категории стержней, а именно, тонких и длинных, с большой гибкостью. Между тем, в конструкциях очень часто встречаются стержни с малой гибкостью. Попытки использовать формулу Эйлера для вычисления критических напряжений и проверки устойчивости при малых гибкостях вели иногда к весьма серьёзным катастрофам, да и опыты над сжатием стержней показывают, что при критических напряжениях, ***бóльших*** предела пропорциональности, действительные критические силы значительно *ниже* определённых по формуле Эйлера.

Таким образом, надо найти способ вычисления критических напряжений и для тех случаев, когда они превышают предел пропорциональности материалов, например, для стержней из мягкой стали при гибкостях от 0 до 100.

Необходимо сразу же отметить, что в настоящее время важнейшим источником для установления критических напряжений за пределом пропорциональности, т. е. при малых и средних гибкостях, являются *результаты экспериментов.* Имеются попытки

и теоретического решения этой задачи, но они скорее указывают путь к дальнейшим исследованиям, чем дают основания для практических расчётов.

Прежде всего надо выделить стержни с малой гибкостью, от 0 примерно до 30—40; у них длина сравнительно невелика по отношению к размерам поперечного сечения. Например, для стержня круглого сечения гибкости 20 соответствует отношение длины к диаметру, равное 5. Для таких стержней трудно говорить о явлении потери устойчивости прямолинейной формы всего стержня в целом в том смысле, как это имеет место для тонких и длинных стержней.

Эти короткие стержни будут выходить из строя главным образом за счёт того, что напряжения сжатия в них будут достигать предела текучести $\sigma_т$ (при пластичном материале) или предела прочности $\sigma_в$ (при хрупких материалах). Поэтому для коротких стержней, до гибкости примерно $30 \div 40$, критические напряжения будут равны, или немного ниже (за счёт наблюдающегося всё же некоторого искривления оси стержня), соответственно или $\sigma_т$ (сталь), или $\sigma_в$ (чугун, дерево).

Таким образом, мы имеем два предельных случая работы сжатых стержней: короткие стержни, которые теряют грузоподъёмность в основном за счёт разрушения *материала* от сжатия, и длинные, для которых потеря грузоподъёмности вызывается нарушением *устойчивости прямолинейной формы* стержня. Количественное изменение соотношения длины и поперечных размеров стержня меняет и весь характер явления разрушения. Общим остаётся лишь внезапность наступления критического состояния в смысле внезапного резкого возрастания деформаций.

В сжатых стержнях большой гибкости, для которых применима формула Эйлера, после достижения силой P критического значения обычно наблюдается резкий рост деформаций. До этого момента прогибы, как правило, растут с ростом нагрузки, но остаются незначительными. Теоретически можно было бы ожидать, что до критической силы стержень будет оставаться прямым; однако ряд неизбежных на практике обстоятельств — начальная кривизна стержня, некоторый эксцентриситет приложения нагрузки, местные перенапряжения, неоднородность материала — вызывают небольшие прогибы и при сжимающих силах, меньших критических.

Подобный же характер имеет и зависимость укорочений от напряжения при сжатии коротких стержней; мы имеем ту же внезапность роста деформаций при определённой величине напряжений (когда $\sigma = \sigma_т$).

Нам остаётся теперь рассмотреть поведение сжатых стержней при средних величинах гибкости, например для стальных стержней при гибкостях от 40 до 100; с подобными значениями гибкостей инженер чаще всего встречается на практике.

По характеру разрушения эти стержни приближаются к категории тонких и длинных стержней; они теряют свою прямолинейную форму и разрушаются при явлениях значительного бокового выпучивания. При опытах для них можно отметить наличие ясно выраженной критической силы в «эйлеровом» смысле; критические напряжения получаются выше предела пропорциональности и ниже предела текучести для пластичных и предела прочности для хрупких материалов.

Однако потеря прямолинейной формы и понижение критических напряжений по сравнению с короткими стержнями для этих стержней «средней» гибкости связаны с такими же явлениями нарушения прочности материала, какие вызывают потерю грузоподъёмности в коротких стержнях. Здесь комбинируются и влияние длины, понижающее величину критических напряжений, и влияние значительного роста деформаций материала при напряжениях за пределом пропорциональности.

Экспериментальное определение критических сил для сжатых стержней производилось неоднократно как у нас, так и заграницей. Особенно обширный опытный материал собрал проф. Ф. Ясинский, составивший таблицу критических («ломающих») напряжений в зависимости от гибкости для целого ряда материалов и положивший начало современным методам расчёта сжатых стержней на устойчивость [1]).

На основании полученного опытного материала можно считать, что при критических напряжениях, меньших предела пропорциональности, все эксперименты подтверждают формулу Эйлера для любого материала.

Для стержней средней и малой гибкости были предложены различные эмпирические формулы, показывающие, что критические напряжения при таких гибкостях меняются по закону, близкому к линейному [1]):

$$\sigma_{\text{к}} = a - b\lambda, \tag{33.19}$$

где a и b — коэффициенты, зависящие от материала, а $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ — гибкость стержня. Для литого железа Ясинский получил: $a = 3387$ *кг/см²*, $b = 14{,}83$ *кг/см²*. Для стали 3 при гибкостях от $\lambda = 40$ до $\lambda = 100$ коэффициенты a и b могут быть приняты: $a = 3360$ *кг/см²*; $b = 14{,}7$ *кг/см²*. Для дерева (сосна): $a = 293$ *кг/см²*; $b = 1{,}94$ *кг/см²*.

Данные о коэффициентах a и b для прочих материалов приводятся в справочниках (см., например, Справочник под ред. А. Н. Динника, Москва, 1949).

Иногда удобны эмпирические формулы, дающие для неупругой области изменение критических напряжений по закону квадратной параболы; к ним относится формула

$$\sigma_{\text{к}} = \sigma_0 - a\lambda^2. \tag{33.20}$$

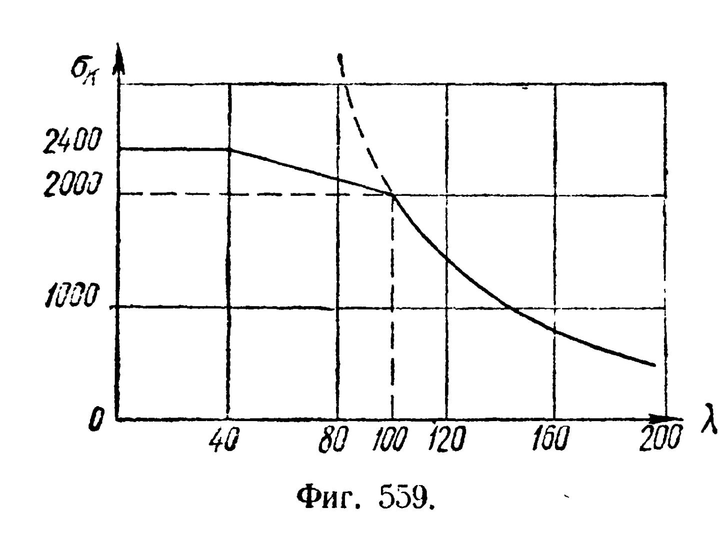
---

[1]) Ясинский, Собрание сочинений, т. I. Петербург, 1902 г.

Здесь при $\lambda = 0$ считают $\sigma_к = \sigma_0 = \sigma_т$ для пластичного и $\sigma_к = \sigma_0 = \sigma_в$ для хрупкого материала; коэффициент a, подобранный из условия плавного сопряжения с гиперболой Эйлера, имеет значение:

для стали с пределом	текучести	$\sigma_т = 2800$	*кг/см*^{2}	$a = 0{,}09$ *кг/см*^{2}
» сосны »	» прочности	$\sigma_в = 300$	»	$a = 0{,}008$ »
» чугуна »	» »	$\sigma_в = 4200$	»	$a = 0{,}44$ »

При наличии приведённых здесь данных может быть построен полный график критических напряжений (в зависимости от гибкости) для любого материала. На фиг. 559 приведён такой график для строительной стали с пределом текучести $\sigma_т = 2400$ *кг/см*^{2} и пределом пропорциональности $\sigma_п = 2000$ *кг/см*^{2}.



Фиг. 559.

График состоит из трёх частей: гиперболы Эйлера при $\lambda > 100$, наклонной прямой при $100 > \lambda > 40$ и горизонтальной, или слабо наклонной, прямой при $\lambda < 40$. Подобные же графики можно построить, комбинируя формулу Эйлера с результатами экспериментов, и для других материалов.

Таким образом, можно считать, что задача определения критических напряжений для стержней любой гибкости решена с достаточной для практических целей точностью.

§ 204. Проверка сжатых стержней на устойчивость.

В § 200 мы отметили, что для сжатых стержней должны быть произведены две проверки:

на прочность

$$\sigma = \frac{P}{F_{нет}} \leqslant [\sigma], \quad \text{где} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_0}{k_0},$$

на устойчивость

$$\sigma = \frac{P}{F_{бр}} \leqslant [\sigma_у], \quad \text{где} \quad [\sigma_у] = \frac{\sigma_к}{k_у}.$$

Величина критического напряжения $\sigma_к$ найдена в предыдущем параграфе; для установления допускаемого напряжения на устойчивость нам остаётся теперь выбрать только коэффициент запаса k.

В нашей практике этот коэффициент колеблется для *стали* в пределах от 1,8 до 3,0. Коэффициент запаса на устойчивость выбирается выше коэффициента запаса на прочность k_0, равного для стали 1,6.

Это объясняется наличием ряда обстоятельств, неизбежных на практике (начальная кривизна, эксцентриситет действия нагрузки, неоднородность материала и т. д.) и почти не отражающихся на работе конструкции при других видах деформации (кручение, изгиб, растяжение).

Для сжатых же стержней, ввиду возможности потери устойчивости, эти обстоятельства могут сильно снизить грузоподъёмность стержня. Для чугуна коэффициент запаса колеблется от 5,0 до 5,5, для дерева — от 2,8 до 3,2.

Чтобы установить связь между допускаемым напряжением на устойчивость $[\sigma_у]$ и допускаемым напряжением на прочность $[\sigma]$, возьмём их отношение:

$$\frac{[\sigma_у]}{[\sigma]}=\frac{\sigma_к k_0}{k_у \sigma_0} \quad \text{или} \quad [\sigma_у]=\frac{\sigma_к}{\sigma_0}\cdot\frac{k_0}{k_у}[\sigma].$$

Обозначая

$$\varphi=\frac{\sigma_к}{\sigma_0}\cdot\frac{k_0}{k_у}, \tag{33.21}$$

получим:

$$[\sigma_у]=\varphi[\sigma]; \tag{33.22}$$

здесь φ — *коэффициент уменьшения* основного допускаемого напряжения для сжатых стержней.

Имея график зависимости $\sigma_к$ от λ для данного материала, зная $\sigma_0=\sigma_т$ или $\sigma_0=\sigma_в$ и выбрав коэффициенты запаса на прочность k_0 и на устойчивость $k_у$, можно составить таблицы значений коэффициента φ в функции от гибкости. Такие данные приводятся в наших технических условиях на проектирование сооружений; они сведены в таблицу 32.

Пользуясь этой таблицей, можно произвести подбор сечения сжатого стержня. Так как величина площади сечения зависит от $[\sigma_у]$, а это напряжение в свою очередь через коэффициент φ связано с гибкостью стержня λ, т. е. с формой и размерами его сечения, то подбор приходится осуществлять путём последовательных приближений в таком, например, порядке.

Выбираем форму сечения и задаёмся его размерами; вычисляем наименьший радиус инерции и гибкость; находим по таблице коэффициент φ и вычисляем допускаемое напряжение на устойчивость $[\sigma_у]=\varphi[\sigma]$; сравниваем действительное напряжение $\sigma=\frac{P}{F_{бр}}$ с величиной $[\sigma_у]$; если условие устойчивости

$$\sigma=\frac{P}{F_{бр}}\leqslant\varphi[\sigma] \tag{33.23}$$

Таблица 32. **Коэффициенты φ.**

Гибкость $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	Значения φ для				
	стали марок 4, 3, 2, ОС	стали марки 5	стали СПК	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

не удовлетворено, или удовлетворено с большим запасом, меняем размеры сечения и повторяем расчёт. Конечно, окончательно выбранное сечение должно удовлетворять и условию прочности

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{нет}}} \leqslant [\sigma].$$

В практических расчётах условие устойчивости иногда записывается так:

$$\sigma_{\text{р}} = \frac{P}{\varphi F_{\text{бр}}} \leqslant [\sigma].$$

В левой части $\sigma_{\text{р}}$ представляет собой расчётное (условное) напряжение.

Фиг. 560.

Ход вычислений покажем на примере.

Пример 125. Подобрать двутавровое сечение стойки с одним защемлённым концом, сжатой силами $P = 35$ *т*; длина стойки $l = 1,5$ *м*. Основное допускаемое напряжение $[\sigma] = 1600$ *кг/см²* (фиг. 560).

Так как в условии устойчивости $\sigma = \frac{P}{\varphi F_{\text{бр}}} \leqslant [\sigma]$ нам не известно ни $F_{\text{бр}}$, ни φ, одной из этих величин необходимо задаться. Примем для первого

приближения $\varphi=0{,}5$. При этом значении φ необходимая площадь поперечного сечения должна быть:

$$F_{\text{бр}} \geqslant \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{24\,000}{0{,}5 \cdot 1600} = 30 \text{ см}^2.$$

По сортаменту (ГОСТ 8239—56) выбираем I № 22 с площадью сечения $F=30{,}6$ *см*². Наименьший радиус инерции сечения $i_{\min}=2{,}27$ *см*; соответствующая гибкость стойки $\lambda=\frac{\mu l}{i_{min}}=\frac{2{,}150}{2{,}27}=132$; коэффициент φ (табл. 32) по интерполяции между значениями для $\lambda=130$ и $\lambda=140$ равен $\varphi=0{,}392$. Расчётное напряжение оказывается равным:

$$\sigma_{\text{р}} = \frac{P}{\varphi F} = \frac{24\,000}{0{,}392 \cdot 30{,}6} = 2000 \text{ кг/см}^2 > 1600 \text{ кг/см}^2.$$

Сечение не удовлетворяет условию устойчивости. Для второго приближения попробуем I № 24 с площадью сечения $F=34{,}8$ *см*²; $i_{\min}=2{,}37$ *см*; $\lambda=\frac{2 \cdot 150}{2{,}37}=127$; коэффициент $\varphi=0{,}415$. Расчётное напряжение будет:

$$\sigma_{\text{р}} = \frac{P}{\varphi F} = \frac{24\,000}{0{,}415,\ 34{,}8} = 1660 \text{ кг/см}^2 > 1600 \text{ кг/см}^2.$$

Перенапряжение составляет $\frac{1660-1600}{1600} \cdot 100 = 3{,}75\,\%$, что допустимо.

§ 205. Выбор типа сечения и материала.

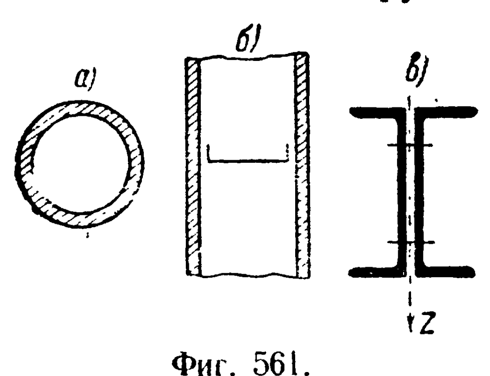
А. Так как в сопротивлении стержней продольному изгибу (нарушению устойчивости) основную роль играет гибкость стержня, а стало быть, величина наименьшего радиуса инерции сечения, то очень существенным является вопрос не только о величине площади стержня, как при расчёте на прочность, но и о *форме* поперечного сечения.

Для наиболее экономичного решения вопроса необходимо конструировать сечение, у которого при определённой площади величина наименьшего радиуса инерции была бы возможно большей. Для этого прежде всего следует стремиться к тому, чтобы *наименьший радиус инерции был равен наибольшему*, т. е. чтобы все центральные моменты инерции сечения были равны, эллипс инерции обратился бы в круг. Такой стержень будет оказывать одинаковое сопротивление потере устойчивости в любом направлении.

Если свободная длина стержня (§ 202) при возможном искривлении в обеих главных плоскостях будет различна, то и главные моменты инерции тоже целесообразно выбрать разными с таким расчётом, чтобы коэффициенты φ были бы в обоих случаях одинаковыми.

Далее необходимо стремиться к получению при данной площади наибольших центральных моментов инерции. Для этого необходимо разместить материал сечения по возможности дальше от центра тяжести. Обоим поставленным условиям вполне удовлетворяет, например, трубчатое сечение (фиг. 561, *а*), которое очень часто и применяется для сжатых колонн и стоек.

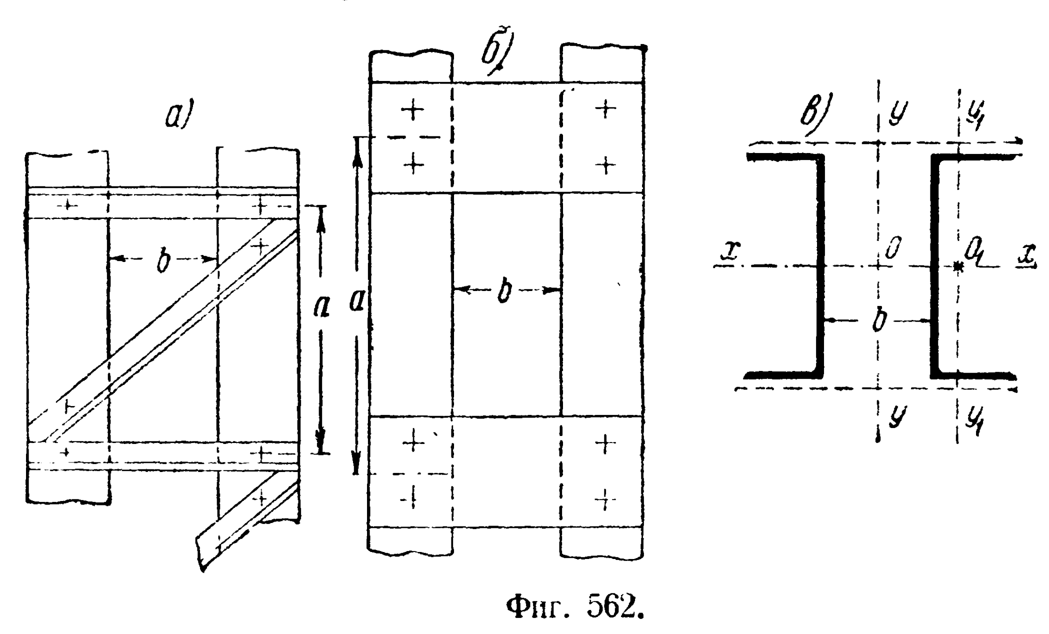
Низший предел толщины стенок такого сечения определяется или возможностью конструктивного выполнения отливки (чугун), или тем, чтобы при работе стержня не произошло *местных* деформаций тонкой стенки — её коробления.



Фиг. 561.

Для предотвращения таких местных повреждений, чтобы обеспечить при работе стержня сохранение принятой формы сечения (кольцо), внутри трубчатого стержня располагают систему усилений, например, на некотором расстоянии друг от друга ставят так называемые диафрагмы, придающие жёсткость тонкостенному профилю (фиг. 561, *б*). Вообще при правильном конструировании сжатых стержней устройство дополнительных креплений играет весьма большую роль.

Некоторые виды сечений, прекрасно сопротивляющиеся изгибу в одной плоскости, как это бывает при работе балок, оказываются очень невыгодными при применении их для сжатых стержней; такими, например, являются двутавровое сечение, сечение из двух швеллеров, стенки которых примкнуты вплотную одна к другой (фиг. 561, *в*).



Фиг. 562.

Невыгодность подобных сечений при работе на продольный изгиб обусловливается большой разницей в величинах их главных моментов инерции. Чтобы избежать этого недостатка, можно раздвинуть обе половинки сечения из двух швеллеров, как это показано на

фиг. 562, *в*; для того чтобы заставить все сечения работать как одно целое, их соединяют при помощи так называемой соединительной решётки (фиг. 562).

Необходимым условием безопасной работы таких составных стержней является устройство достаточно мощного крепления (решётки, планки), чтобы действительно заставить обе половины работать совместно, как один целый стержень; только в этом случае мы будем иметь право вводить в расчёт момент инерции относительно оси $y-y$. Если же два мощных швеллера скрепить очень слабой решёткой, то она не сможет заставить их работать совместно [1]). Каждая половина стержня будет работать самостоятельно, устойчивость её окажется во много раз меньше устойчивости стержня, в котором обе половины представляют собой одно целое.

Недостаточное внимание к устройству надёжных креплений в составных стержнях было причиной серьёзных катастроф (разрушение Квебекского моста в Америке).

При конструировании составного стержня расстояние b, на которое надо раздвинуть обе половины стержня, определяется тем, чтобы моменты инерции относительно обеих главных осей y и z были приблизительно равны. Обычно даже стремятся момент инерции относительно оси, перпендикулярной к плоскости решётки, сделать несколько бо́льшим, так как решётка не может обеспечить совместную работу обеих половин стержня так же хорошо, как если бы сечение представляло собой одно целое.

Б. Что касается выбора материала сжатых стержней, то это обусловливается следующими соображениями. Пока критические напряжения не превосходят предела пропорциональности материала, единственной механической характеристикой, определяющей сопротивляемость стержня потере устойчивости, является модуль упругости E.

Между тем для стержней средней и в особенности малой гибкости величина критических напряжений зависит в значительной степени от предела текучести или предела прочности материала. Этими обстоятельствами и следует руководствоваться при выборе материала для сжатых стержней большой и малой гибкости.

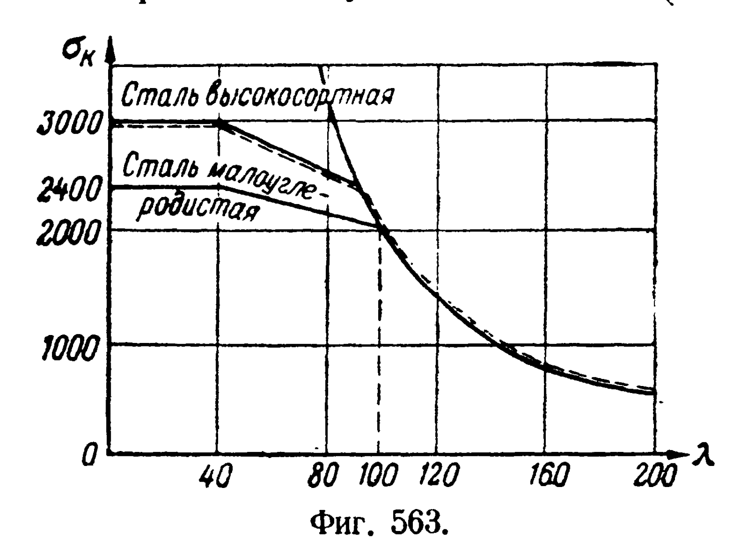
Так, например, применение специальных сортов стали повышенной прочности для тонких и длинных сжатых стержней не имеет смысла, так как модуль E для всех сортов стали примерно один и тот же.

Наоборот, применение высокосортных сталей окажется очень уместным для стержней с критическими напряжениями, превышаю-

---

[1]) Ниже, в § 212 приведены приёмы расчёта и методы определения размеров соединительной решётки и планок.

щими предел пропорциональности, ибо для таких стержней увеличение предела текучести вызовет рост критических напряжений, а стало быть, повысит сопротивление нарушению устойчивости.



Фиг. 563.

На фиг. 563 изображено примерное расположение графиков зависимости $\sigma_к$ от гибкости для малоуглеродистой стали и стали повышенного качества с пределом текучести $\sigma_т = 3000$ *кг/см²*.

Из графиков видно, что критические, а следовательно, и допускаемые напряжения для обоих сортов стали будут одинаковыми для стержней с гибкостью $\lambda > 100$. И, наоборот, они будут существенно отличаться для стержней с меньшими гибкостями.

§ 206. Примеры.

Пример 126. Пустотелая шарнирно-опёртая чугунная колонна длиной $h = 5$ *м*, с наружным диаметром $d = 2r = 45$ *см* должна нести груз $P = 120$ *т*. Найти необходимую толщину t стенок колонны при основном допускаемом напряжении $[\sigma] = 1000$ *кг/см²*.

Пользуемся следующими приближёнными выражениями для момента инерции и площади трубчатого сечения (см. § 93):

$$J = \pi r_0^3 t; \quad F = 2\pi r_0 t,$$

где r_0 — средний радиус стенки:

$$r_0 = r - \frac{t}{2}.$$

Радиус инерции будет равен:

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{\pi r_0^3 t}{2\pi r_0 t}} = \frac{r_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ r_0.$$

Полагаем в первом приближении $r_0 \approx r = 20$ *см*. Тогда $i = 14{,}1$ *см* и гибкость будет равна

$$\frac{h}{i} = \frac{500}{14{,}1} = 35;$$

соответствующее значение φ равно (таблица 32):

$$\varphi = \frac{0{,}81 + 0{,}69}{2} = 0{,}75.$$

Площадь сечения колонны определяется условием

$$F \leqslant \frac{P}{\varphi[\sigma]} \quad \text{или} \quad F = 2\pi r_0 t = \frac{P}{\varphi[\sigma]},$$

отсюда

$$t=\frac{P}{2\pi r_0\,\varphi\,[\sigma]}=\frac{120\,000}{2\pi\cdot 20\cdot 0{,}75\cdot 1000}=1{,}27\ см\approx 1{,}3\ см.$$

Проводим вторично расчёт, полагая $r_0=20-\frac{1{,}3}{2}=19{,}35$ *см*. Радиус инерции $i=0{,}707\cdot 19{,}35=13{,}7$ *см*; гибкость равна $\frac{h}{i}=\frac{500}{13{,}7}=37$ и $\varphi=0{,}72$; толщина t определится формулой

$$t=\frac{P}{2\pi r_0\varphi\,[\sigma]}=\frac{120\,000}{2\pi\cdot 19{,}35\cdot 0{,}72\cdot 1000}=1{,}37\ см\approx 1{,}4\ см.$$

Дальнейшие пересчёты излишни; минимальная толщина стенок колонны должна быть принята 14 *мм*.

Пример 127. Стержень фермы из двух равнобоких уголков (фиг. 564), склёпанных вместе (с прокладками толщиною 10 *мм*), сжат силами $P=32$ *т*; длина стержня $l=3{,}5$ *м*. Считая концы шарнирно опертыми, подобрать размеры уголков при $[\sigma]=1400$ *кг/см²*.

Площадь сечения брутто определяется формулой:

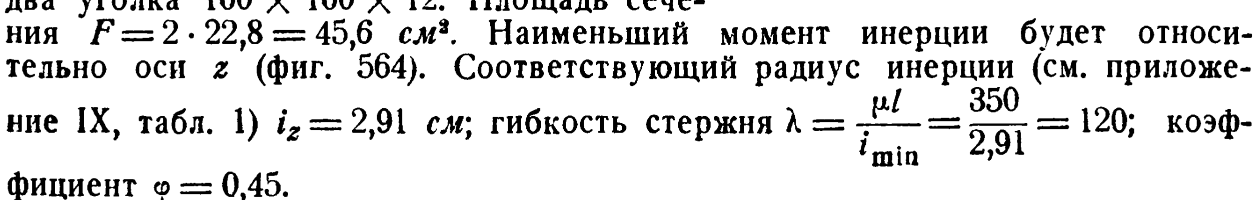
$$F_{бр}\geqslant\frac{P}{\varphi\,[\sigma]}.$$

Принимая для первого приближения $\varphi=0{,}5$, получим:

$$F_{бр}\geqslant\frac{32\,000}{0{,}5\cdot 1400}=45{,}7\ см^2.$$

Фиг. 564.

По сортаменту (ГОСТ 8509—57) подходят два уголка $100\times 100\times 12$. Площадь сечения $F=2\cdot 22{,}8=45{,}6$ *см²*. Наименьший момент инерции будет относительно оси z (фиг. 564). Соответствующий радиус инерции (см. приложение IX, табл. 1) $i_z=2{,}91$ *см*; гибкость стержня $\lambda=\frac{\mu l}{i_{min}}=\frac{350}{2{,}91}=120$; коэффициент $\varphi=0{,}45$.



Расчётное напряжение равно:

$$\sigma_р=\frac{P}{\varphi\cdot F_{бр}}=\frac{32\,000}{0{,}45\cdot 45{,}6}=1560\ кг/см^2>1400.$$

Перенапряжение составляет $\frac{1560-1400}{1400}100=11{,}4\,\%$. Сечение следует увеличить.

Возьмем два уголка $125\times 125\times 8$; $F_{бр}=2\cdot 19{,}7=39{,}4$ *см²*; $i_{min}=3{,}36$ *см*; $\lambda=\frac{350}{3{,}36}=104$; $\varphi=0{,}568$. Расчётное напряжение:

$$\sigma_р=\frac{P}{\varphi F}=\frac{32\,000}{0{,}568\cdot 39{,}4}=1430\ кг/см^2>1400\ кг/см^2.$$

Перенапряжение составляет $\frac{(1430-1400)\cdot 100}{1400}\approx 2\,\%$, что вполне допустимо.

Проверим сечение на прочность, имея в виду, что оно ослабляется двумя заклепочными отверстиями диаметром $d=20$ *мм*.

$$F_{нет}=F_{бр}-2\cdot t\cdot d=39{,}4-2\cdot 0{,}8\cdot 2=36{,}2\ см^2.$$

Действительное напряжение равно:

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{netto}}} = \frac{32\,000}{36{,}2} = 885\ \textit{кг/см}^2 < 1400\ \textit{кг/см}^2.$$

Прочность стержня обеспечена.

Пример 128. Стержень прямоугольного сечения, расположенный большей стороной вертикально, сжат силой $P = 10$ *т*; размер большей вертикальной стороны сечения $h = 8$ *см*; найти второй размер b сечения, считая концы стержня шарнирно-опёртыми при выпучивании в вертикальной плоскости и защемлёнными при выпучивании в горизонтальном направлении ($\mu_1 = 1$; $\mu_2 = 0{,}5$). Влиянием собственного веса пренебречь. Длина $l = 2$ *м*. Основное допускаемое напряжение с учётом динамики $[\sigma] = 700$ *кг/см²*; материал — сталь 5.

Расчётные гибкости стержня будут: при выпучивании в вертикальной плоскости

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1 l}{i_1} = \frac{l}{h/\sqrt{12}},$$

при выпучивании в горизонтальной плоскости

$$\lambda_2 = \frac{\mu_2 l}{i_2} = \frac{0{,}5l}{b/\sqrt{12}}.$$

Если добиваться равноустойчивости стержня в обоих направлениях, то надо, чтобы

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{или} \quad \frac{l}{h} = \frac{0{,}5l}{b};$$

отсюда

$$b = \frac{h}{2} = 4\ \textit{см}.$$

Проверим стержень при этой величине b. Расчётная гибкость

$$\lambda_1 = \frac{l}{i_1} = \frac{200}{8/\sqrt{12}} = \frac{200}{2{,}3} = 87;$$

$\varphi = 0{,}64$; расчётное напряжение $\sigma = \dfrac{10\,000}{0{,}64 \cdot 8 \cdot 4} = 488$ *кг/см²* < 700 *кг/см²*.

Сечение имеет запас; можно уменьшить ширину b примерно до

$$b = 4 \cdot \frac{488}{700} \approx 3\ \textit{см}.$$

Так как при уменьшении b уменьшается не только площадь, но и радиус инерции i_2, в то время как i_1 остаётся без изменений, то решающей будет проверка на выпучивание в горизонтальной плоскости. Радиус инерции равен $i_2 = \dfrac{3}{\sqrt{12}} = 0{,}87$ *см*, а гибкость $\dfrac{100}{0{,}87} = 115$; $\varphi = 0{,}40$; расчётное напряжение $\sigma_p = \dfrac{10\,000}{0{,}40 \cdot 8 \cdot 3} = 1040$ *кг/см²* > 700 *кг/см²*. Ширину b надо увеличить; она будет заключаться между 3 и 4 *см*. Примем $b = 3{,}5$ *см*.

Проверим устойчивость стержня при этом значении b. Радиус инерции $i_2 = \dfrac{3{,}5}{\sqrt{12}} = 1{,}01$ *см*; гибкость равна $\dfrac{100}{1{,}01} \approx 100$; $\varphi = 0{,}51$. Расчётное напряжение равно

$$\sigma_p = \frac{P}{\varphi F} = \frac{10\,000}{0{,}51 \cdot 3{,}5 \cdot 8} = 700\ \textit{кг/см}^2.$$

Сечение подобрано точно.

Пример 129. Сравнить предельные, допускаемые по условиям устойчивости нагрузки (грузоподъёмности) двух стоек, изготовленных каждая из двух швеллеров № 30, с одинаковым основным допускаемым напряжением $[\sigma]=1600$ *кг/см*^{2}; длины стоек $l=4$ *м*; концы стоек шарнирно закреплены; одна из стоек имеет оба швеллера с вплотную поставленными и скреплёнными по всей длине стенками в виде двутавра, а в другой швеллеры расставлены так, что моменты инерции относительно обеих главных осей одинаковы (фиг. 561, *в* и 562, *в*).

Наименьший момент инерции составного сечения в первом (без просвета) случае будет $J_{\min}=J_z=2\,[327+40{,}5\cdot 2{,}52^2]=1168$ *см*^{4} (по сортаменту — см. приложение). Так как $F=2\cdot 40{,}5=81$ *см*^{2}, то

$$i_z=\sqrt{\frac{1168}{81}}=3{,}8 \text{ см}.$$

Гибкость $\lambda_z=\frac{l}{i_z}=\frac{400}{3{,}8}=105{,}3$; ей соответствует $\varphi=0{,}558$. Грузоподъёмность $P_1=F\varphi[\sigma]=81\cdot 0{,}558\cdot 1600=72\,300$ *кг* $=72{,}3$ *т*.

Момент инерции составного сечения во втором (с просветом) случае будет $J_y=J_z=2\cdot 5810=11\,620$ *см*^{4}; $i_y=\sqrt{\frac{11\,620}{81}}\approx 12$ *см*; $\lambda_y=\frac{l}{i_y}=\frac{400}{12}=33{,}3$; $\varphi=0{,}933$. Грузоподъёмность $P_2=F\varphi[\sigma]=81\cdot 0{,}933\cdot 1600=120\,900$ *кг* $=120{,}9$ *т*. Грузоподъёмность во втором случае в 1,67 раза больше, чем в первом.

Совместная работа составного стержня из двух ветвей (два швеллера) будет обеспечена лишь при надежном соединении их с помощью решётки или планок (фиг. 562, *а* и *б*). Расстояния *a* между соединительными элементами должны быть выбраны так, чтобы отдельная ветвь не выпучилась в плоскости наименьшей жёсткости сечения ветви. Это условие будет обеспечено, если гибкость отдельной ветви (в данном случае одного швеллера) на длине *a* будет не больше гибкости всей стойки. Следовательно:

$$\lambda_{\text{ветви}}=\frac{a}{i_{\min}}\leqslant\lambda_{\text{стойки}}.$$

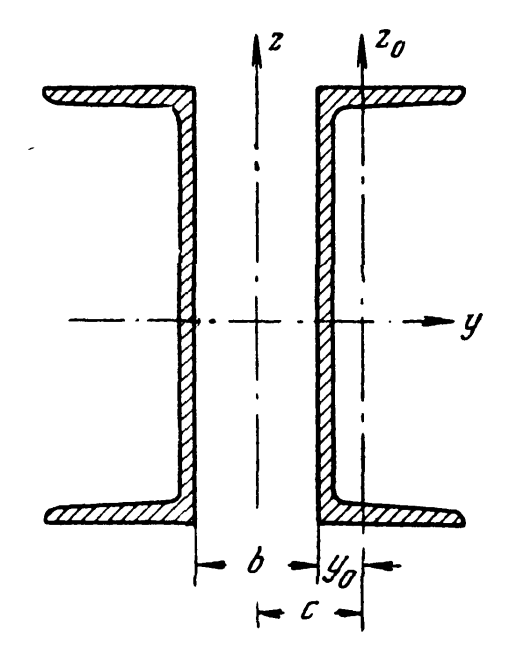
Для одного швеллера наименьший радиус инерции равен $i_{\min}=2{,}84$ *см*. Следовательно:

$$a=\lambda_y i_{\min}=33{,}3\cdot 2{,}84=94{,}6 \text{ см}.$$

Значит, расстояние между соединительными планками должно быть не более 94,6 *см*.

Что касается расстояния *b* между швеллерами в сечении (фиг. 565), то оно найдётся из условия, что $J_z\geqslant J_y$, где

$$J_z=2\,[J_z^0+F_0c^2]\geqslant 2J_y^0.$$



Фиг. 565.

Здесь J_z^0 и J_y^0 — собственные центральные моменты инерции одного швеллера, F_0 — его площадь. Таким образом:

$$c=\sqrt{\frac{J_y^0-J_z^0}{F_0}}=\sqrt{\frac{5810-327}{40{,}5}}=11{,}6 \text{ см}.$$

Так как $b=2\,(c-y_0)$, а по сортаменту $y_0=2{,}52$ *см*, то $b=2\,(11{,}6-2{,}52)=18{,}2$ *см*.

§ 207. Практическое значение проверки на устойчивость.

Для инженера-практика значение проверки на устойчивость громадно. Можно сказать, что почти все значительные катастрофы инженерных сооружений произошли вследствие нарушения устойчивости сжатых элементов сооружений. Хотя с подобными катастрофами инженеры встречаются давно, однако не всегда правильно оценивают их причины. Это показывает, что инженеры-практики часто не вполне ясно представляют себе, какую роль могут играть маловажные, казалось бы, обстоятельства при работе сжатых стержней.

Особая опасность потери устойчивости заключается в том, что обычно она наступает *внезапно*. Почти до наступления критического значения сжимающей силы деформации сооружения не бросаются в глаза и не вызывают опасения. Далее, как уже указывалось, ряд обстоятельств — эксцентриситет нагрузки, начальная кривизна стержня, местные повреждения материала — может весьма значительно понизить сопротивление сжатых стержней, в то время как те же факторы почти не отражаются на работе других элементов конструкции.

Особенно следует обратить внимание на достаточность и тщательность соединения частей сжатого стержня при составных сечениях. Недооценка этого фактора вела к тягчайшим катастрофам — разрушение Квебекского моста, выпучивание сжатых раскосов моста через Мозырь при испытании расчётной нагрузкой [1]) и др.

Современный инженер имеет в своём распоряжении все средства для того, чтобы при внимательном проектировании и тщательном выполнении конструкции подобные аварии были исключены. Теория расчёта при проверке устойчивости, как это показано выше (§§ 201—205), разработана достаточно надёжно.

В несколько особом положении находятся расчёты на устойчивость в машиностроении. Здесь особое значение приобретает вопрос о выборе основного допускаемого напряжения $[\sigma]$. При назначении его величины не следует забывать о том, что такие детали машин, как штоки, шатуны, подвергаются интенсивной динамической нагрузке. Поэтому в формуле для вычисления допускаемого напряжения на устойчивость

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma]$$

под $[\sigma]$ следует подразумевать допускаемое напряжение на прочность при динамической нагрузке (см. следующий отдел — глава XXXVII).

Уже в § 203 указывалось на аналогию между внезапным ростом деформаций при переходе напряжений за предел текучести и столь же внезапным увеличением прогибов при переходе за критическое напряжение. Эта аналогия приводит к мысли, что в статически не-

[1]) Голов А. Д., Деформация раскосов ферм Мозырьского ж.-д. моста, 1925, Киев.

определимых конструкциях появление критических напряжений в сжатом стержне может ещё не вызвать разрушения конструкции, особенно если эти напряжения лежат в пределах упругости.

Подобный случай мы имеем в старых многорешётчатых фермах мостов при работе их под современную более тяжёлую нагрузку. Часть раскосов в таких фермах может оказаться сжатой эйлеровыми критическими силами и находиться в состоянии упругого выпучивания. Работу этих раскосов возьмут на себя встречные растянутые раскосы. По удалении нагрузки конструкция вернётся к первоначальному виду.

Такие же случаи имеют место в самолётостроении и судостроении, где приходится иметь дело с потерей устойчивости не только стержней, но и балок, пластинок и оболочек. Таким образом, на практике могут быть исключительные случаи, когда можно допустить в сжатом элементе критические напряжения, если они не превышают предела упругости при условии, что конструкция статически неопределима, и работу выбывшего из строя элемента возьмут на себя другие части.

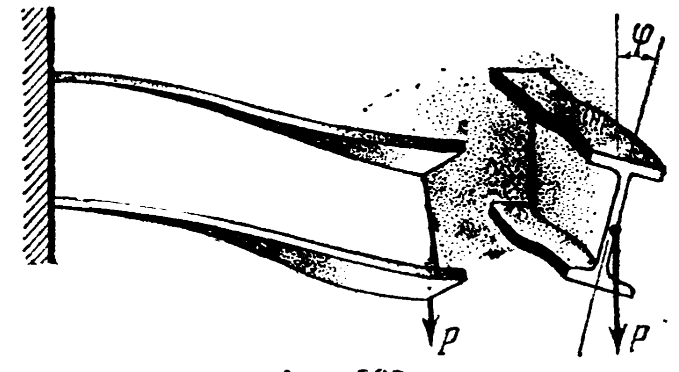
Ниже мы рассмотрим некоторые более сложные задачи проверки элементов конструкций на устойчивость.

ГЛАВА XXXIV.

БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ ВОПРОСЫ ПРОВЕРКИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ.

§ 208. Устойчивость плоской формы изгиба балок.

С явлением потери устойчивости мы встречаемся на практике не только в случае простого сжатия стержней. Потерять устойчивость заданной формы равновесия может и балка, работающая на изгиб, например двутаврового сечения (фиг. 566).



Фиг. 566.

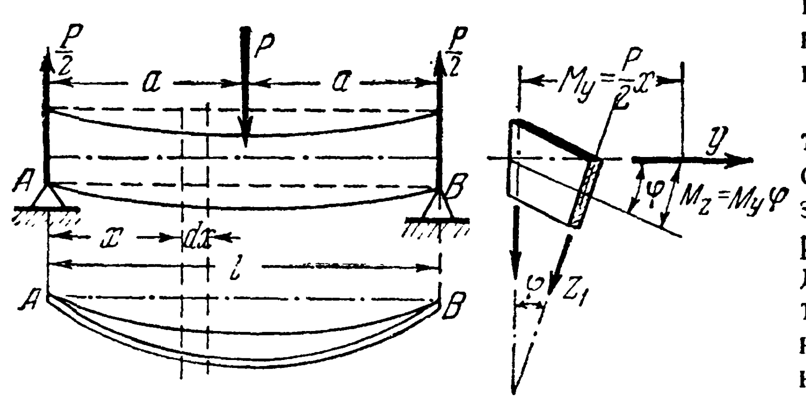
Нижний пояс такой балки представляет собой стержень, сжатый продольным усилием и прикреплённый к стенке балки. Это прикрепление не позволяет поясу выпучиться в плоскости стенки; но возможно такое соотношение размеров балки, при котором сжатый пояс сможет выпучиться в сторону, что влечёт за собой повороты сечений и скручивание балки (фиг. 566). Вместо работы на изгиб в плоскости наибольшей жёсткости, как это было назначено конструктором, балка в целом ряде сечений начнёт работать на *косой изгиб*, что

вызовет резкий рост деформаций, а в дальнейшем — полное разрушение конструкции.

Устойчивость балки зависит от размеров поперечного сечения и от её свободной длины. Поэтому на практике ограничивают эту длину, устраивая связи между балками. Недостаточное внимание к этим боковым креплениям при длинных одиночных балках даже малой высоты может повести к серьёзным катастрофам (например, обрушение моста близ Тарба во Франции).

Потеря устойчивости может грозить и сжатым тонким пластинкам, т. е. тем элементам конструкции, у которых один размер мал по сравнению с другими. Так может покоробиться тонкий и широкий лист сжатого пояса двутавровой балки, может выпучиться недостаточно укреплённая уголками жёсткости стенка и др.

Приведём приближённое определение величины критического груза для балки, при котором плоская форма изгиба становится неустойчивой и дальнейшее увеличение которого ведёт к разрушению балки за счёт бокового выпучивания. Рассмотрим балку на двух опорах с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника (фиг. 567) под действием поперечной силы P.



Фиг. 567.

Пусть сила достигла критического значения и балка слегка выпучилась вбок, как это показано в плане и в разрезе на фиг. 567; не уходят из начальной плоскости только концы балки A и B, надлежащим образом закреплённые.

С появлением боковых деформаций потенциальная энергия балки должна возрастать за счёт деформации изгиба в боковом направлении и деформации кручения (энергию деформации изгиба в вертикальной плоскости можно считать неизменной). Одновременно с этим потенциальная энергия груза уменьшается вследствие опускания точки его приложения.

Обозначим потенциальную энергию бокового изгиба U_1, кручения U_2 и работу при дополнительном опускании груза за счёт бокового выпучивания балки U_p. Так как при действии критической силы переход от плоской формы изгиба к боковому выпучиванию сопровождается переходом энергии груза в потенциальную энергию деформации балки, то можем считать, что

$$U_1 + U_2 = U_p. \qquad (34.1)$$

Потенциальная энергия бокового изгиба (относительно оси z_1) равна

$$U_1 = \int\limits_l \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ_z};$$

здесь изгибающий момент в произвольном сечении, взятом в расстоянии x от левой опоры, будет (по малости угла поворота сечения φ):

$$M(x) = \frac{P}{2}x \cdot \sin\varphi \approx \frac{P}{2} \cdot x \cdot \varphi.$$

Подставляя значение изгибающего момента, получим:

$$U_1 = \frac{P^2}{8EJ_z} \cdot \int\limits_l x^2\varphi^2\,dx = \frac{P^2}{4EJ_z} \cdot \int\limits_0^{\frac{l}{2}} x^2\varphi^2\,dx. \tag{34.2}$$

Потенциальную энергию кручения также выразим через угол φ. Работа крутящего момента на длине dx будет:

$$dU_2 = \frac{M_к\,d\varphi}{2}, \quad \text{где} \quad d\varphi = \frac{M_к dx}{GJ_к}.$$

Имея в виду, что

$$M_к = GJ_к\frac{d\varphi}{dx}, \quad \text{а} \quad d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}\cdot dx,$$

получим:

$$dU_2 = \frac{GJ_к}{2}\cdot\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dx}\,dx = \frac{GJ_к}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx.$$

Потенциальная энергия кручения, накопленная при боковом выпучивании балки, равна:

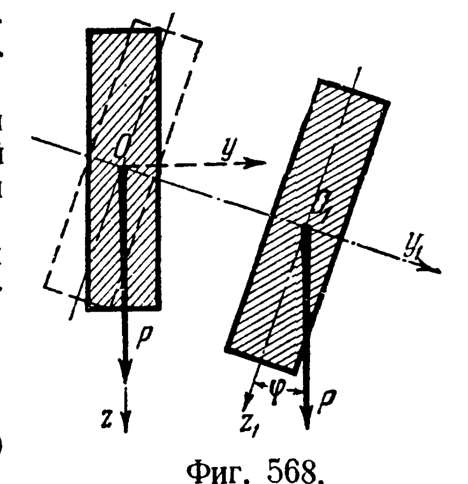
$$U_2 = \frac{GJ_к}{2}\int\limits_l \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx = GJ_к\int\limits_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx. \tag{34.3}$$

Чтобы найти работу, совершаемую грузом P при его опускании, найдём вертикальное перемещение точки его приложения (фиг. 568). Заметим при этом, что смещение точки O в положение O_1 вызывается совокупностью двух причин: поворотом сечения вокруг точки O на угол φ и боковым перемещением в направлении оси Oy_1.

Так как при повороте сечения опускания точки O не происходит, то, очевидно, причиной опускания точки приложения силы P является боковой изгиб балки из плоскости xOz.

Величину вертикального перемещения точки O найдём по теореме Кастильяно из выражения (34.2):

$$\delta = \frac{\partial U_1}{\partial P} = \frac{P}{2EJ_z}\cdot\int\limits_0^{\frac{l}{2}} x^2\varphi^2\,dx. \tag{34.4}$$



Фиг. 568.

Отсюда работа силы P (достигшей в момент начавшегося бокового перемещения значения $P_к$) на перемещении δ будет:

$$U_p = P\delta = \frac{P^2}{2EJ_z}\int\limits_0^{\frac{l}{2}} x^2\varphi^2\,dx.$$

Подставляя теперь значения U_1, U_2 и U_p в исходное уравнение (34.1), получим:

$$\frac{P^2}{4EJ_z}\int_0^{\frac{l}{2}} x^2\varphi^2\,dx + GJ_к\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx = \frac{P^2}{2EJ_z}\int_0^{\frac{l}{2}} x^2\varphi^2\,dx,$$

откуда

$$\frac{P^2}{4EJ_z}\int_0^{\frac{l}{2}} x^2\varphi^2\,dx = GJ_к\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx.$$

Обозначая жёсткость при изгибе $EJ_z = C_1$, а при кручении $GJ_к = C_2$, получим для критического значения P:

$$P_к^2 = 4C_1C_2\frac{\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^{\frac{l}{2}} x^2\varphi^2\,dx}. \tag{34.5}$$

Под интегралами — две переменных φ и x, связанных между собой, так как углы поворота сечений φ изменяются по длине x, т. е. $\varphi=\varphi(x)$. Закон изменения φ в зависимости от x нам неизвестен. Пользуясь методами приближённого решения, зададимся для φ каким-либо уравнением, связывающим его с x так, чтобы были удовлетворены условия закрепления концов балки. Положим, например:

$$\varphi = k\cdot\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{34.6}$$

При $x=0$ $\varphi=0$, при $x=l/2$ $\varphi=\varphi_{max}$ и при $x=l$ $\varphi=0$. Таким образом, эта функция обращается в нуль на опорах (где углы поворота сечений равны нулю по условиям закрепления) и достигает максимума посредине пролёта, т. е. удовлетворяет условиям деформации нашей балки.

Подставляя значение φ и её производной под знаки интегралов в уравнение (34.5), получим:

$$P_к^2 = 4C_1C_2\cdot\frac{k^2\pi^2\int_0^{\frac{l}{2}}\cos^2\frac{\pi x}{l}\,dx}{k^2l^2\int_0^{\frac{l}{2}} x^2\sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx}$$

Проинтегрировав, найдём:

$$P_к = \frac{17{,}2}{l^2}\sqrt{C_1C_2}. \tag{34.7}$$

Точное значение критической силы для балки на двух опорах с прямоугольным поперечным сечением (фиг. 567) [1]) выражается формулой:

$$P_к = \frac{16{,}93}{l^2}\sqrt{C_1C_2}.$$

---

[1]) Тимошенко, Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1946.

Ошибка приближённого решения составляет около 1,5%. Величина критической силы зависит от произведения жёсткости при боковом изгибе балки $C_1 = EJ_z$ и жёсткости при кручении $C_2 = GJ_к$.

Если нагрузка равномерно распределена по длине осевой линии, то её критическое значение равно

$$(ql)_к = \frac{28{,}3}{l^2} \sqrt{C_1 C_2}. \qquad (34.8)$$

Для консоли длиной l, загружённой по длине равномерно распределённой нагрузкой, получим:

$$(ql)_к = \frac{12{,}85}{l^2} \sqrt{C_1 C_2}. \qquad (34.9)$$

Для консоли, несущей груз, приложенный к оси балки на свободном конце:

$$P_к = \frac{4{,}01}{l^2} \sqrt{C_1 C_2}. \qquad (34.10)$$

В случае двутавровой балки формулы для критических нагрузок имеют такой же вид, как и для прямоугольного сечения с той разницей, что числовой коэффициент при $\sqrt{C_1 C_2}$ не является постоянной величиной, а зависит от сопротивления полок боковому изгибу и определяется отношением

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{l}{h}\right)^2.$$

Здесь h — высота двутавра.

Таким образом, для двутавровой балки

$$P_к = \frac{\beta}{l^2} \sqrt{C_1 C_2}, \qquad (34.11)$$

где β определяется для каждого значения α. Значения коэффициентов β определены для разных видов нагрузки и приведены ниже в таблице 33.

Таблица 33. **Значения β в формуле (34.11).**

$\alpha = \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{l}{h}\right)^2$	β_1	β_2	β_3	$\alpha = \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{l}{h}\right)^2$	β_1	β_2	β_3
1	2	3	4	1	2	3	4
0,1	31,6	86,4	143,0	16	5,08	18,3	30,5
1,0	9,76	31,9	53,0	20	—	18,1	30,1
2,0	8,03	25,6	42,6	32	—	17,9	29,4
4,0	6,73	21,8	36,3	50	—	17,5	29,0
6,0	6,19	20,3	33,8	70	—	17,4	28,8
8,0	5,87	19,6	32,6	90	4,04	17,2	28,6
12,0	5,36	18,8	31,5	100	4,04	17,2	28,6

в графе 2 — для консоли, нагружённой силой на конце;
» » 3 — » балки на двух опорах с силой посредине;
» » 4 — » » » » » равномерно нагружённой.

Как видно из таблицы, значения коэффициента β, по мере увеличения отношения $\frac{l}{h}$, приближаются к значениям коэффициентов для балки прямоугольного сечения. Для $\alpha = 100$, β почти точно совпадает с числовыми коэффициентами для прямоугольных балок.

Для расчёта на устойчивость плоской формы изгиба необходимо, чтобы возникающие при изгибе нормальные напряжения не превышали допускаемых напряжений на устойчивость, равных $[\sigma_у] = \frac{\sigma_к}{k_у}$, где $k_у$ — коэффициент запаса.

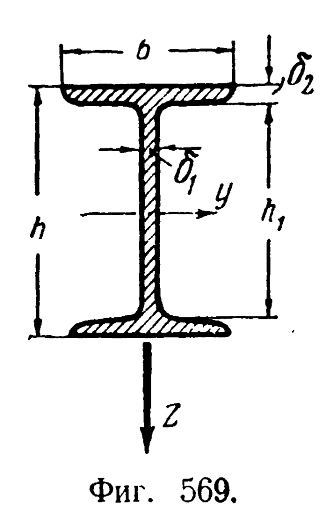
Зная величину критической нагрузки для каждого случая загружения балки, мы легко можем определить величину критических напряжений:

$$\sigma_к = \frac{M^к_{max}}{W_y},$$

где $M^к_{max}$ — наибольший изгибающий момент от критической нагрузки, а W_y — момент сопротивления сечения изгибу в плоскости стенки.

Полученные результаты справедливы лишь при условии, что критические напряжения при выпучивании балок не превосходят предела пропорциональности материала.

Если $\sigma_к > \sigma_п$, то выведенные формулы будут давать преувеличенные значения критических напряжений, как и формулы Эйлера для сжатых стержней малой гибкости. Для нахождения действительных критических напряжений при выпучивании балок, когда $\sigma_к > \sigma_п$, следует руководствоваться опытными данными. Можно воспользоваться, по предложению проф. Ф. Ясинского, аналогией со стержнями и полагать, что действительные напряжения находятся в том же отношении с определёнными по формулам этого параграфа, в каком находятся действительные с эйлеровыми при $\sigma_к > \sigma_п$ для сжатых колонн.



Фиг. 569.

Пример 130. Балка двутаврового профиля № 60 (ГОСТ 8239—56) пролётом $l = 6$ *м*, лежащая на двух опорах, загружена равномерно распределённой нагрузкой $q = 9$ *т/м*. Проверить прочность балки и устойчивость плоской формы изгиба при основном допускаемом напряжении $[\sigma] = 1600$ *кг/см²* и коэффициенте запаса на прочность и устойчивость $k = 1{,}7$.

Размеры сечения по сортаменту (фиг. 569) и геометрические характеристики профиля равны:

$$h = 60\ см; \qquad b = 19\ см;$$
$$\delta_1 = 1{,}1\ см; \qquad \delta_2 = 1{,}8\ см; \qquad h_1 = 56{,}4\ см;$$
$$J_y = 75\,450\ см^4; \qquad J_z = 1720\ см^4;$$
$$W_y = 2510\ см^3; \qquad J_к = 118\ см^4.$$

Момент инерции при кручении $J_к$ подсчитан по формуле (11.36) $J_к = \eta \frac{1}{3} \sum h\delta^3$, где для двутавра $\eta = 1{,}2$. Следовательно:

$$J_к = \frac{1{,}2}{3}(h_1\delta_1^3 + 2b\delta_2^3) = 0{,}4\,(56{,}4 \cdot 1{,}1^3 + 2 \cdot 19 \cdot 1{,}8^3) = 118\ см^4.$$

а) *Проверка на прочность.*

$$M_{\max} = \frac{gl^2}{8} = \frac{9 \cdot 6^2}{8} = 40{,}5 \textit{ тм} = 405 \cdot 10^4 \textit{ кгсм},$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{405 \cdot 10^4}{2510} = 1615 \textit{ кг/см}^2 \approx 1600 \textit{ кг/см}^2.$$

Однако прочность балки можно считать обеспеченной лишь при условии, что при изгибе не произойдёт бокового выпучивания.

б) *Проверка на устойчивость плоской формы изгиба.*

Для проверки на устойчивость воспользуемся формулой (34.11). Критическая нагрузка:

$$Q_к = (ql)_к = \frac{\beta}{l^2} \sqrt{C_1 C_2},$$

где β — коэффициент, зависящий от отношения жёсткостей и от l/h; $C_1 = EJ_z$; $C_2 = GJ_k$.

Принимая величину модуля упругости для стали $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, а модуля сдвига

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{E}{2{,}6},$$

получим:

$$Q_к = (ql)_к = \frac{\beta}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_z EJ_к}{2{,}6}} = \frac{\beta E}{l^2} \sqrt{\frac{1720 \cdot 118}{2{,}6}} = \frac{\beta E}{l^2} \cdot 279.$$

Для определения коэффициента β найдём отношение

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{l}{h}\right)^2 = \frac{GJ_к}{EJ_z} \cdot \left(\frac{l}{h}\right)^2 = \frac{118}{2{,}6 \cdot 1720}\left(\frac{600}{60}\right)^2 = 2{,}64.$$

По таблице 33 (столбец 4) находим величину $\beta = 40{,}5$ (по интерполяции между значениями $\alpha = 2$ и $\alpha = 4$). Следовательно, критическая, т. е. наименьшая, нагрузка для данной балки, при которой становится возможным боковое её выпучивание, равна:

$$Q_к = (ql)_к = 279\beta \frac{E}{l^2} = \frac{279 \cdot 40{,}5 \cdot 2 \cdot 10^6}{600^2} = 62\,600 \textit{ кг}.$$

Допускаемая нагрузка (при коэффициенте запаса $k = 1{,}7$)

$$Q = \frac{Q_к}{k} = \frac{62\,600}{1{,}7} = 36\,800 \textit{ кг}.$$

Значит, по условию устойчивости допускаемая интенсивность нагрузки

$$q = \frac{Q}{l} = \frac{36\,800}{6{,}0} = 6150 \textit{ кг/м} = 6{,}15 \textit{ т/м}.$$

Таким образом, надежная работа балки может быть обеспечена лишь при условии уменьшения заданной нагрузки 9 *т/м* примерно в полтора раза, либо при условии постановки поперечных связей, препятствующих боковому выпучиванию балки (если это по конструкции возможно).

Выясним, как изменится величина критической нагрузки при закреплении середины пролёта с помощью поперечной связи. Это равносильно уменьшению свободной длины балки вдвое, что приводит к изменению

коэффициентов α и β:

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{0,5l}{h}\right)^2 = \frac{GJ_к}{EJ_z}\cdot 0,25\left(\frac{l}{h}\right)^2 = \frac{118\cdot 0,25}{2,6\cdot 1720}\left(\frac{600}{60}\right)^2 = 0,66.$$

$\beta = 59$ (графическая интерполяция между $\alpha = 0,1$ и $\alpha = 1,0$). Критическая нагрузка

$$Q_к = \beta\frac{E}{(0,5l)^2}\sqrt{C_1C_2} = \frac{59\cdot 2\cdot 10^6}{300^2}\cdot 279 = 365\,000 \text{ кг}.$$

Это соответствует критическим напряжениям:

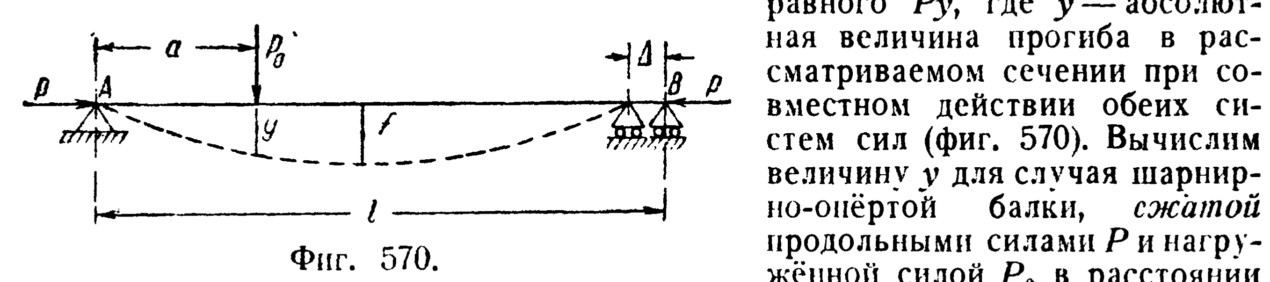
$$\sigma_к = \frac{Q_к l}{8W_y} = \frac{365\,000\cdot 600}{8\cdot 2510} = 10\,800 \text{ кг/см}^2.$$

Полученное значение $\sigma_к$ значительно выше предела пропорциональности материала, вследствие чего формула (33.11) уже неприменима. Найденному значению $\sigma_к$ в действительности соответствует предел текучести материала. Значит, в этом случае достаточно ограничиться проверкой на прочность.

§ 209. Проверка прочности стержней на совместное действие продольных и поперечных сил (с учётом деформаций).

Пользуясь приближённым методом определения прогибов (§ 134), мы можем закончить начатое в § 161 рассмотрение сопротивления прямого стержня действию поперечных нагрузок и продольных сил [1]).

В этом случае изгибающий момент в каждом сечении балки будет составляться из момента от поперечных нагрузок M_0 и момента от продольных сил P, равного Py, где y — абсолютная величина прогиба в рассматриваемом сечении при совместном действии обеих систем сил (фиг. 570). Вычислим величину y для случая шарнирно-опёртой балки, *сжатой* продольными силами P и нагружённой силой P_0 в расстоянии a от левой опоры (фиг. 570).



Фиг. 570.

Под действием постепенно возрастающих сил P и P_0 балка AB изгибается, и точки A и B сближаются на величину Δ.

Применим приближённый метод и примем кривую изогнутой оси за синусоиду, уравнение которой удовлетворяет условиям закрепления концов балки

$$y = f\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Тогда потенциальная энергия изгиба балки будет равна

$$U = \frac{EJ}{2}\int_0^l (y'')^2 dx = \frac{\pi^4 EJ}{4l^3}f^2. \tag{34.12}$$

---

[1]) Эта задача впервые была решена профессором И. Г. Бубновым.

Сближение концов балки Δ равно разности между длиной изогнутой оси и хорды, или $\Delta = \int_0^l (ds - dx)$. Имея в виду, что $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}$ или, приближённо, $ds = dx\left[1 + \frac{1}{2}(y')^2\right]$, получим для Δ:

$$\Delta = \int_0^l \left\{dx\left[1 + \frac{1}{2}(y')^2\right] - dx\right\} = \frac{1}{2}\int_0^l (y')^2\,dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l}. \qquad (34.13)$$

Дадим балке дополнительный прогиб так, чтобы середина её получила бесконечно малое перемещение df. Тогда точка приложения силы P_0 получит добавочное перемещение $dy = df \sin\frac{\pi x}{l}$, или при $x = a$ $dy = df \sin\frac{\pi a}{l}$. Точка же приложения силы P переместится на $d\Delta = \frac{\pi^2 f}{2l}df$.

Потенциальная энергия изгиба балки при этом увеличится на

$$dU = \frac{\pi^4 EJ}{2l^3} f\,df,$$

а энергия грузов уменьшится на величину:

$$dU_P = dA_p = P_0 dy + P \cdot d\Delta;$$

или

$$dU_P = P_0 \sin\frac{\pi a}{l}\,df + P\frac{\pi^2 f}{2l}\,df;$$

так как $dU = dU_P$, то

$$\frac{\pi^4 EJf}{2l^3} = P_0 \sin\frac{\pi a}{l} + P\frac{\pi^2 f}{2l}. \qquad (34.14)$$

Отсюда величина f может быть выражена так:

$$f = \frac{2P_0 l \sin\frac{\pi a}{l}}{\pi^2\left(\frac{\pi^2 EJ}{l^2} - P\right)}.$$

Обозначив $\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_к$, получим:

$$f = \frac{2P_0 l^3 \sin\frac{\pi a}{l}}{\pi^4 EJ\left(1 - \frac{P}{P_к}\right)}. \qquad (34.15)$$

При отсутствии продольной силы ($P = 0$) величина прогиба посредине пролёта была бы равна:

$$f = \frac{2P_0 l^3 \sin\frac{\pi a}{l}}{\pi^4 EJ}.$$

В частном случае, когда сила P_0 приложена посредине пролёта, т. е. при $a=\frac{l}{2}$ и $P=0$, получаем:

$$f_0=\frac{2P_0l^3}{\pi^4EJ}=\frac{P_0l^3}{48{,}7EJ},$$

что мало отличается от точного значения прогиба. При *совместном* же действии сил P_0 и P находим:

$$f=\frac{f_0}{1-\frac{P}{P_к}}$$

и

$$y=\frac{f_0\sin\frac{\pi x}{l}}{1-\frac{P}{P_к}}=\frac{y_0}{1-\frac{P}{P_к}}=Cy_0, \tag{34.16}$$

где y_0 — прогиб от поперечной нагрузки; таким образом, продольные сжимающие силы вызывают увеличение прогибов, учитываемое множителем

$$C=\frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}. \tag{34.17}$$

Формула (34.17) показывает, что если сжимающая сила P достигает критического значения, то прогиб теоретически становится бесконечно большим.

Полученный выше (формула 34.15) результат можно распространить на случай равномерно распределённой по всему пролёту нагрузки q; заменяя её элементарными грузами $q\,da$, подставляя эту величину вместо P_0 в формулу (34.15) и интегрируя по a от 0 до l, получим f для случая сплошной равномерно распределённой нагрузки и сжимающих сил P (фиг. 423) равный

$$y=\int_0^l\frac{q\,da\sin\frac{\pi a}{l}\,l^3}{EJ\frac{\pi^4}{2}\left[1-\frac{P}{P_к}\right]}=\frac{ql^4}{EJ\frac{\pi^5}{4}\left[1-\frac{P}{P_к}\right]}. \tag{34.18}$$

При отсутствии продольных сил P прогиб посредине пролёта был бы равен

$$f_0=\frac{ql^4}{EJ\frac{\pi^5}{4}}\approx\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ};$$

значит, и в этом случае при совместном действии q и P

$$y=\frac{f_0\sin\frac{\pi x}{l}}{1-\frac{P}{P_к}}=\frac{y_0}{1-\frac{P}{P_к}}=Cy_0.$$

Таким образом, для шарнирно-опёртой балки прогибы при *совместном* действии поперечных нагрузок и сжимающих продольных сил P равны прогибам от одних поперечных сил, умноженным на

$$C = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_к}};$$

этот множитель C отражает влияние продольных сил.

Теперь можно произвести вычисление изгибающего момента для рассматриваемых случаев нагрузки балки. Для стержня с шарнирно-опёртыми концами под действием сжимающих сил P и поперечной равномерно распределённой нагрузки q наибольший изгибающий момент будет посредине пролёта и достигнет величины

$$M_{max} = M_0 + Pf = \frac{ql^2}{8} + Pf;$$

так как

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{P}{P_к}} = \frac{5\,ql^4}{384\,EJ}\,\frac{1}{1 - \frac{P}{P_к}},$$

то

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} + P\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}\,\frac{1}{1 - \frac{P}{P_к}} = \frac{ql^2}{8}\left(1 + \frac{1{,}028\,\frac{P}{P_к}}{1 - \frac{P}{P_к}}\right).$$

Наибольшее напряжение будет в крайних волокнах балки; оно складывается из напряжений сжатия и изгиба:

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{F} - \frac{M_{max}}{W};$$

отбрасывая знак минус, обозначающий сжатие, и подставляя вместо M_{max} его значение, получаем:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{ql^2}{8W}\left(1 + \frac{1{,}028\,\frac{P}{P_к}}{1 - \frac{P}{P_к}}\right); \tag{34.19}$$

при практических расчётах, конечно, можно положить $1{,}028 \approx 1{,}00$.

Как видно из этой формулы, напряжения в рассматриваемом случае не пропорциональны внешним силам, а растут *быстрее* их. При увеличении нагрузок P и q, например в два раза, дробь $\frac{ql^2}{8W}$, сама увеличившись вдвое, будет умножаться ещё на возросший множитель в скобках. Таким образом, полная величина напряжения возрастёт *более* чем вдвое. Это требует перехода от проверки прочности по допускаемым напряжениям к расчёту по допускаемым нагрузкам.

В самом деле, условие прочности по допускаемым напряжениям имеет вид:

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma],$$

где $[\sigma]=\frac{\sigma_0}{k}$; здесь $\sigma_0=\sigma_т$ для пластичного состояния материала и $\sigma_0=\sigma_в$ — для хрупкого.

Это условие обеспечивает коэффициент запаса k для наибольших напряжений, вызванных действующей на стержень нагрузкой, по отношению к их опасному значению $\sigma_т$ или $\sigma_в$; чтобы получить это опасное состояние материала, необходимо увеличение действующих в стержне напряжений в k раз. Но для этого в рассматриваемом случае потребуется увеличение нагрузки меньше, чем в k раз. Значит, коэффициент запаса для действующей нагрузки по отношению к предельной, вызывающей опасное состояние, будет меньше чем k, а значит, расчёт по допускаемым напряжениям в рассматриваемом случае не сможет обеспечить нам принятого коэффициента запаса k для грузоподъёмности всего стержня в целом. Чтобы достигнуть этого, необходимо перейти к расчёту по допускаемым нагрузкам. В этом случае, как известно, условие прочности имеет вид

$$Q \leqslant Q_{доп}=\frac{Q_т}{k},$$

где Q — нагрузка конструкции; $Q_т$ — предельная нагрузка, соответствующая опасному состоянию конструкции.

Для стержней из хрупких материалов опасное состояние будет соответствовать достижению наибольшим напряжением опасной величины $\sigma_0=\sigma_в$; что же касается стержней из пластичных материалов, то можно было бы считать, что опасным состоянием для них, как и при простом изгибе, будет распространение текучести материала на всё сечение. Однако опыты и теоретические исследования показывают, что при таком распространении пластических деформаций грузоподъёмность стержня, работающего на изгиб и сжатие, падает; поэтому более осторожно и при применении пластичных материалов опасным состоянием стержня считать также достижение наибольшим напряжением опасной величины $\sigma_0=\sigma_т$.

Таким образом, предельные нагрузки $P_т$ и $q_т$ определяются формулой

$$\frac{P_т}{F}+\frac{q_т l^2}{8W}\left(1+\frac{1{,}028\frac{P_т}{P_к}}{1-\frac{P_т}{P_к}}\right)=\sigma_0. \tag{34.20}$$

Допускаемые нагрузки $[P]$ и $[q]$ будут в k раз меньше предельных:

$$[P]=\frac{P_т}{k} \quad \text{и} \quad [q]=\frac{q_т}{k},$$

или

$$P_т=[P]k \quad \text{и} \quad q_т=[q]k;$$

подставляя эти величины в формулу (34.20) и учитывая, что $\sigma_0=k[\sigma]$, получаем:

$$\frac{k[P]}{F}+\frac{k[q]l^2}{8W}\left(1+\frac{1{,}028\frac{k[P]}{P_к}}{1-\frac{k[P]}{P_к}}\right)=k[\sigma];$$

сокращаем обе части на k:

$$\frac{[P]}{F}+\frac{[q]\,l^2}{8W}\left(1+\frac{1{,}028\,\frac{k[P]}{P_к}}{1-\frac{k[P]}{P_к}}\right)=[\sigma].$$

Так как действительные нагрузки P и q должны удовлетворять условиям

$$P\leqslant[P] \quad \text{и} \quad q\leqslant[q],$$

то условие прочности для рассматриваемого стержня будет иметь вид:

$$\frac{P}{F}+\frac{ql^2}{8W}\left(1+\frac{1{,}028\,\frac{kP}{P_к}}{1-\frac{kP}{P_к}}\right)\leqslant[\sigma]. \qquad (34.21)$$

При применении формулы (34.21) надо иметь в виду, что величина $P_к$ вошла в наш расчёт *формально,* как замена дроби $\frac{\pi^2EJ}{l^2}$; жёсткость же EJ появилась здесь из формулы для вычисления потенциальной энергии при изгибе.

Таким образом, во всех этих вычислениях момент инерции J представляет собой *не наименьший* центральный момент инерции сечения, как это было при проверке устойчивости, а момент инерции относительно нейтральной оси z при изгибе балки поперечной нагрузкой. Так как при изгибе выгодно располагать сечение балки так, чтобы нейтральной осью была ось с *наибольшим моментом* инерции, то при вычислении $P_к$ в формуле (34.21) обычно именно этот момент инерции и следует принимать в расчёт. Зная величину J_z, мы можем вычислить $P_к$ по формуле

$$P_к=\frac{\pi^2EJ_z}{l^2},$$

где J_z — момент инерции сечения относительно нейтральной оси z.

При помощи формулы (34.21) мы произвели проверку стержня на *прочность;* эта проверка должна быть дополнена проверкой на устойчивость, тем более, что искривление стержня под действием поперечных нагрузок обычно происходит в плоскости не наименьшей, а наибольшей жёсткости. Поэтому стержню угрожает выпучивание, потеря устойчивости в боковом направлении. Значит, *обычная проверка* такого стержня на устойчивость под действием только сил P и проверка устойчивости плоской формы изгиба (§ 208) обязательны.

Если бы на балку пролётом l, шарнирно-опёртую по концам, действовала продольная сжимающая сила P и сосредоточенная сила P_0 посредине пролёта, то ход расчёта, подобный изложенному выше, привёл бы нас к следующей формуле для вычисления прогиба посредине пролёта:

$$f=\frac{P_0l^3}{48EJ}\cdot\frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}; \qquad (34.22)$$

наибольший изгибающий момент был бы равен

$$M_{max}=\frac{P_0 l}{4}+P\frac{P_0 l^3}{48EJ}\frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}=\frac{P_0 l}{4}\left(1+\frac{0{,}822\frac{P}{P_к}}{1-\frac{P}{P_к}}\right).$$

Дальнейший расчёт ясен.

Для балок с шарнирно-опёртыми концами изложенный здесь приём может быть распространён на любые комбинации поперечных нагрузок; если эти силы действуют в одном направлении, то можно с достаточной точностью считать, что наибольший прогиб будет посредине пролёта. Подобные же вычисления применимы и для балок, защемлённых одним концом.

Если продольные силы будут не сжимающими, а растягивающими, то знак перед P придётся изменить на обратный. Тогда, например для балки на двух опорах с равномерно распределённой нагрузкой, условие прочности будет иметь вид:

$$\frac{P}{F}+\frac{ql^2}{8W}\left(1-\frac{1{,}028\frac{kP}{P_к}}{1+\frac{kP}{P_к}}\right)\leqslant[\sigma]. \qquad (34.23)$$

Влияние продольных растягивающих сил будет уменьшать напряжения от изгиба.

§ 210. Влияние эксцентриситета приложения сжимающей силы и начальной кривизны стержня.

Пользуясь таким же методом, как и в § 209, можно легко учесть влияние начального эксцентриситета силы при продольном сжатии (фиг. 571). (Влиянием собственного веса пренебрегаем.)

Фиг. 571.

Приняв уравнение изогнутой оси в форме $y=f\sin\frac{\pi x}{l}$ и имея в виду, что сближение точек приложения сил в этом случае будет равно

$$\lambda=\Delta+2e\theta_в, \text{ где } \theta_в=y'_в,$$

т. е.

$$\lambda=\frac{\pi^2 f^2}{4l}+2e\frac{\pi}{l}\cdot f\,^{1)}, \qquad (34.24)$$

составим выражения для dU и dU_P:

$$dU=\frac{\pi^4 EJ}{2l^3}\cdot f\,df;\quad dU_P=P\cdot d\lambda=P\left[\frac{\pi^2 f}{2l}\,df+\frac{2\pi}{l}\cdot e\,df\right].$$

---

[1]) Здесь, как и в § 197, $\Delta=\int\limits_0^l(ds-dx)=\frac{\pi^2 f^2}{4l}$, а $2ey'$ — дополнительное сближение концов, вследствие поворота опорных сечений на угол $\theta_в$.

Из равенства $dU = dU_P$ найдём величину наибольшего прогиба:

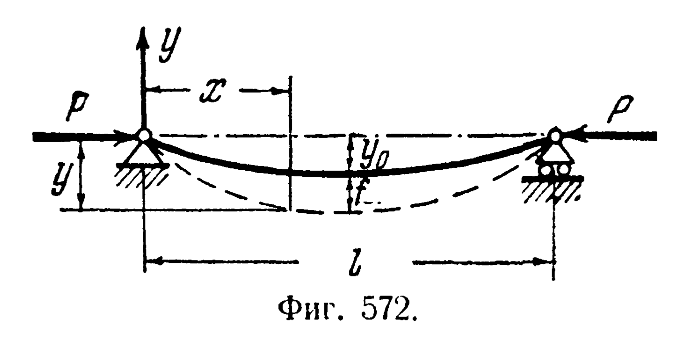
$$f = \frac{4e}{\pi} \cdot \frac{P}{P_к} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{P}{P_к}\right)}. \qquad (34.25)$$

Здесь $P_к$ — эйлерова сила, равная $P_к = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

Формула (34.25) позволяет найти прогибы стержня в зависимости от возрастания силы P.

Мы видим, что лишь при приближении силы P к критическому, эйлеровому значению, которое мы получили для прямого стержня, прогибы нашего стержня быстро возрастают, что ведёт за собой резкое увеличение напряжений; эта *эйлерова величина критической силы* и при наличии эксцентриситета должна считаться разрушающей. Таким образом, можно считать, что наличие эксцентриситета не отражается на *величине разрушающей силы при продольном сжатии стержня, пока явление происходит в пределах упругости.*

Поэтому проверка на устойчивость и в этом случае остаётся в силе; изменится лишь проверка на прочность, так как ещё до достижения силами P критического значения мы будем иметь вместо сжатия совместное действие сжатия и изгиба моментами $P(e + y)$, т. е. тот случай, который был рассмотрен выше (§ 209).



Фиг. 572.

Совершенно аналогично мы можем подойти к оценке влияния начальной (обычно очень небольшой) кривизны сжатого стержня (фиг. 572). Уравнение оси стержня до приложения силы примем: $y_1 = y_0 \sin \frac{\pi x}{l}$. После приложения силы, вследствие эксцентриситета e, стержень получит дополнительное искривление, и мы можем принять:

$$y = (f + y_0) \sin \frac{\pi x}{l}. \qquad (34.26)$$

Потенциальная энергия изгиба балки определяется этим дополнительным искривлением и будет равна, как и в предыдущих случаях,

$$U = \frac{\pi^4 EJ}{4l^3} \cdot f^2.$$

Сближение же концов искривлённого стержня после приложения сил P выражается формулой

$$\Delta = \frac{\pi^2}{4l}(f + y_0)^2 - \frac{\pi^2}{4l} \cdot y_0^2 = \frac{\pi^2}{4l}(f^2 + 2f \cdot y_0).$$

Варьируя изогнутую ось и составляя уравнение

$$dU = dU_P,$$

получаем:

$$dU = \frac{\pi^4 EJf\,df}{2l^3};$$

$$dU_P = P\,d\Delta = \frac{P\pi^2}{2l}(f + y_0)\,df;$$

отсюда

$$\frac{\pi^4 EJf\,df}{2l^3}=\frac{P\pi^2}{2l}(f+y_0)\,df$$

и

$$f=\frac{Py_0}{\frac{EJ\pi^2}{l^2}-P}=\frac{y_0\frac{P}{P_к}}{1-\frac{P}{P_к}}. \qquad (34.27)$$

Таким образом, уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$y=\left[\frac{y_0\frac{P}{P_к}}{1-\frac{P}{P_к}}+y_0\right]\sin\frac{\pi x}{l}=\frac{y_0\sin\frac{\pi x}{l}}{1-\frac{P}{P_к}}. \qquad (34.28)$$

Наибольшее значение y получает при $x=\frac{l}{2}$, а именно:

$$y_{max}=\frac{y_0}{1-\frac{P}{P_к}}. \qquad (34.29)$$

Как и в предыдущем случае, прогибы резко возрастают лишь при приближении P к $P_к$.

Резюмируя, можно сказать на основании теоретических соображений, что *при напряжениях в пределах пропорциональности ни эксцентриситет, ни начальная кривизна не оказывают влияния на величину разрушающей силы при продольном сжатии стержня.*

Иначе обстоит дело со стержнями малой и средней гибкости. При критических напряжениях, превосходящих предел пропорциональности, оба указанных обстоятельства значительно снижают величину $\sigma_к$. Это показывают опыты и подтверждают теоретические попытки подсчитать величину критических деформаций. Из опытов следует, что для стержней малой и средней гибкости влияние эксцентриситета весьма значительно; оно отражается на устойчивости и длинных стержней, но в значительно меньшей степени.

Влияние добавочных обстоятельств, изученных в настоящем параграфе, заставляет увеличивать коэффициент запаса при переходе к средним и малым гибкостям, а также выбирать несколько больший, чем при проверке на прочность, коэффициент запаса и для длинных стержней. Для оценки влияния эксцентриситета и начальной кривизны на прочность и устойчивость сжатых стержней необходимо дать себе отчёт о числовых величинах e и y_0.

В тщательно изготовленных стержнях можно ожидать начального прогиба y_0 по крайней мере в $\frac{1}{1000}$ длины; при менее тщательном изготовлении y_0 может достигать вдвое большей величины.

Эксцентриситет при хорошей центрировке может быть оценён в 1/750 длины. Далее, следует принять во внимание допуски в размерах поперечного сечения; можно считать, что они эквивалентны эксцентриситету размером $h/40$ и начальной стрелке той же величины. Здесь h — размер поперечного сечения в плоскости возможного выпучивания. Для составных сечений следует иметь в виду добавочный эксцентриситет величиной около $h/160$ в связи с возможной разницей в площадях отдельных ветвей стержня (§ 211).

Таким образом, для стержней со сплошным сечением следует считать возможными следующие минимальные величины e и y_0:

$$e=\frac{l}{750}+\frac{h}{40} \quad \text{и} \quad y_0=\frac{l}{1000}+\frac{h}{40}.$$

Кроме эксцентриситета и начальной кривизны, имеется ещё целый ряд обстоятельств, всегда возможных на практике и гораздо сильнее влияющих на грузоподъёмность сжатых стержней, чем на прочность балок и растянутых деталей. Сюда относятся: влияние наклёпа, величина начальных напряжений, вызванных изготовлением частей стержня, местные дефекты в отливках, сучки в дереве. Для стальных конструкций влияние этих добавочных обстоятельств учитывается некоторым (процентов на 10—20) повышением коэффициента запаса на устойчивость (см. § 204).

§ 211. Обоснование расчёта соединительной решётки в составных стержнях.

Как было показано выше (§ 205), соединение двух отдельно расположенных частей сжатого стержня в одно целое при помощи решётки или планок сильно повышает грузоподъёмность стержня. Таким образом, роль этих дополнительных креплений исключительно серьёзна; они должны быть достаточно мощными, чтобы обеспечить совместную работу обеих половин стержня, — не допустить потери устойчивости каждой из этих половин в отдельности.

Расчёт этих дополнительных креплений обычно основывается на следующих соображениях. Пока сжатый составной стержень из двух половин, соединённых решёткой или планками, остаётся прямым, эта решётка не работает или почти не работает. При искривлении же стержня в его сечениях появляется поперечная сила, вызывающая усилия в стержнях решётки.

Так как в действительных конструкциях добиться того, чтобы сжатый стержень оставался совершенно прямым, невозможно из-за начальной кривизны, эксцентриситета нагрузки и т. д., то всегда следует считаться с неизбежностью возникновения усилий в креплениях составного стержня.

Пусть сжатый стержень с шарнирно-опёртыми концами искривится, как показано на фиг. 573. Кривая изгиба, как мы видели (§ 201), является синусоидой

$$y=f\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Фиг. 573.

Разрежем стержень сечением на расстоянии x от одного из концов и вычислим поперечную силу Q, проектируя все силы, приложенные к одной половине стержня, на направление сечения (фиг. 573). Получаем:

$$Q=P\sin\varphi,$$

где φ — угол между нормалью к сечению и силой P. По малости этого угла синус его можно заменить тангенсом, а последний — производной $\frac{dy}{dx}$. Таким образом,

$$Q=P\cdot\frac{dy}{dx}=P\frac{\pi}{l}f\cos\frac{\pi x}{l}.$$

Зная поперечную силу Q, можно найти усилия в элементах решётки; проводя сечение mn (фиг. 574), отбрасывая одну часть стержня и проектируя все силы, приложенные к оставленной части, на направление сечения, находим усилие в раскосе S_1:

$$S_1 = +\frac{Q}{\cos\gamma};$$

проводя сечение m_1n_1, подобным же образом определяем усилие в стойке:

$$S_2 = Q.$$

Наибольшее значение поперечная сила получает у концов стержня при $x = 0$ и $x = l$:

$$Q_{max} = P\frac{\pi}{l}f.$$

По этому значению поперечной силы и следует вести расчёт элементов решётки. Для нахождения Q_{max} надо знать стрелу изогнутой оси f.

Искривление оси стержня при рабочей нагрузке зависит, главным образом, от эксцентриситета e и начальной стрелки y_0. Наибольший прогиб, вызванный влиянием обоих факторов, будет (§§ 209 и 210):

$$f = \frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}\left[y_0 + \frac{4e}{\pi}\frac{P}{P_к}\right]. \qquad (34.30)$$

Считая коэффициент запаса равным примерно 2,5, т. е. $P_к = 2{,}5P$, получаем:

$$f = 1{,}67\,[y_0 + 0{,}506e];$$

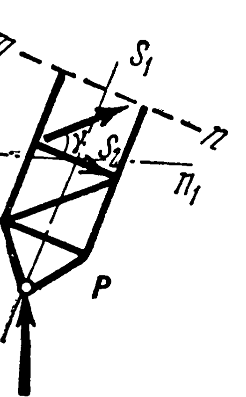
принимая (§ 210) для e значение $\frac{l}{750}$, а для y_0 значение $\frac{l}{1000}$, получаем для f:

$$f = 0{,}00167l + 0{,}00112l = 0{,}00279l \approx 0{,}003l.$$

Тогда $Q_{max} = P\frac{\pi}{l}\cdot 0{,}003l = 0{,}0095P = 0{,}95\%$ от сжимающей силы P.

В наших нормах для этой величины принимают в среднем около $1{,}5\%$.

В § 205 было уже указано, что при размерах элементов соединительной решётки и планок, выбранных в соответствии с только что изложенными соображениями, можно считать обе половины составного стержня работающими совместно относительно оси yy (фиг. 572). Однако благодаря неизбежным упругим деформациям соединительной решётки под действием поперечной силы, действительный момент инерции обеих половин сечения стержня относительно оси yy будет *меньше* теоретического.



Фиг. 574.

Вместо того чтобы учитывать уменьшение момента инерции относительно этой оси yy, перпендикулярной к плоскости решётки, можно при проверке устойчивости относительно этой оси вводить в расчёт *несколько увеличенную длину* стержня, т. е. умножать действительную длину на коэффициент длины, больший единицы. Формулы для вычисления этого коэффициента, полученные теоретически, приводятся ниже.

Если решётка состоит из распорок и диагоналей (фиг. 575, *а*), то коэффициент длины равен:

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 J}{l^2}\left[\frac{1}{F_д\cos^2\alpha\sin\alpha} + \frac{1}{F_р\operatorname{tg}\alpha}\right]}.$$

Здесь $F_д$ — площадь сечения диагонали; $F_р$ — площадь сечения распорки; α — угол между диагональю и распоркой; J — момент инерции обеих половин сечения стержня относительно оси, перпендикулярной к плоскости решётки; если стержень имеет две соединительные решётки, то в формулу для μ надо вводить двойную площадь диагоналей и распорок; при решётках с двойными (перекрёстными) диагоналями надо вводить в расчёт вместо $F_д$ сумму площадей обеих диагоналей.

Если обе половины стержня (фиг. 562, *б*) соединены планками, то коэффициент длины выражается формулой:

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 J a^2}{24 l^2}\left[\frac{1}{J_1} + \frac{2b}{a}\frac{1}{J_п}\right]}.$$

Здесь J — собственный центральный момент инерции всего сечения стержня относительно оси, перпендикулярной к плоскости планок; J_1 — момент инерции полусечения относительно его центральной оси; $J_п$ — момент инерции сечения планки относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения стержня перпендикулярно к плоскости планки; a — расстояние между осями планок вдоль стержня; b — расстояние между центрами тяжести половин сечения.

Для обычно встречающихся на практике размеров решётки и планок эти формулы могут быть приведены к более простому виду; для системы по фиг. 562, *а* и 575, *а*

$$\mu = \sqrt{1 + 28\frac{F_0}{F_д}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2}; \qquad (34.31)$$

для системы по фиг. 575, *б*

$$\mu = \sqrt{1 + 0{,}83\left(\frac{\lambda_р}{\lambda}\right)^2}; \qquad (34.32)$$

Фиг. 575.

здесь F_0 — площадь половины сечения стержня; λ — гибкость всего стержня относительно оси, перпендикулярной к плоскости решётки или планок; $\lambda_р$ — гибкость одной половины стержня между планками. По существующим нормам вместо 0,83 принято 1,0.



§ 212. Примеры расчёта сжато-изогнутых стержней.

Пример 131. Шарнирно опертая по концам двутавровая балка пролетом $l = 8$ *м* изгибается равномерно распределённой нагрузкой $q = 1$ *т/м* и сжимается продольными силами $P = 80$ *т*. В боковом направлении пролёт разделён связями пополам. Подобрать поперечное сечение балки при допускаемом напряжении $[\sigma] = 1400$ *кг/см²* и коэффициенте запаса $k = 1{,}6$.

Так как продольные силы во много раз больше поперечных, подбор сечения целесообразно произвести из условия устойчивости на сжатие. Свободная длина стержня в боковом направлении $l_1 = 0{,}5\ l = 4$ *м*. Принимая

для первого приближения $\varphi = 0{,}5$, находим:

$$F \geqslant \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{80\,000}{0{,}5 \cdot 1400} = 114{,}4\ см^2.$$

По сортаменту (см. приложение IX, табл. 3) подходит двутавр № 55 с площадью $F = 114\ см^2$; наименьший радиус инерции $i_{min} = 3{,}44\ см$; гибкость $\lambda = \frac{l_1}{i_{min}} = \frac{400}{3{,}44} = 116$; коэффициент $\varphi = 0{,}48$. Расчётное напряжение равно:

$$\sigma_р = \frac{P}{\varphi \cdot F} = \frac{80\,000}{0{,}48 \cdot 114} = 1460\ кг/см^2 < 1400\ кг/см^2.$$

Перенапряжение составляет около 4%, что допустимо. Произведём теперь проверку прочности сечения на сжатие и изгиб в плоскости стенки двутавра. Условие прочности имеет вид (34.21):

$$\sigma_р = \frac{P}{F} + \frac{M}{W_y}\left(1 + \frac{1{,}028\,\frac{kP}{P_к}}{1 - \frac{kP}{P_к}}\right).$$

Изгибающий момент

$$M = \frac{ql^2}{8} = \frac{1 \cdot 8^2}{8} = 8\ тм = 8 \cdot 10^5\ кг/см^2.$$

Геометрические характеристики сечения (ГОСТ 8239—56): $F = 114\ см^2$; $J_y = 55\,150\ см^4$; $W_y = 2000\ см^3$. Входящая в формулу эйлерова «критическая» сила:

$$P_к = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 55\,150}{800^2} = 1\,700\,000\ кг = 1700\ т.$$

Подставляя, получим:

$$\sigma_р = \frac{80\,000}{114} + \frac{8 \cdot 10^5}{2000}\left(1 + \frac{1{,}028\,\frac{1{,}6 \cdot 80}{1700}}{800^2}\right) = 1135\ кг/см^2 < 1400.$$

Таким образом, по условию устойчивости сечение подобрано в обрез; по условию же прочности имеется значительный запас.

Фиг. 576.

Пример 132. Стержень уголкового профиля размером $100 \times 100 \times 10\ мм$, шарнирно закреплённый по концам, сжимается продольными силами $P = 10\ т$, приложенными с эксцентриситетом $e = 3\ мм$ в плоскости наименьшей жёсткости уголка (фиг. 576). Кроме того, стержень имеет начальную кривизну в той же плоскости $f_0 = 2\ мм$. Найти величину прогиба и наибольших напряжений в сечении посредине пролёта, если длина стержня $l = 1\ м$. Прогиб в средине сечения может быть вычислен по формуле (34.30) § 212:

$$f = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_к}}\left(f_0 + \frac{4e}{\pi} \cdot \frac{P}{P_к}\right),$$

где

$$P_к = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2}.$$

По сортаменту $J_y = 74{,}1\ см^4$. Следовательно,

$$P_к = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 74{,}1}{100^2} = 146\,300\ кг.$$

Прогиб f равен:

$$f=\frac{1}{1-\frac{10\,000}{146\,300}}\left(0{,}2+\frac{4\cdot 0{,}3}{3{,}14}\cdot\frac{10\,000}{146\,300}\right)=0{,}242\ \textit{см}.$$

Полный эксцентриситет сжимающей силы равен:

$$e_0=f+e=0{,}242+0{,}3=0{,}542\ \textit{см}.$$

Изгибающий момент в сечении посредине пролёта:

$$M_{max}=P\cdot e_0=10\,000\cdot 0{,}542=5420\ \textit{кгсм}.$$

Напряжения в этом сечении будут:

$$\sigma=-\frac{P}{F}-\frac{M_{max}z}{J_y}.$$

Здесь $F=19{,}2\ \textit{см}^2$, а z — расстояния до крайних точек сечения.

До обушка:

$$z_1=z_0\sqrt{2}=-2{,}83\sqrt{2}=-4\ \textit{см};$$

до края полки:

$$z_2=b\cos 45^\circ-|z_1|=10\cdot 0{,}707-4{,}0=3{,}07\ \textit{см}.$$

Напряжения:

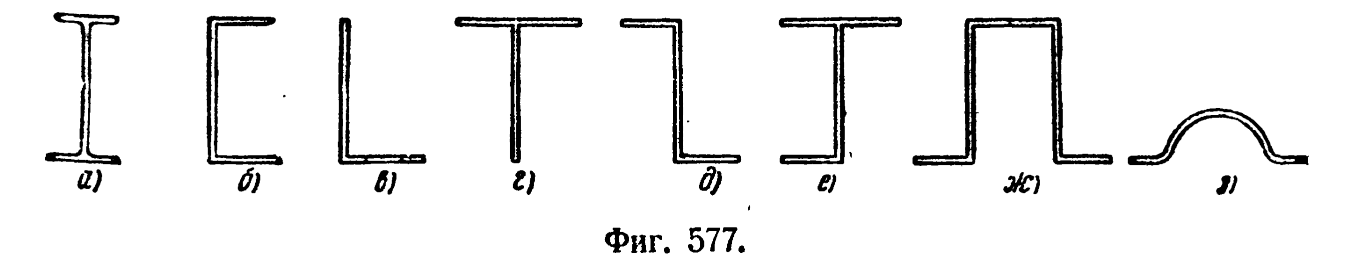
$$\sigma_{max}=-\frac{10\,000}{19{,}2}+\frac{5420\cdot 4}{74{,}1}=-521+292=223\ \textit{кг/см}^2,$$

$$\sigma_{min}=-\frac{10\,000}{19{,}2}-\frac{5420\cdot 3}{74{,}1}=-521-220=-741\ \textit{кг/см}^2.$$

§ 213. Проверка тонкостенных стержней открытого профиля на устойчивость.

В главе XXX были приведены выводы основных формул теории В. З. Власова для вычисления нормальных и касательных напряжений при кручении и изгибе тонкостенных стержней.

Особую проблему представляют расчёты на устойчивость сжатых тонкостенных стержней незамкнутого (открытого) сечения, применяющихся в авиационных и других конструкциях (фиг. 577). Теория упругой устойчи-



Фиг. 577.

вости таких стержней излагается в специальных курсах устойчивости упругих систем. В настоящем параграфе приводятся лишь некоторые окончательные результаты, полученные В. З. Власовым при исследовании устойчивости тонкостенных стержней.

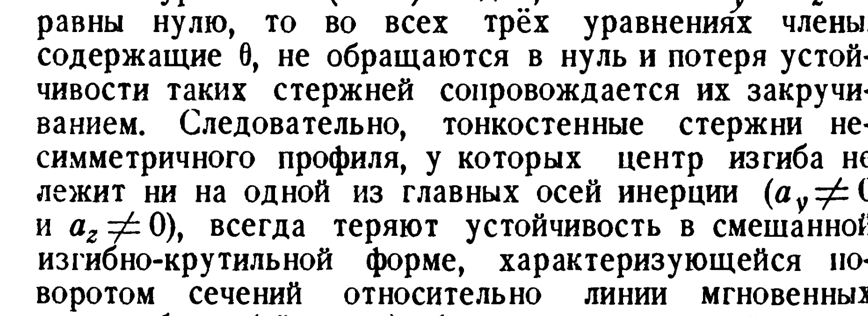
В § 182 было показано, что явление закручивания тонкостенного стержня может иметь место не только при кручении или изгибе его поперечными силами (не проходящими через центр изгиба сечения), но также и в случае действия только продольных сил, приложенных по концам стержня. Из этого следует, что кручение, связанное с неравномерной депланацией сечений и возникновением секториальных нормальных напряжений, может играть важную роль и в случаях потери устойчивости тонкостенным стержнем.

Действительно, решения, полученные В. З. Власовым при исследовании устойчивости тонкостенного стержня, показывают, что в самом общем случае потеря устойчивости его происходит в смешанной изгибно-крутильной форме.

Для случая центрального (осевого) сжатия тонкостенного стержня продольными силами дифференциальные уравнения его искривлённой оси, выведенные В. З. Власовым, имеют вид (фиг. 578):

$$\left.\begin{aligned} EJ_z\xi^{IV} + P\xi'' + a_zP\theta'' &= 0; \\ EJ_y\eta^{IV} + P\eta'' - a_yP\theta'' &= 0; \\ EJ_\omega\theta^{IV} + (Pr^2 - GJ_к)\,\theta'' + a_zP\xi'' - a_yP\eta'' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (34.33)$$

В этих уравнениях величины, связанные с изменением основной формы равновесия стержня, имеют значения: EJ_y и EJ_z — жёсткости стержня в главных плоскостях инерции; EJ_ω и $GJ_к$ — секториальная и крутильная жёсткости стержня; ξ и η — дополнительные перемещения (прогибы) в направлениях осей y и z, возникающие вследствие потери устойчивости плоской формы изгиба при продольном сжатии; θ — угол закручивания сечения; a_y и a_z — координаты центра изгиба сечения; $r^2 = \frac{J_y + J_z}{F} + a_y^2 + a_z^2$ — новая геометрическая характеристика сечения тонкостенного стержня.



Фиг. 578.

Из уравнений (34.33) видно, что если a_y и a_z не равны нулю, то во всех трёх уравнениях члены, содержащие θ, не обращаются в нуль и потеря устойчивости таких стержней сопровождается их закручиванием. Следовательно, тонкостенные стержни несимметричного профиля, у которых центр изгиба не лежит ни на одной из главных осей инерции ($a_y \neq 0$ и $a_z \neq 0$), всегда теряют устойчивость в смешанной изгибно-крутильной форме, характеризующейся поворотом сечений относительно линии мгновенных центров вращения. Чисто изгибная (эйлерова) форма потери устойчивости для таких стержней вообще оказывается невозможной.

Из решения уравнений (34.33) следует, что критическая сила тонкостенных стержней меньше, чем это получается по формуле Эйлера, применение которой может повести к грубым просчётам.

Это обстоятельство, имеющее большое практическое значение, может быть объяснено и физически. В теории Власова гипотеза плоских сечений не используется; в эйлеровой же теории, по существу, предположено наличие как бы дополнительных связей по всей длине стержня (что соответствует принятию гипотезы плоских сечений), устраняющих кручение стержня и увеличивающих его жёсткость.

Отсюда следует, что критические силы, вычисленные по формулам Эйлера, будут обычно больше, чем найденные по теории Власова, что подтверждается и опытом.

В случае, если $a_y = 0$ и $a_z = 0$, то-есть когда центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения, уравнения (34.33) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} EJ_z\xi^{IV} + P\xi'' &= 0; \\ EJ_y\eta^{VI} + P\eta'' &= 0; \\ EJ_\omega\theta^{IV} + (Pr^2 - GJ_к)\,\theta'' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (34.34)$$

В этом случае в первых двух уравнениях члены, содержащие θ, обратились в нуль. Эти уравнения соответствуют потере устойчивости в изгибной форме. Третье уравнение не зависит от величин ξ и η и потому соответствует потере устойчивости в чисто крутильной форме.

При шарнирном опирании концов стержня, в результате интегрирования и использования граничных условий, вычисленные корни этой системы уравнений имеют значения:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= P_y = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2}; \\ P_2 &= P_z = \frac{\pi^2 E J_z}{l^2}; \\ P_3 &= P_\omega = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\pi^2 E J_\omega}{l^2} + G J_\text{к}\right). \end{aligned}\right\} \tag{34.35}$$

P_y и P_z — эйлеровы критические силы, соответствующие выпучиванию стержня в той и другой главной плоскости инерции. P_ω — критическая сила, соответствующая потере устойчивости в чисто крутильной форме.

Для сечения, имеющего одну ось симметрии (например, ось y), корни дифференциальных уравнений В. З. Власова (34.33) будут:

$$P_1 = P_z = \frac{\pi^2 E J_z}{l_2} \text{ — эйлерова критическая сила;}$$

$$\left.\begin{aligned} P_2 \\ P_3 \end{aligned}\right\} = \frac{(P_y + P_\omega) r^2 \pm \sqrt{(P_y + P_\omega)^2 r^4 - 4 P_y P_\omega (r^2 - a_y^2) r^2}}{2 (r^2 - a_y^2)}. \tag{34.36}$$

В этом случае формы потери устойчивости будут: одна — чисто изгибная и две — изгибно-крутильные с центрами вращения на оси симметрии сечения.

Из трёх корней дифференциальных уравнений В. З. Власова (т. е. сил P_1, P_2 и P_3) критической силой следует считать *наименьшую*. Теория и опыт показывают, что для тонкостенного стержня, сечение которого имеет одну ось симметрии, наименьшее значение обычно имеет сила P_3, под действием которой стержень теряет устойчивость в изгибно-крутильной форме, причём в этих случаях P_3 оказывается значительно меньше эйлеровой силы P_z.

Для сопоставления величин критической силы, вычисленных по формуле Эйлера и по формуле Власова, и в целях сравнения полученных результатов с опытными данными в таблице 34 приведены данные испытаний тонкостенных металлических стержней на сжатие осевыми продольными силами, выполненных в лабораториях ЦАГИ и ЦНИИПС.

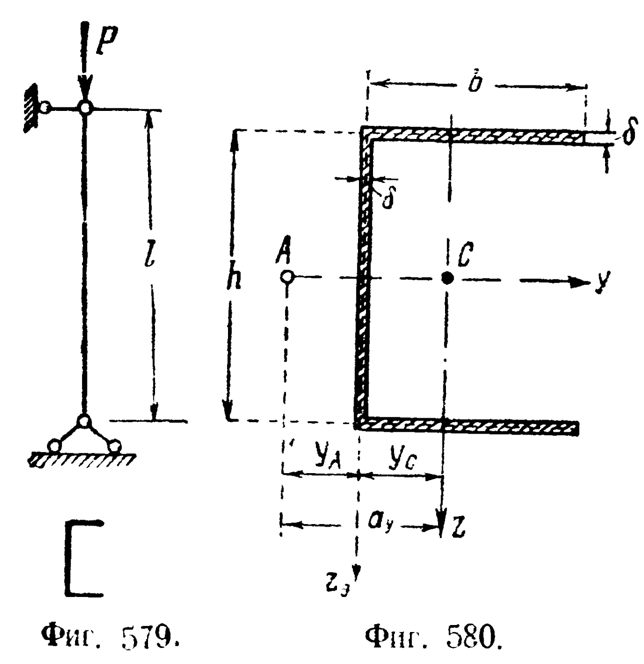
Как видно из таблицы, опытные значения критических сил для всех испытанных стержней хорошо согласуются с результатами, полученными по теории В. З. Власова, причём величины власовских критических сил значительно меньше эйлеровых.

Следует, однако, иметь в виду, что приведённые здесь результаты В. З. Власова получены из условия свободной депланации концевых сечений. На практике же, закрепление концов сжатого стержня обычно в той или иной мере препятствует депланации концевых сечений, что может существенно снизить влияние крутильного эффекта при действии продольных сил. Кроме того, наличие соединительных планок и решёток во многих случаях практики приближает тонкостенный открытый профиль к замкнутому, что также ведёт к уменьшению опасного влияния закручивания при продольном сжатии

Таблица 34. **Опытные данные о критических силах.**

№№ образцов	Форма и размеры сечений в *мм*	Длина стержня *мм*	Расчётные критические силы в *кг*		Опытное значение критической силы в *кг*
			по формуле Эйлера	по теории Власова	
1 2 3	20; 19; 1; 40	1 000 750 500	1423 2531 5694	412 654 1318	400 630 1200
1 2 3	25; 30; 1; 50	1000 750 500	4026 7158 16105	461 744 1550	480 780 1420
1 2	100; 5; 100; 5	2000 2000	18750 18750	14850 14850	14000 14000

стержня. Эти обстоятельства могут резко уменьшить разницу между величинами критических сил, подсчитанных по формуле Эйлера и по теории Власова.



Фиг. 579. Фиг. 580.

Ход вычислений при определении величины критической силы по формулам В. З. Власова покажем на примере.

Пример 133. Подсчитать величину критической силы для тонкостенного стержня корытного сечения (фиг. 579) при следующих его размерах: длина $l = 100$ *см*; высота сечения $h = 39$ *мм*; ширина полки $b = 30{,}5$ *мм*; толщина стенок $\delta = 1$ *мм*. (Размеры сечения даны по срединной линии — фиг. 580.) Концы стержня считать шарнирно-опёртыми.

Прежде всего вычислим значения геометрических характеристик сечения. Площадь сечения

$$F = (2b + h) \cdot \delta = 2\,(3{,}05 + 3{,}9) \cdot 0{,}1 = 1 \text{ } см^2.$$

Расстояние от оси z_0 до центра тяжести сечения

$$y_C = \frac{S_z^0}{F} = \frac{2b^2\delta}{2(2b+h)\delta} = \frac{b^2}{2b+h} = \frac{3,05^2}{2\cdot 3,05+3,9} = 0,93 \text{ см}.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей J_y и J_z:

$$J_y = \frac{\delta h^3}{12} + \frac{b\delta h^2}{2} = \frac{0,1\cdot 3,9^3}{12} + \frac{3,05\cdot 0,1\cdot 3,9^2}{2} = 2,815 \text{ см}^4,$$

$$J_z = h\delta\cdot y_C^2 + 2\left[\frac{\delta b^3}{12} + b\delta\left(\frac{b}{2} - y_C\right)^2\right] =$$

$$= 3,9\cdot 0,1\cdot 0,93^2 + 2\left[\frac{0,1\cdot 3,05^3}{12} + 3,05\cdot 0,1\left(\frac{3,05}{2} - 0,93\right)^2\right] = 1,027 \text{ см}^4.$$

Расстояние от оси z_0 до центра изгиба сечения (см. § 181, формула (30.42)):

$$y_A = \frac{3b^2}{6b+h} = \frac{3\cdot 3,05^2}{6\cdot 3,05+3,9} = 1,257 \text{ см}.$$

Расстояния от главной центральной оси до центра изгиба:

$$a_z = 0;$$

$$a_y = y_A + y_C = 1,257 + 0,93 = 2,187 \text{ см}.$$

Новая характеристика сечения

$$r^2 = \frac{J_y + J_z}{F} + a_y^2 = \frac{2,815 + 1,027}{1,0} + 2,187^2 = 8,625 \text{ см}^2.$$

Главный секториальный момент инерции сечения, подсчитанный для корытного профиля (см. § 181),

$$J_\omega = \frac{b^3h^2\delta}{12}\cdot\frac{2h+3b}{h+6b} = \frac{3,05^3\cdot 3,9^2\cdot 0,1\,(2\cdot 3,9+3\cdot 3,05)}{12\,(6\cdot 3,05+3,9)} = 2,748 \text{ см}^6.$$

Момент инерции при кручении:

$$J_к = \alpha\sum\frac{S\delta^3}{3} = \frac{1,12}{3}(2b+h)\,\delta^3 = \frac{1,12}{3}(2\cdot 3,05+3,9)\cdot 0,1^3 = 0,00373 \text{ см}^4.$$

Величины, зависящие от жёсткости стержня (силовые факторы):
Эйлерова сила в плоскости наибольшей жёсткости

$$P_y = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} = \frac{9,87\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2,815}{100^2} = 5550 \text{ кг}.$$

Сила, соответствующая крутильному эффекту,

$$P_\omega = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\pi^2 EJ_\omega}{l^2} + GJ_к\right) = \frac{1}{8,625}\left(\frac{9,87\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2,748}{100^2} + 8\cdot 10^5\cdot 0,00373\right) = 975 \text{ кг}.$$

Таким образом, все величины, входящие в формулу В. З. Власова, определены.

Величина критической силы по Власову (34.36):

$$P_з = \frac{(P_y + P_\omega) \cdot r^2 - \sqrt{[(P_y + P_\omega)^2 r^2 - 4P_y P_\omega (r^2 - a_y^2)]\, r^2}}{(2r^2 - a_y^2)} =$$

$$= \frac{(5550 + 975) \cdot 8{,}625}{2\,(8{,}625 - 2{,}187^2)} -$$

$$- \frac{\sqrt{[(5550 + 975)^2 \cdot 8{,}625 - 4 \cdot 5550 \cdot 975\,(8{,}625 - 2{,}187^2)]\,8{,}625}}{2\,(8{,}625 - 2{,}187^2)} = 885 \text{ кг}.$$

Для сопоставления подсчитаем величину критической силы по Эйлеру:

$$P_к = P_z = \frac{\pi^2 E J_z}{l^2} = \frac{9{,}87 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}027}{100^2} = 2025 \text{ кг}.$$

Для рассмотренного примера величина критической силы по Власову оказалась в $\frac{2025}{885} = 2{,}3$ раза *меньше* эйлеровой. Это значит, что опасное состояние для рассчитываемого стержня наступит при гораздо меньшей нагрузке, чем можно было бы предполагать на основании формулы Эйлера.

§ 214. Развитие расчётов на устойчивость.

Есть указания, что первым из занимавшихся вопросом об устойчивости сжатых стержней был знаменитый художник и учёный Леонардо да Винчи (1452—1519 гг.).

Теоретическое исследование вопросов о величине продольной силы, при которой прямой сжатый стержень, кроме прямолинейной, может иметь и искривлённую форму, принадлежит члену петербургской академии наук Леонарду Эйлеру (работы 1759—1780 гг.). Простота и чёткость полученной им формулы привели к широкому распространению её не только в России, но и на континенте Европы.

Явления, наблюдавшиеся при опытах со стойками средней и малой гибкости, несколько затемнили в представлении инженеров идею потери устойчивости; возникла мысль, что для вычисления критических сил может быть получена формула, рассматривающая выпучивание стержня при действии продольных сил только как следствие обычного нарушения *прочности* материала при совместном действии изгиба и сжатия. На основе подобных соображений была выведена Ренкином (1858 г.) недостаточно обоснованная формула, имеющая в настоящее время только историческое значение; её применение за границей может быть объяснено лишь консерватизмом.

Из экспериментальных работ надо отметить довольно обширные опыты Тетмайера (Цюрих). Это были опыты, поставленные весьма тщательно в отношении обеспечения шарнирности опорных закреплений, охватывали широкий круг материалов (мягкая сталь, чугун, дерево). Единственным недостатком были сравнительно небольшие поперечные размеры образцов. Формулы типа «прямой линии», по-

лученные Ф. Ясинским на основе этих и некоторых других работ для критических напряжений, превышающих предел пропорциональности, получили большое распространение.

Надо заметить, что развитие методов расчётов на устойчивость было самым тесным образом связано с практическими задачами, которые возникли перед конструкторами, главным образом по линии предупреждения разрушений. Потеря устойчивости сжатыми элементами конструкции очень часто вела к катастрофам, сопровождавшимся большим материальным ущербом и человеческими жертвами. Таковой была, например, катастрофа с Менхенштейнским мостом в Швейцарии, когда потеряла устойчивость сжатая стойка фермы при нагрузке поездом с двумя паровозами. При разрушении этого моста пострадало около 200 человек. Опыты Тетмайера относились как раз к этому времени (1896 г.).

Развитие мостостроения в связи с постройкой железных дорог потребовало пересмотра методов проектирования сооружений. Необходимость этого пересмотра показала катастрофа с мостом через реку Кевду на Моршанско-Сызранской железной дороге. Сжатый пояс фермы этого моста был так слабо укреплён, что потерял устойчивость под самой небольшой нагрузкой. В связи с изучением этой катастрофы Ясинский разработал метод расчёта сжатых поясов открытых мостов. К этому периоду относятся важнейшие теоретические и экспериментальные исследования вопросов устойчивости.

Огромный вклад в науку об устойчивости элементов конструкций внесли русские и советские учёные.

В 1892 г. Ф. Ясинский опубликовал свои первые работы об устойчивости сжатых колонн[1]), а в 1902 г. был опубликован сборник его трудов об устойчивости. Им был впервые решён ряд сложных задач (об устойчивости стержня на упругих опорах; об устойчивости сжатого стержня в упругой среде; определение критической нагрузки, неравномерно распределённой по длине колонны; об устойчивости колонн ступенчатой формы при сжатии одной и двумя силами и мн. др.). Ещё в 1892 г. Ф. Ясинским было введено понятие о приведённой длине и о коэффициенте длины. Им же была составлена таблица критических напряжений в зависимости от гибкости, положенная в основу современных методов расчёта сжатых стержней.

Методы расчёта сжатых колонн переменного сечения были даны академиком А. Н. Динником[2]). Заметим, что только одна из частных задач подобного рода была решена ранее Лагранжем. А. Н. Диннику принадлежит также решение задачи об устойчивости арки переменного сечения и многие другие[3]).

---

[1]) Известия собрания инженеров путей сообщения, 1892.

[2]) Известия Горного института, Екатеринослав, 1914, Изв. Донского политехн. инст., 1925 г.

[3]) Труды Академии наук УССР, 1933 г. Устойчивость арок, 1947 г.

Задачи об устойчивости плоской формы изгиба двутавровых балок решены проф. С. П. Тимошенко[1]). Им же исследован целый ряд задач об устойчивости кривых стержней, пластин и случаев продольно-поперечного изгиба. Эта последняя задача была впервые рассмотрена проф. Бубновым для неразрезной балки на упругих опорах[2]). Им же были решены некоторые задачи об устойчивости пластин. Ряд задач об устойчивости упругих плит был впервые решён академиком Б. Г. Галёркиным[3]). Его общий метод приближённого решения задач устойчивости упругих систем получил широкое распространение в СССР и за границей. Задача о формах равновесия сжатых стержней была подробно исследована академиком А. Н. Крыловым[4]). Вопросы устойчивости скручиваемого вала под действием продольных сжимающих сил были исследованы проф. Е. Л. Николаи, которым были решены и другие задачи об устойчивости (арка с защемлёнными пятами и др.).

Некоторые вопросы устойчивости были впервые решены К. С. Завриевым, П. Ф. Папковичем, Е. П. Поповым, И. М. Рабиновичем, Н. К. Снитко, И. Я. Штаерманом, Н. В. Корноуховым и другими.

Из этого краткого очерка видно, какое большое значение принадлежит нашей отечественной науке в развитии всех разделов общей теории устойчивости упругих систем. В последнее время, в связи с широким применением лёгких тонкостенных конструкций в разных областях техники (самолётостроение, судостроение, вагоностроение и т. д.), возникла потребность в исследовании устойчивости тонкостенных стержней и тонких оболочек.

В 1935—1940 гг. были опубликованы уже цитированные работы В. З. Власова, в которых дана общая теория изгиба, кручения и устойчивости тонких оболочек и тонкостенных стержней с незамкнутым профилем сечения[5]).

Теория Власова охватывает исследования упругой устойчивости стержней, пластин, балок, оболочек, причём формулы Эйлера, Тимошенко и др. могут рассматриваться как частные решения, вытекающие из общей теории, предложенной В. З. Власовым. Таким образом, теория упругой устойчивости получила своё завершение в трудах проф. В. З. Власова, создавшего мощный аппарат, применимый к решению задач проверки устойчивости во всех случаях, когда критические напряжения ниже предела упругости.

Исследования вопросов устойчивости систем за пределами упругости материала ожидают дальнейшего развития.

Приоритет в этой области принадлежит Ф. Ясинскому. Разработав на базе огромного экспериментального материала общие

---

[1]) Известия Политехнич. ин-та, С. Петербург, 1904, 1908, 1915 гг.

[2]) Строительная механика корабля, С. Петербург, 1912 г.

[3]) Расчёт плит, Москва, Госстройиздат, 1934 г.

[4]) Известия Академии наук СССР, 1931 г.

[5]) В. З. Власов, Тонкостенные упругие стержни, ГОНТИ, 1940 г.

методы расчёта сжатых стержней на устойчивость, Ясинский наметил также и пути теоретического решения задачи об устойчивости стержня в неупругой области.

Предложив заменить модуль упругости E переменным модулем T (в зависимости от гибкости), Ясинский показал, что таким путём можно будет определить критическую силу при напряжениях, превосходящих предел пропорциональности материала. Эта идея Ясинского была развита Энгессером (1899 г.) и Карманом (1910 г.), получившими теоретическим путём формулу типа эйлеровой для неупругой области (с переменным модулем T).

С тех пор, однако, теория неупругой устойчивости развивалась мало и существенные успехи сделала лишь в СССР. Здесь надо упомянуть работу А. А. Ильюшина [1]), в которой разработана теория устойчивости плит и оболочек. Однако методы расчёта сжатых стержней малой и средней гибкости базируются в основном пока на экспериментальных исследованиях и формулах, выведенных в результате обработки опытных данных.

Надо остановиться ещё на развитии вопроса о расчёте креплений в составных стержнях. Потребность в исследованиях этого рода возникла, когда попробовали применять сжатые стержни гораздо бóльших размеров, чем это было раньше (постройка Квебекского моста). Здесь обнаружилось, что применявшиеся раньше размеры решётки, соединяющей обе половины стержня, оказались недостаточными и вызвали катастрофу. Это побудило инженеров как экспериментально, так и теоретически исследовать вопрос о роли соединительной решётки и планок в сопротивлении стержней продольному изгибу.

Рассмотрение этого вопроса имеется, например, в работах проф. С. П. Тимошенко [2]), акад. А. Н. Динника и других. Значительным шагом вперёд здесь являются исследования А. Р. Ржаницына [3]).

---

[1]) А. А. Ильюшин, Пластичность, Гостехиздат, 1948.

[2]) С. П. Тимошенко, Об устойчивости упругих систем, Киев, 1910, Теория упругости, т. 2, Петроград, 1916.

[3]) Прикладная механика и математика, т. IV, в. 3, 1940.

ОТДЕЛ X
ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК.

ГЛАВА XXXV.
УЧЁТ СИЛ ИНЕРЦИИ И КОЛЕБАНИЙ.

§ 215. Введение.

До сих пор мы решали основную задачу сопротивления материалов, определяли размеры поперечных сечений частей конструкции и выбирали для них материал лишь при *статическом* действии нагрузок.

Как уже было указано в § 2, статическое действие нагрузок имеет место, когда при передаче давления от одной части конструкции на другую или при действии объёмных сил механическое движение этих частей не меняется с течением времени. В этом случае каждый элемент конструкции находится в равновесии под действием внешних нагрузок и напряжений.

Постоянство движения характеризуется тем, что скорость рассматриваемых деталей и каждой их части *не меняется* — отсутствует *ускорение* частиц этих элементов. Наличие же ускорения частиц рассматриваемого тела или соприкасающихся с ним деталей характеризует уже воздействие *динамической* нагрузки. Так, давление земли на подпорную стенку будет *статической* нагрузкой, так как ни стенка, ни земляная масса не движутся, — скорость их постоянна и равна нулю.

Точно так же статическим будет действие поднимаемого груза на канат при *постоянной* скорости подъёма груза. Наоборот, это действие будет *динамическим*, если груз поднимается с ускорением. Динамическую нагрузку испытывают шатуны паровых машин и двигателей внутреннего сгорания, так как отдельные элементы их движутся с переменной скоростью. В качестве других примеров конструкций, работающих на динамическую нагрузку, можно указать на фундамент машины, имеющей вращающиеся части, расположенные внецентренно относительно оси вращения, — они будут испытывать центростремительное ускорение; можно указать на фундамент и шток парового молота, так как боёк молота при ковке теряет свою скорость за очень короткий период времени, что связано с сообщением ему весьма больших ускорений.

Уже из этих примеров видно, что на практике мы можем встречаться с различными видами ускорения рассматриваемой детали или

соприкасающихся с ней тел; оно может быть постоянным по величине и направлению или только по направлению; может быть знакопеременным.

При переменных и знакопеременных напряжениях мы встречаемся с явлением разрушения от постепенно развивающейся трещины — с явлением усталости. При *резком изменении скорости* движения элемента конструкции в зависимости от передачи на него давлений от соседних деталей, когда имеет место явление *удара*, может обнаружиться хрупкость в таких материалах, которые при статическом действии нагрузок оказывались пластичными. Поэтому при проверке прочности деталей конструкций, подвергающихся действию динамических нагрузок, приходится интересоваться влиянием этих нагрузок не только на величину напряжений в детали, но и на сопротивляемость материала.

Влияние ускорений точек деталей конструкции на *напряжённое* состояние материала может быть учтено следующим образом. Если какое-либо тело движется с ускорением, то это значит, что на него передаются (к нему приложены) силы (давления) от других тел; по закону равенства действия и противодействия оно передаёт на эти тела равные приложенным силам и противоположно направленные реакции, называемые силами инерции. Это рассуждение применимо также и к каждому *элементу* движущегося с ускорением тела; этот элемент будет передавать на прилегающие части материала усилия, равные силе инерции этого элемента.

Таким образом, при ускоренном движении частей конструкции в них возникают *добавочные вполне реальные* напряжения, которые эквивалентны *статическим* напряжениям, вызванным силами инерции; от каждого элемента стержня на соседние части материала будут передаваться такие напряжения, как будто бы к нему была приложена соответствующая сила инерции.

Отсюда получаем практическое правило для определения напряжений в части конструкции, точки которой испытывают ускорения: надо вычислить эти ускорения и в дополнение к внешним силам, действующим на рассматриваемый элемент конструкции, нагрузить его соответствующими силами инерции. Дальше следует вести расчёт так, как будто на стержень *действует статическая нагрузка.*

Здесь надо различать три случая. Если величина и расположение внешних сил, приложенных к рассматриваемому элементу, не зависят от его деформаций, если эти деформации не изменяют характера движения стержня, то ускорения его точек вычисляются по правилам кинематики твёрдого тела, и учёт динамических воздействий сводится к *добавочной статической нагрузке соответствующими силами инерции*. Это имеет место в большинстве практически важных случаев (за исключением удара).

Если при этом ускорение будет меняться, то, как правило, возникнут колебания рассматриваемой части конструкции, которые могут в некоторых случаях дать явление резонанса, связанное с резким

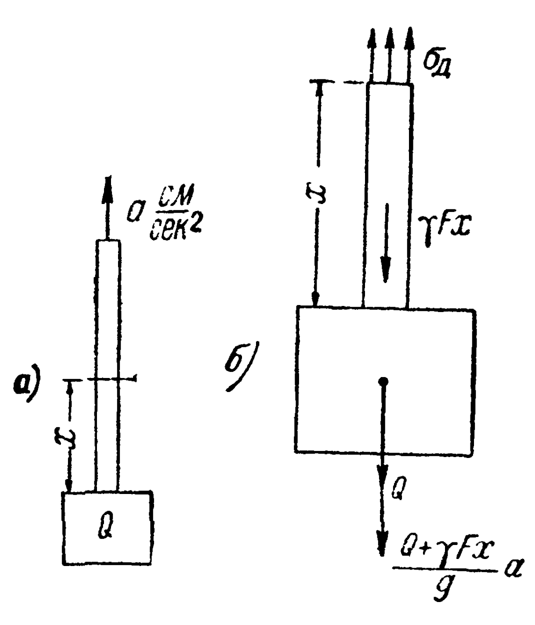
увеличением деформаций и напряжений. Эти напряжения могут достигать весьма большой величины и будут прибавляться к тем, которые учитываются путём введения в расчёт статической нагрузки силами инерции.

Наконец, могут быть случаи (удар), когда величина ускорений, а значит, и соответствующих сил инерции будет зависеть от деформируемости рассматриваемых элементов; в этом случае при вычислении сил инерции приходится использовать и данные сопротивления материалов.

Способ проверки прочности для каждого из указанных случаев покажем на примерах.

§ 216. Вычисление напряжений при равноускоренном движении.

Решение задачи о проверке прочности при динамических напряжениях мы начнём с простейшего случая, когда точки рассматриваемой части конструкции имеют постоянное ускорение, не вызывающее колебаний; примером возьмём равноускоренный подъём груза Q, подвешенного на стальном тросе площадью F; объёмный вес материала троса равен γ; груз поднимается с ускорением a *см/сек*^{2} (фиг. 581). Найдём напряжения в каком-либо сечении на расстоянии x от нижнего конца троса. Разрежем трос в этом сечении и рассмотрим нижнюю отсечённую часть. Она будет двигаться вверх с ускорением a; значит, на неё от верхней части троса будет передаваться помимо силы, уравновешивающей её вес, ещё направленная вверх сила, равная произведению её массы на ускорение a, т. е. $\frac{Q+\gamma Fx}{g}a$, где g — ускорение силы тяжести.



Фиг. 581.

По закону равенства действия и противодействия на верхнюю часть от нижней будет передаваться такая же сила, но направленная вниз. Таким образом, динамические напряжения $\sigma_д$, действующие по проведённому сечению на нижнюю часть, будут уравновешивать не только статическую нагрузку $Q+\gamma Fx$, но и добавочную силу $\frac{Q+\gamma Fx}{g}a$; чтобы вычислить эти напряжения, надо рассмотреть равновесие выделенной нижней части под действием $\sigma_д$, статической нагрузки $Q+\gamma Fx$ и силы инерции $\frac{Q+\gamma Fx}{g}a$, направленной вниз (фиг. 581). Тогда

$$\sigma_д=\frac{Q+\gamma Fx}{F}+\frac{Q+\gamma Fx}{gF}a=\frac{Q+\gamma Fx}{F}\left(1+\frac{a}{g}\right);$$

дробь $\frac{Q+\gamma F x}{F}$ представляет собой статическое напряжение σ_c в проведённом сечении; поэтому

$$\sigma_д = \sigma_c\left(1+\frac{a}{g}\right), \tag{35.1}$$

т. е. динамическое напряжение равно статическому, умноженному на коэффициент $1+\frac{a}{g}$. Эта величина называется динамическим коэффициентом $K_д$:

$$\sigma_д = K_д \sigma_c. \tag{35.2}$$

Такой вид формулы для динамических напряжений объясняет нам, почему мы главным образом уделяли внимание вычислению напряжений при статическом действии нагрузки; в очень многих случаях динамические напряжения могут быть выражены через статические путём умножения на соответствующий динамический коэффициент.

Условие прочности получит вид:

$$\sigma_{д\,max} = \sigma_{c\,max}\left(1+\frac{a}{g}\right) = K_д \sigma_{c\,max} \leqslant [\sigma].$$

Отсюда

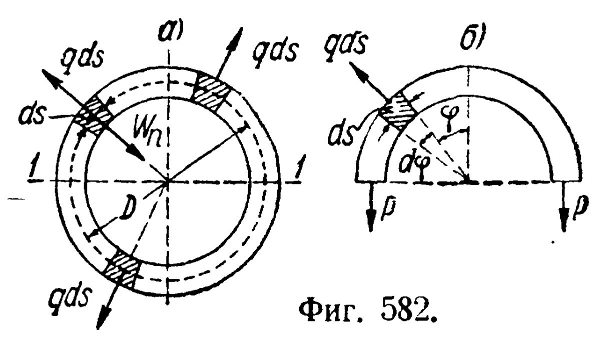
$$\sigma_{c\,max} \leqslant \frac{[\sigma]}{1+\frac{a}{g}} = \frac{[\sigma]}{K_д}. \tag{35.3}$$

Таким образом, можно в ряде случаев *динамический расчёт заменить статическим,* понизив только допускаемое напряжение делением его на динамический коэффициент $K_д$.

Так поступают в тех случаях, когда при расчёте оказывается затруднительным теоретическое определение динамического коэффициента, а приходится пользоваться его значениями, полученными из экспериментов. Подобным образом, например, учитывается динамичность временной нагрузки, действующей на мосты.

§ 217. Расчёт вращающегося кольца (обод маховика).

В качестве второго примера рассмотрим вычисление напряжений в быстро вращающемся кольце постоянного сечения (фиг. 582, *а*). С известным приближением в подобных условиях, если пренебречь влиянием спиц, находится обод маховика.



Фиг. 582.

Обозначим через F — площадь поперечного сечения кольца; γ — объёмный вес материала; n — число оборотов в единицу времени; ω — угловая скорость вращения; D — диаметр оси кольца.

Выделим элемент кольца длиной ds. При вращении кольца этот элемент движется по окружности с постоянной угловой скоростью ω.

Угловое ускорение ε равно нулю, поэтому тангенциальное ускорение элемента равно $w_t = \varepsilon \frac{D}{2} = 0$; радиальное же (центростремительное) ускорение элемента равно $w_n = \frac{\omega^2 D}{2}$ и направлено к центру кольца. Чтобы вычислить напряжения σ_x, надо к каждому выделенному элементу кольца приложить его силу инерции. Она направлена наружу и равна

$$w_n \frac{F\gamma}{g} ds = \frac{F\gamma}{g} \frac{\omega^2 D}{2} ds = q\, ds,$$

где q — интенсивность сил инерции на единицу длины обода. Таким образом, в кольце разовьются такие напряжения, как будто оно было загружено радиальной нагрузкой интенсивности q на единицу длины (фиг. 582, *б*). Усилия P, растягивающие обод, равны (§ 20):

$$P = \frac{Dq}{2}.$$

Напряжение σ_x равно

$$\sigma_x = \frac{P}{F} = \frac{Dq}{2F} = \frac{DF\gamma}{2gF} \cdot \frac{\omega^2 D}{2} = \frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g} = \frac{\gamma v^2}{g},$$

где $v = \omega \frac{D}{2}$ — окружная скорость точек кольца. Таким образом, напряжение в ободе маховика зависит лишь от объёмного веса материала и линейной скорости частей обода. Чтобы отдать себе отчёт в возможной величине этих напряжений, сделаем подсчёт при следующих числовых данных:

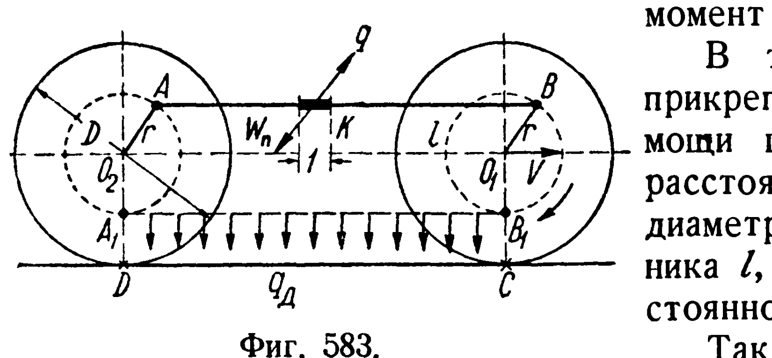
$$n = 360 \text{ об/мин}; \quad D = 4\ \text{м}; \quad \gamma = 7{,}5\ \text{г/см}^3.$$

Угловая скорость в секунду $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 360}{60} = 12\pi$; напряжение равно:

$$\sigma_x = \frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g} = \frac{7{,}5 \cdot 144\pi^2 \cdot 16 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^3 \cdot 981} = 435\ \text{кг/см}^2.$$

§ 218. Напряжения в спарниках и шатунах.

Проверим прочность спарника AB, соединяющего две оси паровоза (фиг. 583); на ось O_1, ведущую, передаётся вращающий момент от машины паровоза.



Фиг. 583.

В точках A и B спарник прикреплён к колёсам при помощи цилиндрических шарниров, расстояния AO_2 и BO_1 равны r, диаметр колёс D, длина спарника l, паровоз движется с постоянной скоростью v.

Так как спарник движется, то для проверки его прочности надо прежде всего установить, будет ли движение иметь ускорение, т. е. решить чисто кинематическую задачу. Спарник движется сам отно-

сительно паровоза и участвует вместе с ним в переносном движении со скоростью v.

Так как переносное движение является поступательным с постоянной скоростью, то ускорение может появиться лишь в относительном движении. Так как в этом движении спарника две его точки A и B движутся одинаково, описывая в одной плоскости окружности радиуса r, то это движение будет плоским и поступательным, следовательно, все точки спарника будут иметь те же скорости и ускорения, что и точки A и B.

Точка A движется вместе со вторым колесом, описывая окружность радиуса r. При постоянной скорости движения паровоза угловая скорость вращения колёс ω будет постоянна, значит, угловое ускорение равно нулю, а следовательно, равно нулю и тангенциальное ускорение точки A, т. е. $w_t = 0$; остаётся центростремительное ускорение w_n, направленное от A к O_2 и равное $\omega^2 r$. Любая точка спарника, например K, тоже будет испытывать такое же ускорение, направленное параллельно O_2A.

Чтобы проверить прочность спарника, надо добавить к его собственному весу ещё нагрузку силами инерции. На каждую единицу длины спарника будет действовать сила инерции

$$q = \frac{1 \cdot F \cdot \gamma}{g} w_n = \frac{F\gamma}{g} \omega^2 r;$$

направлена эта сила инерции параллельно радиусу O_2A в сторону, противоположную ускорению.

При изображённом на чертеже положении спарника собственный вес его вызывает изгиб в сторону, противоположную изгибу от сил инерции. Наиболее опасным будет крайнее нижнее положение спарника A_1B_1, когда обе нагрузки будут действовать в одном направлении. Тогда полная нагрузка $q_д$ на единицу длины спарника будет равна:

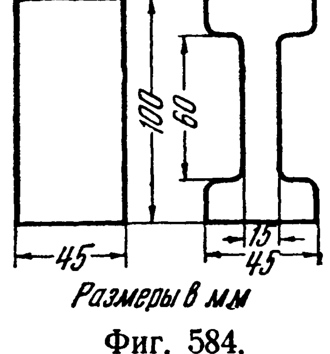
$$q_д = \gamma F + \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r = \gamma F \left[1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right].$$

Спарник надо рассматривать как балку, шарнирно-опёртую в точках A и B и нагружённую равномерно распределённой нагрузкой $q_д$. Наибольший изгибающий момент будет посредине пролёта:

$$M_{max} = \frac{q_д l^2}{8} = \frac{\gamma F l^2}{8}\left[1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right].$$

Наибольшие напряжения в этом сечении

$$\sigma_{д\,max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{F}{W}\frac{\gamma l^2}{8}\left[1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right].$$



Фиг. 584.

Пример 134. Исследовать два варианта поперечного сечения спарника: а) прямоугольное сечение и б) двутавровое сечение (фиг. 584), при

следующих данных:

$$\omega = 30\ 1/сек,\quad \gamma = 7{,}86\ г/см^3,\quad r = 50\ см\ \text{и}\ l = 150\ см.$$

В этом случае

$$\frac{\gamma l^2}{8}\left[1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right] = \frac{0{,}00786 \cdot 150^2}{8}\left[1 + \frac{50 \cdot 30^2}{981}\right] = 1036\ кг/см.$$

Для прямоугольного сечения:

$$F = 10 \cdot 4{,}5 = 45\ см^2,\quad W = \frac{4{,}5 \cdot 10^2}{6} = 75\ см^3,$$

$$\frac{F}{W} = \frac{45}{75} = 0{,}6\ 1/см\ \text{и}\ \sigma_{д\,max} = 0{,}6 \cdot 1036 = 622\ кг/см^2.$$

Для двутаврового сечения:

$$F = 10 \cdot 4{,}5 - 2 \cdot 6 \cdot 1{,}5 = 27\ см^2,\quad W = \frac{4{,}5 \cdot 10^3 - 2 \cdot 1{,}5 \cdot 6^3}{12 \cdot 5} = 64{,}2\ см^3,$$

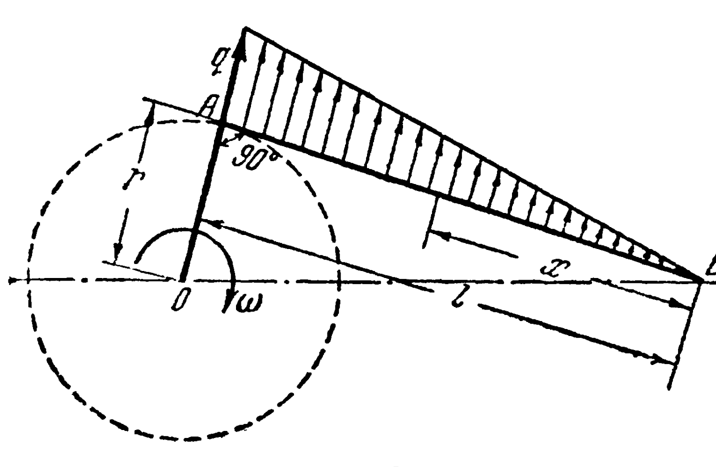
$$\frac{F}{W} = \frac{27}{64{,}2} = 0{,}42\ 1/см\ \text{и}\ \sigma_{д\,max} = 0{,}42 \cdot 1036 = 435\ кг/см^2.$$

Таким образом, несмотря на уменьшение момента сопротивления сечения (почти на 15%), наибольшие напряжения во втором случае, благодаря значительному уменьшению веса спарника, понижаются почти в 1,5 раза.

Кроме изгиба спарник испытывает ещё сжатие или растяжение силами P, передающими вращение от колеса O_1 колесу O_2. В положении A_1B_1 спарник будет сжат. Тогда, пренебрегая влиянием прогиба на величину изгибающего момента, получаем условие прочности:

$$\sigma_{max} = \left\{\frac{P}{F} + \frac{\gamma F l^2}{8W}\left[1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right]\right\} \leqslant [\sigma].$$

Кроме проверки на прочность, спарник следует проверить на устойчивость, как стержень с шарнирно-опёртыми концами, в плоскости изгиба нагрузкой q_x и, как стержень с защемлёнными концами, в перпендикулярной плоскости. В первом случае при вычислении гибкости в расчёт следует вводить наибольший, а во втором случае — наименьший радиусы инерции.



Фиг. 585.

Подобным же образом может быть выполнен и расчёт шатуна AB, шарнирно-скреплённого в точке A с кривошипом OA, вращающимся вокруг точки O с угловой скоростью ω (фиг. 585). При вращении кривошипа с постоянной угловой скоростью точка A шатуна испытывает только одно центростремительное ускорение, а точка B — только тангенциальное ускорение. Все точки шатуна, расположенные

между точками A и B, имеют и то и другое ускорения. Ограничиваясь здесь учётом сил инерции, возникающих в шатуне в результате одного только центростремительного ускорения, рассмотрим такое положение шатуна, в котором он перпендикулярен кривошипу, а следовательно, направление центростремительного ускорения в точке A перпендикулярно к оси шатуна. Предположим, что центробежные силы инерции q везде перпендикулярны оси шатуна и по длине его меняются по линейному закону от $q = q_0$ в точке A до $q = 0$ в точке B. Это предположение будет тем ближе к истине, чем больше длина шатуна по сравнению с длиной кривошипа. Шатун будем рассматривать как балку AB на двух шарнирных опорах A и B. Изгибающий момент достигает наибольшего значения при $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ (x отсчитывается от точки B) и равен (см. § 73):

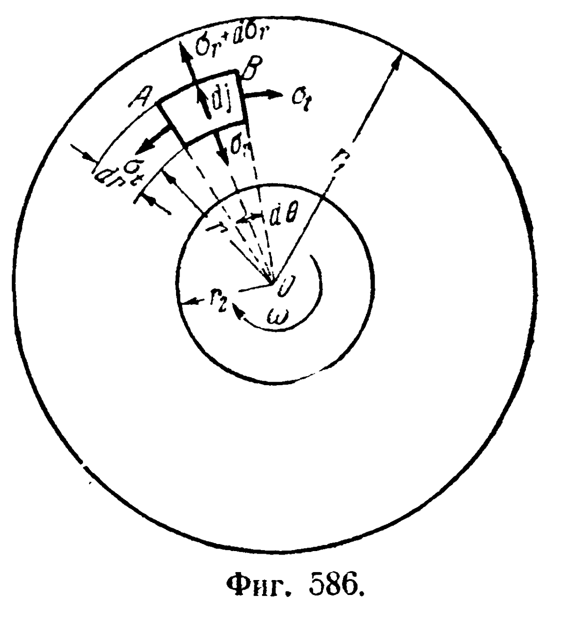
$$M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}.$$

Так как $q_0 = \frac{F \cdot \gamma \cdot 1}{g} \omega^2 r$ и $\sigma_{д\max} = \frac{M_{\max}}{W}$, то

$$\sigma_{д\max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}\,W} = \frac{F\gamma l^2 \omega^2 r}{9\sqrt{3}\,Wg}.$$

§ 219. Вращающийся диск постоянной толщины.

Значительный интерес представляет задача о напряжениях и деформациях в быстро вращающихся валах и дисках. Высокие скорости вращения валов паровых турбин обусловливают появление в валах и дисках значительных центробежных усилий. Вызванные ими напряжения распределяются симметрично относительно оси вращения диска.



Фиг. 586.

Рассмотрим наиболее простую задачу о расчёте диска постоянной толщины. Расчёт такого диска положен в основу некоторых приближённых способов расчёта дисков любого профиля. Воспользуемся некоторыми результатами, полученными при выводе формул для расчёта толстостенных цилиндров (§ 197). Предположим, что по толщине диска, принимаемой равной единице, напряжения σ_r и σ_t не меняются; осевое напряжение σ_z будем считать равным нулю.

Составим условия равновесия элемента AB, выделенного из диска двумя меридиональными сечениями и двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями (фиг. 586). В данном случае, кроме сил, действующих по граням элемента AB, необходимо принять во внимание также и силу инерции

$$dj = \omega^2 r \frac{\gamma r \cdot 1 \cdot dr\, d\theta}{g},$$

направленную вдоль радиуса от центра к внешнему контуру диска. Вместо уравнения (32.1), выведенного в § 197, будем иметь:

$$\sigma_r - \sigma_t + r\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\gamma\omega^2 r^2}{g} = 0. \tag{35.4}$$

Уравнение (32.4) того же параграфа (условие совместности деформаций) остаётся в силе и для данной задачи, т. е.

$$\frac{d\sigma_t}{dr} - \mu\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1+\mu}{r}(\sigma_r - \sigma_t). \tag{35.5}$$

Подставляя в это уравнение значение разности $\sigma_r - \sigma_t$ из (35.4), находим:

$$\frac{d\sigma_t}{dr} = -\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{1+\mu}{g}\gamma\omega^2 r. \tag{35.6}$$

Дифференцируя уравнение (35.4) по r и подставляя в него вместо $\frac{d\sigma_t}{dr}$ его значение из формулы (35.6), получаем линейное дифференциальное уравнение

$$r\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{3+\mu}{g}\gamma\omega^2 r = 0$$

или

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2\sigma_r)\right] + \frac{3+\mu}{g}\gamma\omega^2 r = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r^2. \tag{35.7}$$

Из (35.4) и (35.7) следует, что

$$\sigma_t = \sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\gamma\omega^2 r^2}{g} = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8g}\gamma\omega^2 r^2. \tag{35.8}$$

В формулах (35.7) и (35.8) A и B — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условий на контуре диска. При определении постоянных рассмотрим два случая: 1) диск с отверстием в центре и 2) сплошной диск. При этом вначале предположим, что края диска свободны от внешних усилий.

Для диска с центральным отверстием напряжение σ_r должно быть равно нулю как при $r = r_1$, так и при $r = r_2$ (фиг. 586). Эти условия на контуре при подстановке их в формулу (35.7) приводят к уравнениям:

$$A + \frac{B}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_2^2 = 0$$

и

$$A + \frac{B}{r_1^2} - \frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_1^2 = 0,$$

откуда

$$A = \frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2(r_1^2 + r_2^2) \quad \text{и} \quad B = -\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_1^2 r_2^2.$$

Подставляя значения A и B в формулы (35.7) и (35.8), получаем:

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2\left(r_1^2 + r_2^2 - r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right)$$

и

$$\sigma_t = \frac{\gamma\omega^2}{8g}\left[(3+\mu)\left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right) - (1+3\mu)r^2\right].$$

Полагая для краткости

$$\frac{r_2}{r_1}=\alpha, \quad \frac{r}{r_1}=\rho, \quad \frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_1^2=p \quad \text{и} \quad \frac{1+3\mu}{3+\mu}=m,$$

можем написать:

$$\sigma_r=p\left[1+\alpha^2\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)-\rho^2\right] \tag{35.9}$$

и

$$\sigma_t=p\left[1+\alpha^2\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)-m\rho^2\right]. \tag{35.10}$$

Замечаем, что напряжение σ_r обращается в нуль при $\rho=1$ и $\rho=\alpha$, т. е. на внутреннем и наружном контурах диска; при значениях ρ между 1 и α напряжение σ_r положительно и, как нетрудно убедиться, достигает наибольшей величины при $\rho=\sqrt{\alpha}=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$. При этом

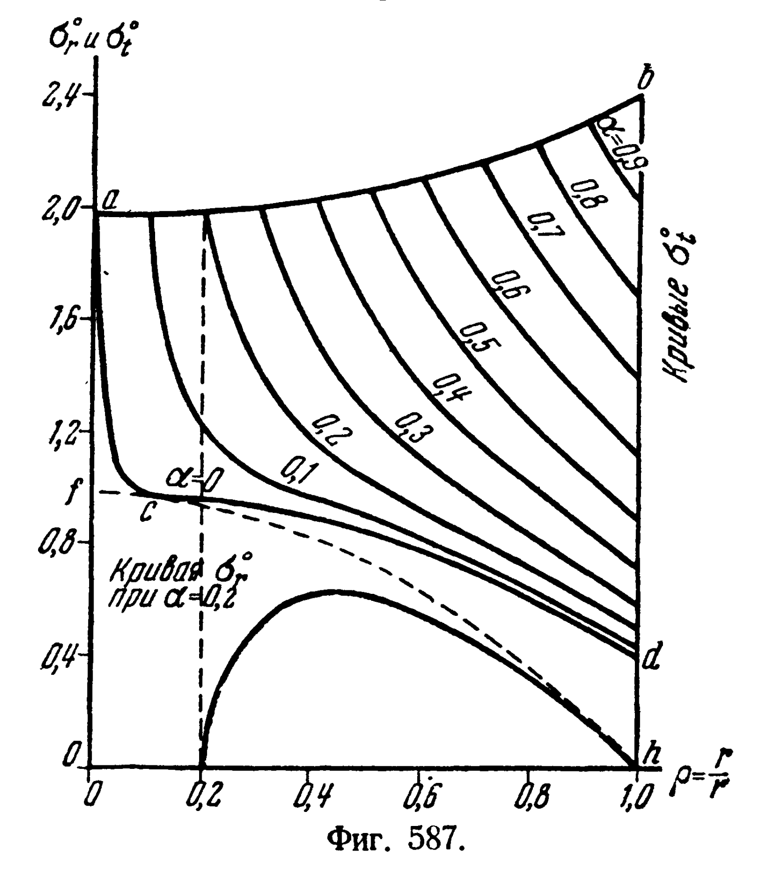
$$(\sigma_r)_{\max}=p(1-\alpha)^2. \tag{35.11}$$

Напряжение σ_t при всех значениях ρ также положительно и наибольшей величины достигает у внутреннего края диска, где $\rho=\alpha$:

$$(\sigma_t)_{\max}=p\left[2+(1-m)\alpha^2\right]. \tag{35.12}$$

Сравнивая (35.11) и (35.12), убеждаемся, что $(\sigma_t)_{\max}$ всегда больше $(\sigma_r)_{\max}$. Поэтому при проверке прочности диска как по теории наибольших касательных напряжений, так и по энергетической теории условие прочности должно быть написано в таком виде:

$$(\sigma_t)_{\max}=\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_1^2\left[2+\right.$$
$$\left.+(1-m)\alpha^2\right]\leqslant[\sigma]. \tag{35.13}$$



Фиг. 587.

На фиг. 587 представлены кривые изменения значений $\sigma_t^0=\frac{\sigma_t}{p}$ вдоль радиуса диска для разных α от 0 до 1 при $\mu=0{,}3$. Там же приведена кривая для $\sigma_r^0=\frac{\sigma_r}{p}$ при $\alpha=0{,}2$. Замечаем, что наибольшие значения напряжения σ_t (35.12) (у внутреннего края диска) мало меняются с изменением радиуса отверстия, т. е. величины α (кривая ab). При $\alpha\approx 0$, т. е. при очень маленьком радиусе центрального отверстия, у края отверстия имеет место резкое изменение напряжения σ_t — концентрация напряжений (кривая acd). При этом

$$(\sigma_t)_{\max}=2p=\frac{3+\mu}{4g}\gamma\omega^2 r_1^2. \tag{35.14}$$

Для очень тонкого кольца, при $r_1 \approx r_2$ и $\alpha \approx 1$,

$$(\sigma_t)_{max} = \frac{\gamma \omega^2 r_1^2}{g}, \tag{35.15}$$

что совпадает с выводом § 217. В этом случае наибольшее напряжение σ_t (35.15) всего только на 20% больше $(\sigma_t)_{max}$ для диска с весьма малым отверстием (35.14).

Из формул (35.9) и (35.10) видно, что напряжения σ_r и σ_t очень быстро растут с увеличением окружной скорости диска $v = \omega r_1$. Отметим, что, кроме скорости v и характеристик материала μ и γ, эти напряжения зависят только от безразмерных величин ρ и α. Таким образом, в геометрически подобных дисках при одних и тех же значениях ρ напряжения σ_r и σ_t будут одинаковы. Это обстоятельство позволяет заменить заводские испытания дисков большого диаметра лабораторными испытаниями их моделей.

В случае сплошного диска напряжения σ_r и σ_t в центре диска, т. е. при $r = 0$, должны быть равны друг другу. Сравнивая формулы (35.7) и (35.8), убеждаемся, что для выполнения этого условия постоянная B должна быть равна нулю. Постоянная A найдётся из условия: при $r = r_1$, т. е. у наружного края диска, напряжение σ_r равно нулю. Имеем:

$$A = \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_1^2 = p.$$

Подставляя это значение A, а также $B = 0$ в формулы (35.7) и (35.8), получаем:

$$\sigma_r = p(1 - \rho^2) \tag{35.16}$$

и

$$\sigma_t = p(1 - m\rho^2). \tag{35.17}$$

Соответствующие кривые изменения $\sigma_r^0 = \frac{\sigma_r}{p}$ и $\sigma_t^0 = \frac{\sigma_t}{p}$ вдоль радиуса приведены на фиг. 587 (кривые fh и fcd). Оба напряжения положительны при всех значениях ρ и увеличиваются по мере уменьшения ρ, т. е. по мере приближения к центру диска. При $\rho = 0$

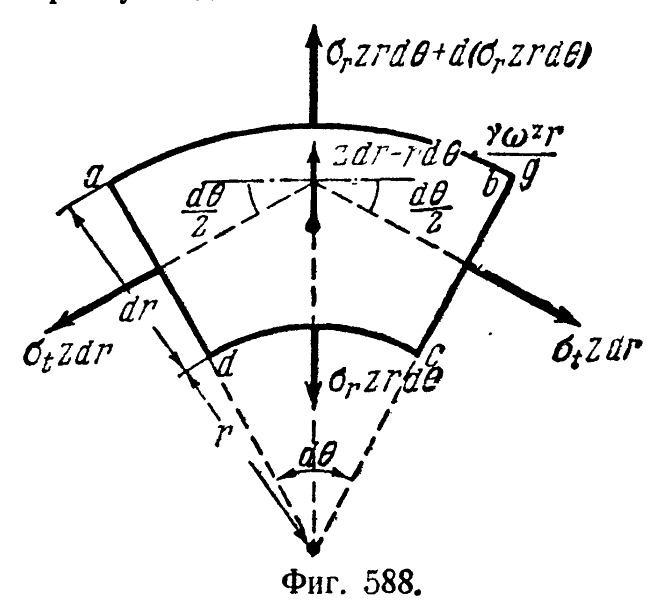
$$(\sigma_r)_{max} = (\sigma_t)_{max} = p = \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_1^2. \tag{35.18}$$

Таким образом, в диске с весьма малым центральным отверстием напряжение σ_t у края отверстия за счёт концентрации напряжений вдвое больше, чем в центре сплошного диска [см. формулу (35.14)].

Все рассуждения велись до сих пор в предположении, что края диска свободны от действия внешних усилий. Это предположение обычно не соответствует действительности. Посадка диска на вал выполняется в горячем состоянии или с помощью гидравлического пресса с таким натягом, чтобы деформация отверстия диска, вызванная центробежными усилиями, всегда была меньше, чем обратная ей по знаку деформация при посадке диска, т. е. чтобы в рабочем состоянии диск плотно сидел на вале. Наружный край диска обычно снабжается ободом для закрепления в нём лопаток турбины, при вращении которого возникают дополнительные центробежные усилия, передающиеся на диск. Таким образом, по наружному и внутреннему краю диска обычно действуют некоторые равномерно распределённые растягивающие или сжимающие усилия. Вызванные этими усилиями напряжения в диске могут быть вычислены по формулам, выведенным для расчёта толстостенных цилиндров (формулы (32.9) § 197). Складывая напряжения по формулам (32.9), а также (35.9) и (35.10), получаем возможность построить полную картину распределения напряжений во вращающемся диске.

§ 220. Диск равного сопротивления.

Как показывают формулы предыдущего параграфа и кривые фиг. 587, изменение напряжений σ_r и σ_t вдоль радиуса диска постоянной толщины весьма значительно. Наиболее неравномерное распределение напряжений имеет место в дисках постоянной толщины с отверстием в центре. При расчёте подобных дисков приходится ориентироваться на наибольшее напряжение σ_t у внутреннего края диска, что сильно ограничивает возможность повышения предельных скоростей. Для достижения высоких скоростей вращения диски приходится делать с переменной толщиной, уменьшающейся от центра к окружности диска. Наиболее выгодным является такой профиль диска, в котором напряжения во всех точках диска сохраняют постоянное значение. Подобные диски называются дисками равного сопротивления. При расчёте этих дисков исходят из предположения, что по толщине диска напряжения не меняются, что обычно влечёт за собой небольшие погрешности в величинах напряжений.



Фиг. 588.

Основные формулы для расчёта дисков переменной толщины попрежнему могут быть выведены из рассмотрения условий равновесия элемента диска *abcd* (фиг. 586 и 588). Переменную толщину диска, являющуюся некоторой функцией радиуса r, обозначим через z. На элемент *abcd* по меридиональным сечениям *ad* и *bc* действуют две силы $\sigma_t z\,dr$, составляющие между собой угол $d\theta$; по грани *dc* на этот элемент действует радиальное усилие $\sigma_r zr\,d\theta$, направленное к центру диска, а по грани *ab* — радиальное усилие $\sigma_r zr\,d\theta + d(\sigma_r zr\,d\theta)$, направленное от центра к наружной поверхности диска. К этим усилиям должна быть присоединена ещё и сила инерции массы элемента

$$z\,dr \cdot r\,d\theta \cdot \frac{\gamma\omega^2 r}{g},$$

направленная от центра к окружности диска.

Проектируя все перечисленные выше усилия на направление радиуса, получаем такое дифференциальное уравнение равновесия диска переменной толщины:

$$d(\sigma_r zr\,d\theta) - \sigma_t z\,dr\,d\theta + z\,dr\,d\theta \cdot \frac{\gamma\omega^2 r^2}{g} = 0$$

или

$$\frac{d}{dr}(rz\sigma_r) - z\sigma_t + z\frac{\gamma\omega^2 r^2}{g} = 0.$$

При $z = \text{const.}$ это уравнение обращается в уравнение (35.4) предыдущего параграфа.

В случае диска равного сопротивления напряжения σ_r и σ_t всюду постоянны и равны между собой. Приравнивая их величине допускаемого напряжения $[\sigma]$, можем так переписать уравнение равновесия:

$$\frac{d}{dr}(zr) - z + z\frac{\gamma\omega^2 r^2}{[\sigma]\cdot g} = 0$$

или

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dr} = -\frac{\gamma\omega^2 r}{[\sigma]\cdot g} = -2nr,$$

где

$$n = \frac{\gamma\omega^2}{2[\sigma]g}.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

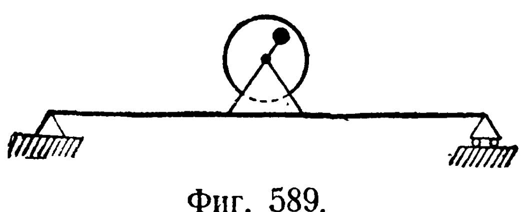
$$z = Ce^{-nr^2},$$

где C — постоянная интегрирования. Если диск не имеет отверстия в центре, то из условия, что при $r = 0$ $z = z_0$, следует: $C = z_0$. Толщина диска в центре (z_0) определяется из условий на контуре диска.

Сплошной диск равного сопротивления может быть применён даже при очень высоких окружных скоростях. Однако по конструктивным соображениям на практике обычно применяются диски переменной толщины с отверстием в центре, профиль которых, близкий к профилю диска равного сопротивления, обеспечивает наиболее выгодное распределение напряжений вдоль радиуса. Методы расчёта таких дисков рассматриваются в специальных курсах [1]).

§ 221. Влияние резонанса на величину напряжений.

В двух первых задачах, рассмотренных в §§ 216—218, ускорение не меняло своего направления *по отношению к элементу материала,* на который оно действовало; в последнем же примере за один оборот колеса ускорение непрерывно меняло своё направление на 360°. В этом случае напряжения и деформации периодически меняют свой знак, начинаются так называемые вибрации, колебания стержня.



Фиг. 589.

Подобный же случай будет иметь место, если на балке расположена машина с вращающимся грузом, имеющим эксцентриситет по отношению к оси вращения (фиг. 589). Сила инерции груза будет вызывать в балке напряжения и деформации, периодически меняющие свой знак. Балка будет совершать колебания с периодом, равным периоду вращения груза. Это будут так называемые *вынужденные* колебания. Если период вынужденных колебаний совпадёт с периодом *свободных* колебаний стержня, то мы получим явление *резонанса,* при котором *амплитуда* (размах) колебаний будет резко расти с течением времени. Наличие сил трения, сопротивление воздуха и т. д. ограничивают на практике рост этой амплитуды; однако она может достичь очень большой величины, значительно превышаю-

---

[1]) Малкин Я. Ф., Профилирование турбинных дисков в связи с расчётом их на прочность и вибрацию, ОНТИ, 1937; М. И. Яновский, Конструирование и расчёт паровых турбин, изд-во В.-Морской академии, 1931 г.; Жирицкий Г. С., Паровые турбины, Укрполиграфобъединение, 1931 г. и др.

щей те деформации, которые испытывала бы конструкция под действием ускорений той же величины, но не меняющих знака.

Известен случай, когда при резонансе угол закручивания вала увеличился в шесть раз по сравнению с тем углом, который был до наступления резонанса, — это был случай поломки коленчатых валов двигателей «Цеппелина» при первом его перелёте через Атлантический океан.

Таким образом, явление резонанса, если оно длится некоторое время, а не сбивается немедленно по возникновении, ведёт к постепенному росту *деформаций* и пропорциональных им *напряжений* в конструкции, что может вызвать поломку. Поэтому, как правило, при проектировании конструкций, испытывающих переменные ускорения с постоянным периодом, необходимо избежать возникновения явления резонанса.

Так как период раскачивающих (возмущающих) сил обычно является заданным, то в распоряжении проектировщика остаётся лишь период собственных свободных колебаний конструкции, который надо подобрать так, чтобы он в должной мере отличался от периода изменений возмущающей силы.

Вопросы, связанные с определением периода, частоты и амплитуды свободных и вынужденных колебаний, рассматриваются в курсах теоретической механики[1]). Поэтому ниже (§ 222) мы ограничимся лишь приложением полученных там выводов к определению напряжений и проверке прочности элементов конструкции при колебаниях.

§ 222. Вычисление напряжений при колебаниях.

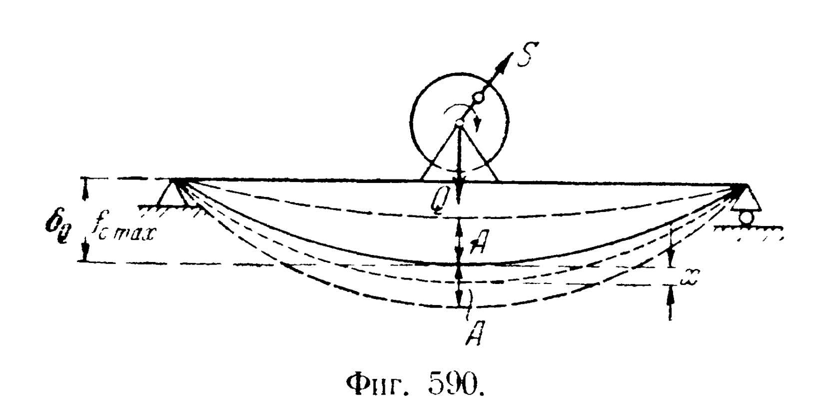
А. Упругая система, выведенная каким-либо путём из равновесия, приходит в колебательное движение. Колебания происходят около положения упругого равновесия, при котором в нагружённой системе имели место статические деформации δ_c и соответствующие им статические напряжения p_c (σ_c или τ_c — в зависимости от вида деформации). При колебаниях к статическим деформациям добавляются динамические, зависящие от вида колебательного движения и от величины размаха (амплитуды) колебаний. В связи с этим изменяются и напряжения p_c. Таким образом, при расчёте колеблющейся системы на прочность необходимо уметь вычислять динамические добавки к статическим деформациям и соответствующим им напряжениям.

Во многих случаях характер колебаний системы может быть определён одной какой-нибудь величиной (одной координатой). Такие системы называются системами с одной степенью свободы;

---

[1]) Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, 1940 г., часть II, §§ 91, 92, 150—154; Николаи Е. Л., Теоретическая механика, 1939 г., часть II, §§ 32, 33, 35, 36, 37; и др.

таковы, например, растянутая или сжатая незначительного веса пружина с грузом на конце, совершающая продольные колебания; небольшого (сравнительно с грузом Q) собственного веса балка, изображённая на фиг. 590, колеблющаяся в направлении, перпендикулярном к её оси, и т. п.



Фиг. 590.

При колебаниях систем с одною степенью свободы полные деформации системы в какое-либо сечении могут быть найдены путём сложения статической деформации с добавочной деформацией при колебаниях. Для проверки прочности системы, очевидно, необходимо найти наиболее опасное сечение с наибольшей в процессе колебаний суммарной величиной деформации. В простейших случаях для этого потребуется сложить наибольшую статическую деформацию $\delta_{c\,max}$ с наибольшей амплитудой колебаний A, т. е.

$$\delta_д = \delta_{c\,max} + A = \delta_{c\,max}\left(1 + \frac{A}{\delta_{c\,max}}\right) = K_д \delta_{c\,max}. \qquad (35.19)$$

Пока система деформируется в пределах упругости, напряжения пропорциональны деформациям. Поэтому

$$p_д = p_c\left(1 + \frac{A}{\delta_{c\,max}}\right) = K_д p_c, \qquad (35.20)$$

где

$$K_д = 1 + \frac{A}{\delta_{c\,max}} \qquad (35.21)$$

— коэффициент динамичности при колебаниях. Условие прочности в этом случае должно иметь такой вид:

$$p_д = K_д p_c \leqslant [p]. \qquad (35.22)$$

Таким образом, как при учёте сил инерции, не меняющих своего направления, задача нахождения динамических напряжений и проверки прочности при колебаниях может быть сведена к определению статических напряжений и коэффициента динамичности $K_д$. Так как последний зависит от величины A, то нужно уметь определять наибо́льшее значение амплитуды колебаний в разных случаях.

Как известно, дифференциальное уравнение движения колеблющегося груза Q в случае свободных колебаний можно представить в виде уравнения равновесия, в котором, кроме внешней силы (веса

груза Q) и силы упругого сопротивления системы, учитывается также и сила инерции:

$$\frac{Q}{g}x''+P-Q=\frac{Q}{g}x''+P_1=\frac{Q}{g}x''+cx=0. \qquad (35.23)$$

Здесь x — координата, полностью определяющая положение груза Q во время колебаний (см., например, фиг. 590); P — полное упругое сопротивление системы при колебаниях; $P-Q=P_1$ — так называемая восстанавливающая сила (добавочное упругое усилие, возникающее в системе в результате перемещения точки приложения груза Q на расстояние x при колебаниях), которую в пределах упругости можно считать пропорциональной координате x ($P_1=cx$); c — коэффициент пропорциональности, представляющий собой усилие, необходимое для того, чтобы вызвать равную единице статическую деформацию системы в направлении действия груза Q. Если статическая деформация от груза Q равна δ_Q, то $c=\frac{Q}{\delta_Q}$.

Решение уравнения (35.23) приводит к таким формулам для вычисления частоты ω_0 и периода t_0 свободных колебаний:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{gc}{Q}}=\sqrt{\frac{g}{\delta_Q}} \quad \text{и} \quad t_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_Q}{g}}.$$

Свободные колебания невесомого тела суть простые гармонические колебания с частотой (периодом), равной частоте (периоду) колебаний математического маятника, длина которого равна статической деформации системы от груза Q. Так, например, если груз Q растягивает призматический стержень,

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{\Delta l}}=\sqrt{\frac{gEF}{Ql}};$$

при изгибе балки на двух шарнирных опорах грузом Q посредине пролёта

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{f_{max}}}=\sqrt{\frac{48EJg}{Ql^3}}$$

и т. д.

Б. Если на упругую систему, кроме груза Q и силы упругого сопротивления системы P, в том же направлении действует периодически меняющаяся возмущающая сила S и сила сопротивления среды R, то дифференциальное уравнение движения груза Q при колебаниях также может быть представлено в виде уравнения равновесия, подобного уравнению (35.23):

$$\frac{Q}{g}x''+P-Q-S+R=\frac{Q}{g}x''+P_1-S+R=$$
$$=\frac{Q}{g}x''+cx-S+R=0. \qquad (35.24)$$

Силу сопротивления среды R на практике в довольно большом числе случаев можно считать пропорциональной первой степени скорости колебательного движения, т. е. $R = rx'$. Если возмущающая сила S меняется по синусоидальному закону:

$$S = H \sin \omega t,$$

где $H = S_{max}$, а ω — частота возмущающей силы, то уравнение (35.24) может быть переписано так:

$$\frac{Q}{g} x'' + rx' + cx = H \sin \omega t$$

или

$$x'' + 2nx' + \omega_0^2 x = \frac{gH}{Q} \sin \omega t. \qquad (35.25)$$

Здесь $n = \frac{rg}{2Q}$ — так называемый коэффициент затухания колебаний, а ω_0 — найденная выше частота свободных колебаний системы, возникающих при отсутствии как возмущающей силы S, так и силы сопротивления R.

Решение уравнения (35.25) приводит к такому выражению для амплитуды A *вынужденных* колебаний при наличии сил сопротивления:

$$A = \frac{H}{\frac{Q}{g}\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{gH}{Q\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\delta_H}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \qquad (35.26)$$

Здесь

$$\frac{gH}{Q\omega_0^2} = \frac{gH}{Q} \cdot \frac{\delta_Q}{g} = \frac{H}{Q}\delta_Q = \delta_H$$

— статическая деформация системы от наибольшей величины возмущающей силы S ($S_{max} = H$). Отношение амплитуды вынужденных колебаний A к величине деформации δ_H называется коэффициентом нарастания колебаний β:

$$\beta = \frac{A}{\delta_H} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \qquad (35.27)$$

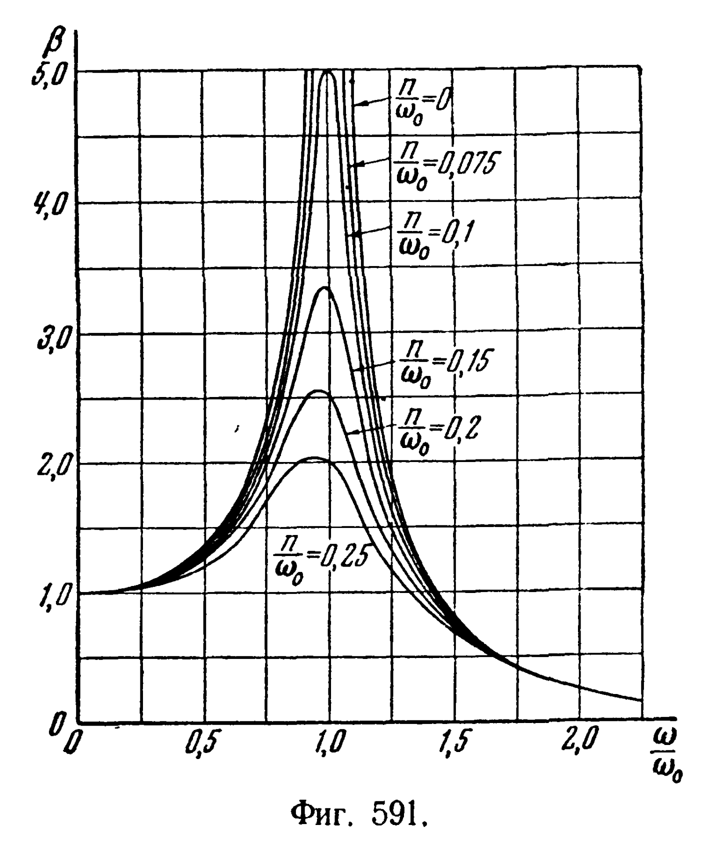
Таким образом, формула (35.21) для динамического коэффициента $K_д$ получает теперь такой вид:

$$K_д = 1 + \frac{A}{\delta_{c\,max}} = 1 + \frac{\delta_H}{\delta_Q}\beta. \qquad (35.28)$$

В этом выражении не учтена амплитуда собственных колебаний системы, которая может иметь сколько-нибудь существенное

значение лишь в самом начале процесса колебаний; при наличии сил сопротивления она довольно быстро уменьшается с течением времени.

На фиг. 591 приведены графики изменения коэффициента нарастания колебаний β в зависимости от величины отношения $\frac{\omega}{\omega_0}$ при разных значениях коэффициента затухания колебаний n $\left(\text{отношения } \frac{n}{\omega_0}\right)$. Если частота изменения возмущающей силы близка к частоте свободных колебаний системы, т. е. $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$, и если величина коэффициента затухания колебаний сравнительно невелика, то знаменатели формул (35.26) и (35.27) для A и β будут очень малыми, амплитуда колебаний и коэффициент нарастания колебаний будут очень большими (фиг. 591). В этом случае даже небольшая возмущающая сила может вызвать высокие напряжения (явление резонанса).



Фиг. 591.

С увеличением сил сопротивления явление резонанса становится всё менее заметным. Заметим, однако, что силы сопротивления значительно уменьшают величину амплитуды вынужденных колебаний только вблизи от резонанса $\left(0{,}75 \leqslant \frac{\omega}{\omega_0} \leqslant 1{,}25\right)$; при других величинах отношения $\frac{\omega}{\omega_0}$ влияние сил сопротивления незначительно.

Из формул (35.26), (35.27) и (35.28) и фиг. 591 видно, что если частота ω изменения возмущающей силы S очень мала, то амплитуда колебаний приближается к величине δ_H, коэффициент нарастания колебаний стремится к единице и наибольшие напряжения в системе могут быть вычислены как статические напряжения от груза Q и наибольшего значения возмущающей силы S ($S_{max} = H$). При очень большой частоте изменения возмущающей силы S амплитуда колебаний и коэффициент нарастания колебаний стремятся к нулю, груз Q можно рассматривать как *неподвижный*; поэтому наибольшее напряжение в системе равно *статическому напряжению* от груза Q.

Это обстоятельство имеет очень большое практическое значение; оно используется при конструировании разного рода поглотителей

колебаний, сейсмографов, вибрографов и других приборов. В машиностроении амортизаторы, предохраняющие основания машин от усилий, возникающих при колебаниях, подбираются так, чтобы частота собственных колебаний машины на амортизаторах была значительно меньше частоты изменения возмущающей силы.

§ 223. Учёт массы упругой системы при колебаниях.

А. Если колеблющаяся система, несущая груз Q, обладает довольно значительной распределённой массой (число степеней свободы, следовательно, велико), упрощённые расчёты, приведённые в предыдущем параграфе, будут иметь уже значительную погрешность. В этом случае дифференциальные уравнения движения составляются с учётом массы системы. При решении подобного рода задач удобнее исходить не из условий равновесия, на основе которых составлены уравнения (35.23) и (35.24), а из закона сохранения энергии.

Полагая, что количество энергии, сообщённое системе при выведении её из положения равновесия и представляющее собой сумму кинетической и потенциальной энергии груза и упругой системы, при свободных колебаниях остаётся постоянным, получаем уравнение

$$U+T=\text{const}. \tag{35.29}$$

Это уравнение показывает, что при колебаниях происходит непрерывный процесс преобразования энергии из одного вида в другой, не сопровождающийся какими-либо потерями энергии. Когда упругая система достигает одного из крайних положений, в котором скорость колебательного движения равна нулю, а следовательно, равна нулю и кинетическая энергия ($T=0$), потенциальная энергия груза и системы достигает наибольшего значения $U=U_{\max}$; наоборот, в положении равновесия $U=0$ и $T=T_{\max}$.

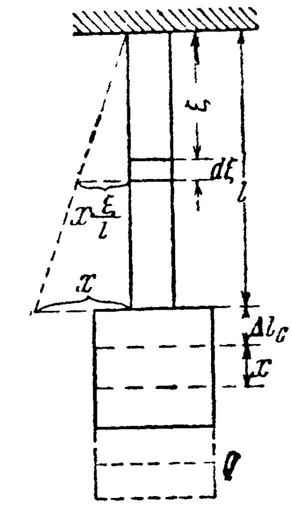
Заметим, что принцип, положенный в основу уравнения (35.29), применим лишь для систем с одной степенью свободы, так как закон сохранения энергии не учитывает обмена энергии, происходящего в системах с несколькими степенями свободы. Таким образом, решение задачи о колебаниях системы с большим числом степеней свободы здесь сводится к простейшей задаче, разобранной в § 222, и мы сможем приближённо найти лишь одну (первую) частоту свободных колебаний.

Рассмотрим теперь некоторые примеры использования уравнения (35.29).

Б. В качестве первого примера исследуем колебания груза Q, подвешенного к нижнему концу призматического стержня длиной l, площадью поперечного сечения F и удельным весом γ (фиг. 592). Выведенный из положения равновесия и затем предоставленный самому себе груз начнёт совершать продольные колебания около

положения равновесия. Составим выражения для U и T колеблющейся системы: груз — стержень.

Потенциальная энергия системы по сравнению с положением равновесия изменится на $U=U_t-U_0$, где U_0 — потенциальная энергия системы в начальный момент (в положении равновесия), а U_t — в момент t.



Фиг. 592.

Потенциальную энергию груза Q в начальный момент обозначим через U_Q; потенциальная энергия стержня в тот же момент равна $\frac{Q\Delta l_c}{2}$, где Δl_c — статическая деформация стержня от груза Q. Таким образом,

$$U_0=U_Q+\frac{Q\Delta l_c}{2}.$$

В момент t, когда груз переместится на расстояние x и стержень получит такую же дополнительную деформацию x, потенциальная энергия груза уменьшится на Qx, а сила упругого сопротивления стержня и статическая деформация его увеличатся в отношении $\frac{\Delta l_c+x}{\Delta l_c}$. Поэтому

$$U_t=U_Q-Qx+\frac{1}{2}Q\frac{\Delta l_c+x}{\Delta l_c}\cdot\Delta l_c\cdot\frac{\Delta l_c+x}{\Delta l_c}=$$

$$=U_Q-Qx+\frac{Q\cdot\Delta l_c}{2}+Qx+\frac{Qx^2}{2\Delta l_c}=U_0+\frac{Qx^2}{2\Delta l_c}$$

и

$$U=U_t-U_0=\frac{Qx^2}{2\Delta l_c}. \tag{35.30}$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии груза T_1 и стержня T_2. Кинетическая энергия груза $T_1=\frac{Q}{2g}(x')^2$. При вычислении кинетической энергии стержня учтём, что в некоторый момент t скорость груза и нижнего конца стержня равна x', а верхнего — нулю. Скорости промежуточных сечений будут иметь значения, заключающиеся между этими двумя.

Предположим, что при колебаниях перемещения всех сечений стержня по отношению к закреплённому концу меняются по тому же закону, что и при статическом растяжении, т. е. пропорционально расстоянию от закреплённого сечения. Таким образом (фиг. 592), если нижнее сечение стержня переместилось на величину x, то сечение, отстоящее от места защемления на ξ, переместится на величину $x\frac{\xi}{l}$,

скорость этого сечения будет равна $x'\frac{\xi}{l}$. Живая сила элемента стержня длиной $d\xi$, отстоящего на ξ от закреплённого конца, будет равна:

$$dT_2=\frac{\gamma F\,d\xi}{2g}x'^2\left(\frac{\xi}{l}\right)^2.$$

Кинетическая энергия всего стержня будет равна сумме величин dT_2, т. е.

$$T_2=\int_0^l\frac{\gamma F\,d\xi}{2g}x'^2\frac{\xi^2}{l^2}=\frac{x'^2}{2g}\frac{\gamma Fl}{3}.$$

Таким образом, живая сила стержня равна живой силе груза, имеющего массу $\frac{\gamma Fl}{3g}$, т. е. равную трети массы стержня, и двигающегося с той же скоростью x', что и груз Q. Полная же кинетическая энергия системы груз — стержень будет:

$$T=T_1+T_2=\frac{(x')^2}{2g}\left(Q+\frac{\gamma Fl}{3}\right).$$

Подставляя T и выражение U (35.30) в уравнение (35.29), дифференцируем последнее по t и находим:

$$\frac{1}{g}\left(Q+\frac{\gamma Fl}{3}\right)x''+\frac{EF}{l}x=\frac{1}{g}\left(Q+\frac{\gamma Fl}{3}\right)x''+\frac{Q}{\Delta l_Q}x=0$$

или

$$x''+\frac{g}{\Delta l_Q}\cdot\frac{Q}{Q+\frac{\gamma Fl}{3}}x=x''+\frac{g}{\Delta l_{\text{пр}}}x=0.$$

Здесь $\Delta l_{\text{пр}}$ — статическая деформация от груза $Q+\frac{\gamma Fl}{3}$. Полученное нами дифференциальное уравнение движения с учётом массы колеблющегося стержня отличается от уравнения (35.23) только величиной множителя при x и полностью совпадает с ним, если пренебречь массой стержня. Поэтому поправка на массу стержня, которую нужно ввести в расчёты предыдущего параграфа, состоит в том, что при определении частоты свободных колебаний стержня статическая деформация его вычисляется не от груза Q, но от груза Q, сложенного с одной третью веса стержня. Таким образом, учёт массы колеблющегося стержня уменьшает частоту свободных колебаний и увеличивает их период. Величину $\frac{\gamma Fl}{3g}$ называют приведённой массой стержня.

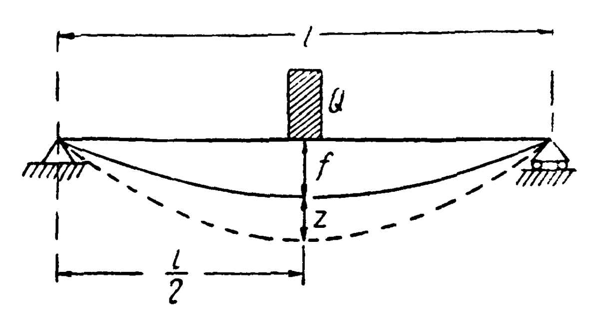
В. В качестве второго примера рассмотрим балку на двух шарнирных опорах с грузом Q посредине пролёта (фиг. 593).

Обозначим через $f=\frac{Ql^3}{48EJ}$ наибольший статический прогиб балки под действием груза Q, а через z — переменный добавочный про-

гиб среднего сечения балки при колебаниях. Предположим, что при свободных колебаниях добавочные прогибы балки меняются по её длине по тому же уравнению, что и при статической нагрузке силой Q; это последнее имеет вид (см. § 112):

$$y=\frac{Ql^3}{48EJ}\cdot\frac{3l^2x-4x^3}{l^3}=$$

$$=\frac{f}{l^3}(3l^2x-4x^3). \qquad (35.31)$$



Фиг. 593.

Таким образом, если при колебаниях среднее сечение балки дополнительно переместится на z от положения статического равновесия, то сечение на расстоянии x от левого конца переместится на

$$y=\frac{z}{l^3}(3l^2x-4x^3).$$

Скорость колебаний этого сечения будет

$$\frac{z'}{l^3}(3l^2x-4x^3).$$

Живая сила элемента балки длиной dx выразится формулой

$$dT_2=\frac{\gamma F\,dx}{2g}z'^2\left\{\frac{3l^2x-4x^3}{l^3}\right\}^2,$$

а кинетическая энергия всей балки будет равна:

$$T_2=2\frac{\gamma F}{2g}z'^2\frac{1}{l^6}\int\limits_0^{\frac{l}{2}}(3l^2x-4x^3)^2\,dx=\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{2g}z'^2. \qquad (35.32)$$

Кинетическая энергия груза равна:

$$T_1=\frac{Q}{2g}(z')^2.$$

Так как потенциальная энергия при изгибе балки вычисляется по формуле $U=\int\limits_l\frac{M^2\,dx}{2EJ}$, а $M=EJ\frac{d^2y}{dx^2}$, то

$$U=\int\limits_l\frac{EJ}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx.$$

Но при перемещении среднего сечения балки на расстояние z от положения статического равновесия $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{24}{l^3}zx$; поэтому

$$U=\int\limits_l\frac{EJ}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx=2\cdot\frac{EJ}{2}\int\limits_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{24zx}{l^3}\right)^2dx=\frac{24EJ}{l^3}z^2.$$

Подставляя выражения для U и $T = T_1 + T_2$ в уравнение (35.29) и дифференцируя его по t, имеем:

$$z'' + \frac{48EJ}{l^3} \cdot \frac{g}{\left(Q + \frac{17}{35}\gamma Fl\right)} z = z'' + \frac{g}{f_{\text{пр}}} z = 0.$$

Отсюда ясно, что для учёта массы балки при определении частоты и периода свободных колебаний следует её считать невесомой, а к весу груза Q прибавить $\frac{17}{35} = 0{,}486$ веса балки. Величина $\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{g}$ называется приведённой массой балки.

Заметим, что если за изогнутую ось балки приближённо взять синусоиду $y = f \sin \frac{\pi x}{l}$, то приведённая масса получилась бы равной не $\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{g}$, а $\frac{1}{2}\frac{\gamma Fl}{g}$, что достаточно близко к более точному значению.

Определённая таким образом величина приведённой массы балки получена всё же в предположении, что масса балки невелика по сравнению с массой груза Q, так как мы пренебрегаем влиянием собственного веса балки на кривую изгиба её оси; уравнение же изогнутой оси (35.31) соответствует случаю приложения одного сосредоточенного груза посредине пролёта.

Г. Возьмём теперь другой крайний случай, когда масса балки очень велика по сравнению с грузом Q или когда колеблющаяся балка загружена сплошной, равномерно распределённой нагрузкой q (в которую включён и собственный вес балки). Тогда кривая изогнутой оси будет иметь уравнение (см. § 111):

$$y = -\frac{q}{24EJ}[l^3x - 2lx^3 + x^4] = -\frac{16 \cdot f}{5l^4}[l^3x - 2lx^3 + x^4],$$

где f — прогиб посредине пролёта.

Живая сила элемента балки длиной dx, находящегося на расстоянии x от левой опоры, выразится через скорость среднего сечения балки z' такой формулой:

$$dT = \frac{q\,dx}{2g} z'^2 \left(\frac{16}{5l^4}\right)^2 (l^3x - 2lx^3 + x^4)^2.$$

Вся кинетическая энергия балки будет равна:

$$T = \frac{q}{2g} z'^2 \left(\frac{16}{5l^4}\right)^2 \int_0^l (l^3x - 2lx^3 + x^4)^2\,dx = \frac{ql}{2g} z'^2 \frac{3968}{7875}.$$

Потенциальная энергия балки равна:

$$U = \frac{EJ}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{EJ}{2}\int_0^l \left[\frac{192}{5}\frac{z}{l^4}(x^2 - lx)\right]^2 dx = \frac{3072}{125}\frac{EJz^2}{l^3}.$$

Подставляя выражения для U и T в уравнение (35.29) и дифференцируя его по t, имеем:

$$z'' + \frac{48EJg}{\left(\frac{31}{63}ql\right)l^3}z = 0.$$

Приведённая масса балки в этом случае равна: $\frac{31}{63}\frac{ql}{g} = 0{,}492\frac{ql}{g}$.

Таким образом, при подсчёте периода собственных колебаний уравнение кривой изгиба играет весьма малую роль, лишь бы был сохранён *общий характер* изогнутой оси балки.

Для шарнирно-опёртой балки при изгибе её по кривой без точек перегиба можно всегда принимать за уравнение изогнутой оси уравнение синусоиды с одной полуволной $y = f\sin\frac{\pi x}{l}$ и приведённую массу балки считать равной $0{,}5\frac{ql}{g}$.

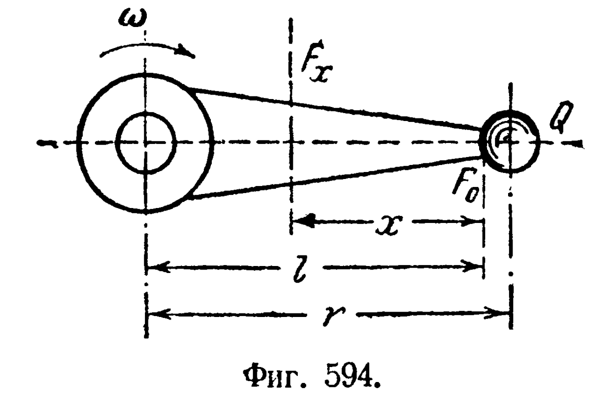
Итак, при определении первой частоты свободных колебаний системы с распределённой массой можно считать систему невесомой, а к массе сосредоточенного груза добавлять приведённую массу системы; операция «приведения» имеет силу и в том случае, если $Q = 0$.

§ 224. Примеры.

Пример 135. Стержень длиной l переменного сечения, несущий на одном конце груз Q (фиг. 594), вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, к которой он прикреплён другим концом. Расстояние центра тяжести груза Q от оси вращения равно r.

Найти зависимость площади сечения стержня F_x от расстояния сечения x от свободного конца стержня при условии, что напряжения во всех сечениях равны $[\sigma]$. Объёмный вес материала γ.

Каждая точка стержня с абсциссой x испытывает центростремительное ускорение, равное $\omega^2(l - x)$; поэтому для определения напряжений надо нагрузить все элементы стержня силами инерции, направленными от центра и равными массе элемента, умноженной на $\omega^2(l - x)$. Элемент длиной dx между двумя смежными сечениями с абсциссами x и $x + dx$, площади которых равны F_x и $F_x + dF_x$, нагружён силой инерции $\frac{F_x\gamma\,dx}{g}(l - x)\omega^2$, где g — ускорение силы тяжести.



Фиг. 594.

Сечения стержня должны меняться таким образом, чтобы эта сила инерции вызвала на площади dF_x напряжение $[\sigma]$ (см. расчёт для стержня равного сопротивления при растяжении и сжатии в § 29). Таким образом, получаем дифференциальное уравнение для F_x:

$$[\sigma]\cdot dF_x = \frac{F_x\gamma\,dx}{g}(l - x)\omega^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dF_x}{F_x}=\frac{\gamma\omega^2}{g[\sigma]}(l-x)\,dx \quad \text{и} \quad \ln F_x=\frac{\gamma\omega^2}{g[\sigma]}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+C.$$

Для определения постоянной C полагаем $x=0$, тогда $F_x=F_0$ — площади на конце стержня. Эта площадь определяется в зависимости от силы инерции груза Q, растягивающей концевой элемент стержня:

$$F_0=\frac{Qr\omega^2}{g[\sigma]}.$$

Подставляя в уравнение для F_x значение $\ln F_0=C$, получаем:

$$\ln F_x=\frac{\gamma\omega^2 x}{2g[\sigma]}[2l-x]+\ln F_0 \quad \text{и} \quad F_x=F_0 e^{\frac{\gamma\omega^2}{2g[\sigma]}(2l-x)x}.$$

Пример 136. Двигатель весом $Q=500$ *кг* укреплён (посредине) на двух деревянных балках прямоугольного поперечного сечения, каждая из которых лежит на двух опорах и имеет пролёт $l=160$ *см* (фиг. 590). Сечение каждой балки 12×20 *см*, вес $Q_1=23$ *кг*, материал — сосна с модулем упругости $E=8\cdot 10^4$ *кг/см²* и допускаемым напряжением $[\sigma]=100$ *кг/см²*. Неуравновешенные массы двигателя условно могут быть заменены вращающимся грузом $Q_2=5$ *кг*, с радиусом вращения $R=10$ *см* и угловой скоростью вращения ω, равной скорости вращения вала двигателя. Двигатель должен работать при $n_0=1500$ об/мин. Требуется установить, является ли это число оборотов безопасным для прочности балок. Силами сопротивления при колебаниях можно пренебречь.

Определим частоту свободных колебаний балки:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{f}}=\sqrt{\frac{48EJg}{\left(\frac{Q}{2}+\frac{17}{35}Q_1\right)l^3}}=\sqrt{\frac{48\cdot 8\cdot 10^4\cdot 12\cdot 20^3\cdot 981}{\left(\frac{500}{2}+\frac{17}{35}\cdot 23\right)160^3\cdot 12}}=168\,\frac{1}{сек}.$$

Критическое значение угловой скорости вращения вала двигателя, при котором амплитуда колебаний балки неограниченно возрастает, будет

$$\omega_{кр}=\omega_0=168\,\frac{1}{сек},$$

что соответствует

$$n_{кр}=\frac{30}{\pi}\omega_{кр}=\frac{30}{3{,}14}\cdot 168=1605 \text{ об/мин.}$$

Найдём наибольшие напряжения в балках при заданном числе оборотов двигателя $n_0=1500$ об/мин или при $\omega_0=\frac{\pi n_0}{30}=\frac{3{,}14\cdot 1500}{30}=143\,\frac{1}{сек}$. Из уравнений (35.20) и (35.28) § 222 следует, что

$$\sigma_д=\sigma_c\left(1+\frac{\delta_H}{\delta_Q}\beta\right)=\sigma_c\left(1+\frac{f_H}{f_Q}\beta\right).$$

Так как

$$f_H=\frac{Hl^3}{48EJ} \quad \text{и} \quad H=\frac{Q_2}{g}\omega^2 R,$$

а

$$f_Q=\frac{Ql^3}{96EJ}+\frac{5Q_1 l^3}{384EJ}=\frac{4Q+5Q_1}{384EJ}l^3,$$

то

$$\frac{f_H}{f_Q}=\frac{8Q_2\omega^2 R}{(4Q+5Q_1)g}=\frac{8\cdot 5\cdot 10\cdot\omega^2}{(4\cdot 500+5\cdot 23)\,981}=0{,}0001928\omega^2.$$

Коэффициент нарастания колебаний равен:

$$\beta = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2} = \frac{168^2}{168^2-\omega^2}.$$

Наибольшее статическое напряжение в балке от груза $\frac{Q}{2}$ и собственного веса Q_1 равно:

$$\sigma_c = \frac{(Q+Q_1)\,l}{8W} = \frac{(500+23)\,160\cdot 6}{8\cdot 12\cdot 20^2} = 13{,}1\ \textit{кг/см}^2.$$

Поэтому при $\omega=\omega_0=143\,\frac{1}{\textit{сек}}$ получаем:

$$\frac{f_H}{f_Q} = 0{,}0001928\omega_0^2 = 0{,}0001928\cdot 143^2 = 3{,}95,\quad \beta = \frac{168^2}{168^2-143^2} = 3{,}68$$

и

$$\sigma_д = 13{,}1\,(1+3{,}95\cdot 3{,}68) = 203\ \textit{кг/см}^2 > [\sigma] = 100\ \textit{кг/см}^2.$$

Таким образом, при заданном числе оборотов двигателя наибольшее напряжение в балке оказывается значительно выше допускаемого. Установим безопасный для прочности балок режим работы двигателя, исходя из условия, чтобы при колебаниях наибольшие динамические напряжения в балках не превышали величины допускаемого напряжения. Из уравнений (35.22) и (35.28) § 222 следует, что

$$1+\frac{\delta_H}{\delta_Q}\beta = 1+\frac{f_H}{f_Q}\beta \leqslant \frac{[\sigma]}{\sigma_c}.$$

Подставляя в это условие найденные выше выражения для β и $\frac{f_H}{f_Q}$ и значения $[\sigma]$ и σ_c, получаем уравнение для определения допускаемых значений угловой скорости вращения вала двигателя $[\omega]$:

$$1+0{,}0001928\,[\omega]^2\,\frac{\pm 168^2}{168^2-[\omega]^2} = \frac{100}{13{,}1}\ ^{1)}$$

или

$$(0{,}2356\pm 0{,}1928)\,[\omega]^2 = 6634.$$

Отсюда $[\omega_1]=124\,\frac{1}{\textit{сек}}$ или $[n]_1=1190$ об/мин и $[\omega]_2=394\,\frac{1}{\textit{сек}}$ или $[n]_2=3760$ об/мин. Если $n=[n]_1$ и $n=[n]_2$, наибольшие напряжения в балках равны допускаемым. При заданных размерах балок безопасный режим работы двигателя будет при $n\leqslant 1190$ об/мин и $n\geqslant 3760$ об/мин. Так как двигатель должен работать при $n_0=1500$ об/мин, то опасный для работы двигателя диапазон можно сдвинуть увеличением или уменьшением размеров сечений балок. Задавшись размерами 15×24 *см* и 12×12 *см* и повторяя последовательно все проделанные выше вычисления, получаем результаты, приведённые в таблице 35.

В обоих вновь рассмотренных вариантах $\sigma_д<[\sigma]$. Однако во втором варианте при пуске и остановке двигателя, когда частота возмущающей силы должна будет пройти через критическое значение ($n_{кр}=750$ об/мин),

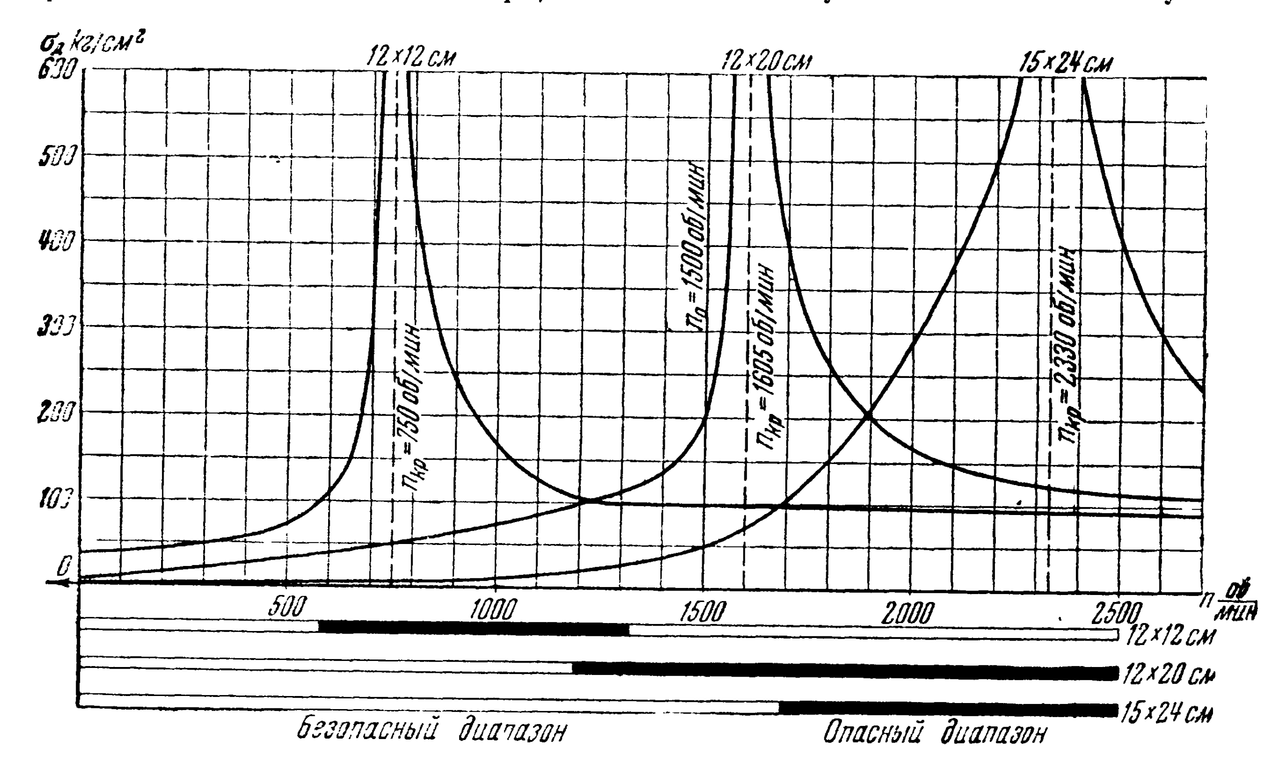
---

[1]) При $\omega>168$ следует брать минус, при $\omega<168$ следует брать плюс.

Таблица 35. **Результаты расчёта балок примера № 136.**

Размеры балок в *см*	Вес Q_1 в *кг*	σ_c *кг/см*^{2}	$n_{кр}$ об/мин	$[n]_1$ об/мин	$[n]_2$ об/мин	β при $n=n_0$	$\sigma_д$ *кг/см*^{2} при $n=n_0$
20 × 12	23	13,1	1605	1190	3760	3,68	203
15 × 24	34,5	7,42	2330	1690	7260	1,524	51
12 × 12	13,8	35,7	750	580	1320	0,432	98

в балке могут возникнуть сотрясения. Поэтому опасный диапазон следует проходить достаточно быстро, чтобы амплитуда колебаний не успела



Фиг. 595.

значительно увеличиться. Лучше поэтому размеры балок назначить по первому варианту.

На фиг. 595 приведены графики, иллюстрирующие произведённые выше подсчёты.

ГЛАВА XXXVI.

НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ УДАРЕ.

§ 225. Основные положения.

Явление удара получается в том случае, когда скорость рассматриваемой части конструкции или соприкасающихся с ней частей изменяется в *очень короткий период* времени.

При забивке свай тяжёлый груз падает с некоторой высоты на верхний торец сваи и погружает её в грунт; баба останавливается

почти мгновенно, вызывая удар. Аналогичные явления происходят при ковке; удар испытывают и проковываемое изделие и шток молота с бойком, так как последний очень быстро останавливается при соприкосновении с изделием. Во время удара между обеими ударяющимися деталями возникают весьма большие взаимные давления. Скорость ударяющего тела *за очень короткий* промежуток времени изменяется и в частном случае падает до нуля; тело останавливается. Значит, на него от ударяемой детали передаются очень большие ускорения, направленные в сторону, обратную его движению, т. е. передаётся реакция $P_д$, равная произведению массы *ударяющего* тела на это ускорение.

Обозначая это ускорение через a, можно написать, что реакция $P_д = \frac{Q}{g} a$, где Q — вес ударяющего тела. По закону равенства действия и противодействия на ударяемую часть конструкции передаётся такая же сила, но обратно направленная (фиг. 596). Эти силы и вызывают напряжения в обоих телах.

Фиг. 596.

Таким образом, в *ударяемой* части конструкции возникают такие напряжения, как будто к ней была приложена *сила инерции* ударяющего тела; мы можем вычислить эти напряжения, рассматривая (§ 215) силу инерции $P_д$ как *статическую* нагрузку нашей конструкции. Затруднение заключается в вычислении этой силы инерции. Продолжительности удара, т. е. величины того промежутка времени, в течение которого происходит падение скорости до нуля, мы не знаем. Поэтому остаётся неизвестной величина ускорения a, а стало быть, и силы $P_д$. Таким образом, хотя вычисление напряжений при ударе представляет собой частный случай задачи учёта сил инерции (§ 215), однако для вычисления силы $P_д$ и связанных с ней напряжений и деформаций здесь приходится применять иной приём и пользоваться законом сохранения энергии.

При ударе происходит очень быстрое превращение одного вида энергии в другой: кинетическая энергия ударяющего тела превращается в потенциальную энергию деформации. Выражая эту энергию в функции силы $P_д$ или напряжений, или деформаций (§ 125), мы получаем возможность вычислить эти величины.

Фиг. 597.

§ 226. Общий приём вычисления напряжений при ударе.

А. Предположим, что очень жёсткое тело A весом Q, деформацией которого можно пренебречь, падая с некоторой высоты H, ударяет по другому телу B, опирающемуся на упругую систему C (фиг. 597). В частном случае это может

быть падение груза на конец призматического стержня, другой конец которого закреплён (продольный удар), падение груза на балку, лежащую на опорах (изгибающий удар), и т. п.

В течение очень короткого промежутка времени упругая система C испытает некоторую деформацию. Обозначим через $\delta_д$ перемещение тела B (местной деформацией которого пренебрежём) в направлении удара. В упомянутых частных случаях при продольном ударе за перемещение $\delta_д$ соответственно нужно считать продольную деформацию стержня $\Delta l_д$, при изгибающем ударе — прогиб балки $f_д$ в ударяемом сечении и т. п. В результате удара в системе C возникнут напряжения $p_д$ ($\sigma_д$ или $\tau_д$ — в зависимости от вида деформации).

Полагая, что кинетическая энергия T ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию $U_д$ деформации упругой системы, можем написать:

$$T = U_д. \tag{36.1}$$

Так как к моменту окончания деформации ударяющее тело пройдёт путь $H + \delta_д$, то его запас энергии будет измеряться произведённой им работой $A_д$ и будет равен:

$$T = A_д = Q(H + \delta_д). \tag{36.2}$$

Вычислим теперь $U_д$. При статической деформации потенциальная энергия $U_с$ численно равна половине произведения действующей силы на соответствующую деформацию (§ 125):

$$U_с = \frac{1}{2} Q\delta_с. \tag{36.3}$$

Статическая деформация $\delta_с$ в ударяемом сечении может быть вычислена по закону Гука, который в общем виде можно записать так:

$$\delta_с = Q : c \quad \text{или} \quad Q = c\delta_с.$$

Здесь (см. § 222) c — некоторый коэффициент пропорциональности (называемый иногда жёсткостью системы); он зависит от свойств материала, формы и размеров тела, вида деформации и положения ударяемого сечения. Так, при простом растяжении или сжатии $\delta_с = \Delta l_с = \frac{Ql}{EF}$ и $c = \frac{EF}{l}$; при изгибе балки, шарнирно закреплённой по концам, сосредоточенной силой Q посредине пролёта $\delta_с = f_{с\,max} = \frac{Ql^3}{48EJ}$ и $c = \frac{48EJ}{l^3}$; и т. д.

Таким образом, формула (36.3) может быть переписана так:

$$U_с = \frac{1}{2} Q\delta_с = \frac{c}{2}\delta_с^2.$$

В основу этой формулы положены две предпосылки: а) справедливость закона Гука и б) постепенный — от нуля до окончательного значения — рост силы Q, напряжений $p_с$ и пропорциональных им деформаций $\delta_с$.

Опыты с определением модуля упругости по наблюдениям над упругими колебаниями стержней показывают, что и при динамическом действии нагрузок закон Гука остаётся в силе, и модуль упругости сохраняет свою величину. Что касается характера нарастания напряжений и деформаций, то и при ударе деформация происходит, хотя и быстро, но не мгновенно; $\delta_д$ постепенно растёт в течение очень короткого промежутка времени от нуля до окончательного значения; параллельно росту деформаций возрастают и напряжения $p_д$.

Реакция системы C на действие упавшего груза Q (назовём её $P_д$) является следствием развития деформации $\delta_д$; она растёт параллельно $\delta_д$ от нуля до окончательной, максимальной величины и, если напряжения $p_д$ не превосходят предела пропорциональности материала, связана с ней законом Гука:

$$\delta_д = P_д : c,$$

где c — упомянутый выше коэффициент пропорциональности, сохраняющий своё значение и при ударе.

Таким образом, обе предпосылки для правильности формулы (36.3) принимаются и при ударе. Поэтому можно считать, что вид формулы для $U_д$ при ударе будет тот же, что и при статическом нагружении системы C силой инерции $P_д$, т. е.

$$U_д = \frac{1}{2} P_д \delta_д = \frac{c}{2} \delta_д^2 = \frac{Q}{2\delta_c} \delta_д^2. \tag{36.4}$$

(Здесь учтено, что по предыдущему $c = Q : \delta_c$.) Подставляя значения T и $U_д$ в уравнение (36.1), получаем:

$$Q(H + \delta_д) = \frac{Q}{2\delta_c} \delta_д^2 \tag{36.5}$$

или

$$\delta_д^2 - 2\delta_c \delta_д - 2H\delta_c = 0. \tag{36.6}$$

Отсюда

$$\delta_д = \delta_c \pm \sqrt{\delta_c^2 + 2H\delta_c}$$

или, удерживая перед радикалом для определения наибольшей величины деформации системы в направлении удара знак плюс, получаем:

$$\delta_д = \delta_c \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}\right] = K_д \delta_c. \tag{36.7}$$

Так как напряжения и усилия по закону Гука пропорциональны деформации, то

$$p_д = p_c \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}\right] = K_д p_c \tag{36.8}$$

и

$$P_д = Q \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}\right] = K_д Q. \tag{36.9}$$

Из этих формул видно, что величина динамических деформаций, напряжений и усилий зависит от величины статической деформации, т. е. от жёсткости и продольных размеров ударяемого тела; ниже это дополнительно будет показано на отдельных примерах. Величина

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \tag{36.10}$$

в данном случае представляет собой динамический коэффициент. Заменяя в формуле (36.10) H на $\frac{v^2}{2g}$, где v — скорость ударяющего тела в начальный момент удара, получаем:

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_c}}. \tag{36.11}$$

Кроме того, так как

$$\frac{2H}{\delta_c} = \frac{QH}{\frac{1}{2}Q\delta_c} = \frac{T_0}{U_c},$$

где $T_0 = QH$ — энергия ударяющего тела к моменту начала удара, то выражение для динамического коэффициента может быть представлено ещё и в таком виде:

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_c}}. \tag{36.12}$$

Б. Если мы в формулах (36.7) и (36.8) положим $H = 0$, т. е. просто сразу приложим груз Q, то $\delta_д = 2\delta_c$ и $p_д = 2p_c$; при внезапном приложении силы Q деформации и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии той же силы.

Наоборот, если высота падения груза H (или скорость v) велика по сравнению с деформацией δ_c, то в подкоренном выражении формул (36.7) — (36.11) можно пренебречь единицей по сравнению с величиной отношения $\frac{2H}{\delta_c}$. Тогда для $\delta_д$ и $p_д$ получаются следующие выражения:

$$\delta_д = \delta_c\left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}\right) \quad и \quad p_д = p_c\left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}\right). \tag{36.13}$$

При очень большой величине отношения $\frac{2H}{\delta_c}$ можно пренебречь и единицей, стоящей перед корнем, т. е. написать:

$$\delta_д = \delta_c\sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \quad и \quad p_д = p_c\sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}. \tag{36.14}$$

Динамический коэффициент в этом случае определяется по формуле

$$K_д = \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{T_0}{U_c}}. \tag{36.15}$$

Необходимо отметить, что в то время как пренебрежение единицей в подкоренном выражении допустимо уже при $\frac{2H}{\delta_с} \geqslant 10$ (неточность приближённых формул будет не больше 5%), пренебрежение единицей, стоящей перед корнем, допустимо лишь при очень большой величине отношения $\frac{2H}{\delta_с}$. Так, например, для того чтобы приближённые формулы (36.14) и (36.15) давали погрешность не более 10%, отношение $\frac{2H}{\delta_с}$ должно быть больше 110.

Формулы $\delta_д = K_д \delta_с$ и $p_д = K_д p_с$, в которых $K_д$ выражается через $\frac{T_0}{U_с}$ (36.12), могут быть использованы также для решения задачи о встречном ударе тел, двигающихся с некоторой скоростью, при определении напряжений в цилиндре двигателя внутреннего сгорания, вызванных резким повышением давления газа при вспышке горючей смеси и др. На этом основании их можно считать общими формулами для расчёта на удар.

Обобщая сказанное выше, можем наметить следующий общий приём решения задач на определение напряжений при ударе. Применяя закон сохранения энергии, надо:

1) вычислить кинетическую энергию ударяющего тела T;

2) вычислить потенциальную энергию $U_д$ тел, воспринимающих удар, под нагрузкой их силами инерции при ударе; потенциальная энергия должна быть выражена через напряжение ($\sigma_д$, $\tau_д$) в каком-либо сечении, через деформацию (удлинение, прогиб) или через силу инерции $P_д$ ударяющего тела;

3) приравнять величины $U_д$ и T и из полученного уравнения найти или непосредственно динамическое напряжение, или деформацию, а по ней, пользуясь законом Гука, напряжение или силу $P_д$ и соответствующие ей динамические напряжения и деформации.

Описанный общий приём расчёта на удар предполагает, что вся кинетическая энергия ударяющего тела целиком переходит в потенциальную энергию деформации упругой системы. Это предположение не точно. Кинетическая энергия падающего груза частично превращается в тепловую энергию и энергию неупругой деформации основания, на которое опирается система.

Вместе с тем при высоких скоростях удара деформация за время удара не успевает распространиться на весь объём ударяемого тела и в месте удара возникают значительные местные напряжения, иногда превосходящие предел текучести материала. Так, например, при ударе свинцовым молотком по стальной балке большая часть кинетической энергии превращается в энергию местных деформаций. Подобное же явление может иметь место даже и в том случае, когда скорость удара мала, но жёсткость или масса ударяемой конструкции велика.

Указанные случаи соответствуют большим величинам дроби $\frac{2H}{\delta_c}$. Поэтому можно сказать, что описанный выше метод расчёта применим, пока дробь $\frac{2H}{\delta_c}$ не превышает определённой величины. Более точные исследования показывают, что ошибка не превышает 10%, если $\frac{2H}{\delta_c} \leqslant 100$. Так как эта дробь может быть представлена в виде отношения $\frac{T_0}{U_c}$ (см. выше), *то можно сказать, что изложенный метод применим, пока энергия удара превышает не более чем в* 100 *раз потенциальную энергию деформации,* соответствующую *статической* нагрузке конструкции весом ударяющего груза. Учёт массы ударяемого тела при ударе (см. § 231) позволяет несколько расширить пределы применимости этого метода в тех случаях, когда масса ударяемого тела велика.

Более точная теория удара излагается в курсах теории упругости.

§ 227. Частные случаи вычисления напряжений и проверки прочности при ударе.

А. Вид формул, выведенных в § 226, показывает, какие большие качественные различия ведёт за собой количественное изменение периода действия силы на тело.

Рассмотрим некоторые случаи удара при простейших деформациях. При этом для нахождения коэффициента динамичности применим основные формулы (36.10) и (36.12) и приближённую формулу (36.15).

Для определения $\delta_д$, $p_д$ и $P_д$ используем зависимости:

$$\delta_д = K_д \delta_c, \quad p_д = K_д p_c \quad \text{и} \quad P_д = K_д Q.$$

В случае продольного растягивающего или сжимающего удара (фиг. 598)

$$\delta_c = \Delta l_c = \frac{Ql}{EF}, \quad p_c = \sigma_c = \frac{Q}{F}$$

и

$$U_c = \frac{Q^2 l}{2EF} = \frac{\sigma_c^2 Fl}{2E} = \frac{\Delta l_c^2 EF}{2l}.$$

Фиг. 598.

Для вычисления динамического коэффициента $K_д$ может быть выбрано одно из следующих выражений:

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 EF}{Q^2 l}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 E}{\sigma_c^2 Fl}} =$$
$$= 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 l}{\Delta l_c^2 EF}}. \qquad (36.16)$$

После этого без затруднений вычисляются $\Delta l_д$, $\sigma_д$ и $P_д$.

Приближённая формула для вычисления напряжений в данном частном случае получает такой вид:

$$K_д = \frac{1}{\sigma_c}\sqrt{\frac{2T_0E}{Fl}} \quad \text{и} \quad \sigma_д = \sigma_c K_д = \sqrt{\frac{2T_0E}{Fl}}. \qquad (36.17)$$

Замечаем, что как при статической, так и при динамической нагрузке напряжение в сжатом стержне зависит от величины сжимающей силы и от площади поперечного сечения стержня.

Но при статическом действии груза Q передающаяся на стержень сила равна Q и не зависит от размеров и материала стержня, при ударе же величина силы $P_д$, вызывающей напряжения в стержне, зависит от ускорения, передающегося от ударяемого тела на ударяющее, т. е. от величины промежутка времени, в течение которого изменяется скорость ударяющего тела. В свою очередь этот промежуток времени зависит от величины динамической продольной деформации $\Delta l_д$, от *податливости* стержня. Чем эта величина больше, т. е. чем меньше модуль E и чем больше длина стержня l, тем больше продолжительность удара, меньше ускорение и меньше давление $P_д$.

Таким образом, при *равномерном* распределении напряжений, одинаковом во всех сечениях стержня, *динамическое* напряжение будет *уменьшаться* с увеличением площади поперечного сечения стержня и с увеличением его податливости (т. е. с увеличением длины и уменьшением модуля упругости E); именно поэтому смягчают удар всякие рессоры и пружины, расположенные между ударяющимися деталями. Всё это и отражают приведённые выше формулы. В частности, исходя из формул (36.17), с известным приближением можно считать, что при продольном ударе величина напряжений зависит уже не от площади, а от объёма стержня.

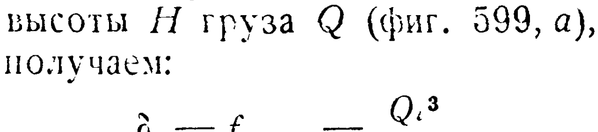
Найдя по формулам (36.8) и (36.16) или (36.17) величину динамического напряжения, мы можем теперь написать условие прочности в виде

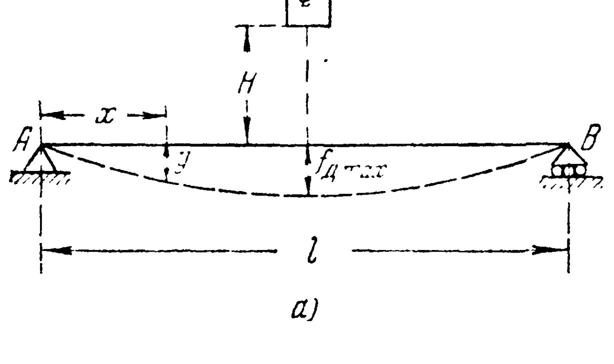
$$\sigma_д \leqslant [\sigma_д], \qquad (36.18)$$

где $[\sigma_д]$ — допускаемая величина нормальных напряжений при ударе, равная для пластичного материала $[\sigma_д] = \frac{\sigma_т}{k_д}$. Величину коэффициента запаса $k_д$ можно было бы выбрать равной величине основного коэффициента запаса k_0 при статическом действии нагрузок (т. е. $1{,}5 \div 1{,}6$, § 17), так как динамичность нагрузки уже отражена в формулах (36.16) и (36.17); однако, ввиду некоторой упрощённости изложенного метода расчёта, этот коэффициент принимают несколько повышенным — до 2. Кроме того, обычно в этих случаях применяют материал более высокого качества (в отношении однородности и пластических свойств).

Б. При изгибе величина статической деформации δ_c, представляющей собой статический прогиб балки f_c в месте удара, зависит от схемы нагружения и условий опирания балки.

Так например, для балки пролётом l, шарнирно закреплённой по концам и испытывающей посредине пролёта удар от падающего с высоты H груза Q (фиг. 599, *а*), получаем:





$$\delta_c = f_{c\,max} = \frac{Ql^3}{48EJ},$$

$$P_c = \sigma_{c\,max} = \frac{Ql}{4W}$$

и

$$U_c = \frac{Qf_{c\,max}}{2} = \frac{Q^2l^3}{96EJ};$$

для консоли, испытывающей удар от груза Q, падающего на свободный конец консоли (фиг. 599, *б*):

$$\delta_c = f_{c\,max} = \frac{Ql^3}{3EJ},$$

$$P_c = \sigma_{c\,max} = \frac{Ql}{W}$$

и

$$U_c = \frac{Qf_{c\,max}}{2} = \frac{Q^2l^3}{6EJ}.$$

Фиг. 599.

Подставляя в формулу для коэффициента динамичности $K_д$ значения $\delta_c = f_{c\,max}$ или U_c, находим $K_д$, а затем и величину динамических напряжений и деформаций. Так например, в случае балки на двух опорах при вычислении динамического напряжения $\sigma_{д\,max}$ имеем такую формулу:

$$\sigma_{д\,max} = K_д \sigma_{c\,max} = \frac{Ql}{4W}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}}\right]. \qquad (36.19)$$

Условие прочности (36.18) в этом случае напишется так:

$$\sigma_{д\,max} = \frac{Ql}{4W}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}}\right] \leqslant [\sigma_д] = \frac{\sigma_т}{k_д}. \qquad (36.20)$$

Приближённые формулы для вычисления $f_{д\,max}$ и $\sigma_{д\,max}$ в случае удара по балке на двух опорах (фиг. 599, *а*) получают такой вид:

$$f_{д\,max} = K_д f_{c\,max} = f_{c\,max}\sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \frac{Ql^3}{48EJ}\sqrt{\frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}} = \sqrt{\frac{T_0l^3}{24EJ}} \qquad (36.21)$$

и

$$\sigma_{д\,max} = K_д \sigma_{c\,max} = \frac{Ql}{4W}\sqrt{\frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}} = \sqrt{\frac{6T_0EJ}{W^2l}}. \qquad (36.22)$$

Аналогичные выражения для $f_{д\,max}$ и $\sigma_{д\,max}$ получаются и в случае удара по консоли (фиг. 599, *б*). Имея в виду, что

$$J = i^2 F, \quad W = \frac{J}{z_{max}}$$

и

$$\frac{J}{W^2} = \left(\frac{z_{max}}{i}\right)^2 \frac{1}{F},$$

можем представить формулу (36.22) ещё и в таком виде:

$$\sigma_{д\,max} = \frac{z_{max}}{i} \sqrt{\frac{6T_0E}{Fl}}. \tag{36.23}$$

Из приближённой формулы (36.23) видно, что динамические напряжения при изгибе балки зависят от модуля упругости материала, объёма балки, формы её поперечного сечения $\left(\text{отношение } \frac{z_{max}}{i}\right)$, а также от схемы нагружения и условий опирания балки (в данном случае в подкоренном выражении стоит $6T_0$; для балок, иначе загружённых и закреплённых, числовой коэффициент у T_0 будет другим). Таким образом, в балке прямоугольного сечения высотой h и шириной b, поставленной на ребро или положенной плашмя, наибольшие напряжения при ударе будут одинаковы и равны (по приближённой формуле):

$$\sigma_{д\,max} = \sqrt{\frac{18T_0E}{Fl}},$$

так как в обоих случаях

$$\frac{z_{max}}{i} = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bh}}} = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{hb^3}{12bh}}} = \sqrt{3}.$$

Как известно, при одинаковой статической нагрузке наибольшие напряжения в балке, положенной плашмя, будут в отношении $\frac{h}{b}$ больше, чем напряжения в балке, поставленной на ребро. Сказанное выше, разумеется, справедливо лишь до тех пор, пока явление удара происходит в пределах упругости.

Сопротивление балок ударным нагрузкам зависит и от момента сопротивления и от жёсткости балки. Чем больше податливость, деформируемость балки, тем бо́льшую живую силу удара она может принять при одних и тех же допускаемых напряжениях. Наибольший прогиб балка даёт в том случае, когда во всех её сечениях наибольшие напряжения будут одинаковыми, т. е. если это будет *балка равного сопротивления*; такие балки при одном и том же допускаемом напряжении дают бо́льшие прогибы, чем балки

постоянного сечения, и значит, могут поглощать бо́льшую энергию удара. Поэтому рессоры обычно и делают в форме балок равного сопротивления.

В. Рассмотрим теперь задачу определения напряжений при скручивающем ударе.

Если вращающийся вал внезапно останавливается торможением одного из его концов, а на другом его конце на него передаётся живая сила маховика T_0, скручивающая вал, то напряжения также могут быть определены указанным выше методом. Вал будет скручиваться двумя парами сил (силы инерции маховика и силы торможения) с моментом M.

В данном случае

$$\delta_c = \varphi_c = \frac{Ml}{GJ_p}, \quad p_c = \tau_{c\,max} = \frac{M}{W_p}$$

и

$$U_c = \frac{M^2 l}{2GJ_p} = \frac{\tau_{c\,max}^2 l W_p^2}{2GJ_p} = \frac{\varphi_c^2 GJ_p}{2l}.$$

Следовательно,

$$\delta_д = \varphi_д = K_д \varphi_c = \varphi_c \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 l}{GJ_p}} \tag{36.24}$$

и

$$p_д = \tau_{д\,max} = K_д \tau_{c\,max} = \tau_{c\,max} \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 GJ_p}{lW_p^2}} = 2\sqrt{\frac{T_0 G}{Fl}}, \tag{36.25}$$

так как

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2}, \quad W_p = \frac{\pi r^3}{2} \quad и \quad \frac{J_p}{W_p^2} = \frac{2}{\pi r^2} = \frac{2}{F}.$$

Имея в виду, что живая сила маховика T_0 равна

$$T_0 = \frac{J_0}{2}\omega^2,$$

где J_0 — момент инерции массы маховика, а ω — угловая скорость, можем написать:

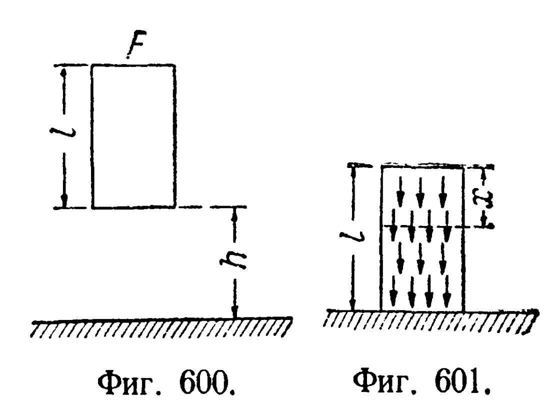
$$\tau_{д\,max} = \omega \sqrt{\frac{2J_0 G}{Fl}}. \tag{36.26}$$

Замечаем, что и при скручивающем ударе наибольшие напряжения зависят от модуля упругости и от объёма вала.

§ 228. Напряжения при продольном ударе стержня о неподвижную плоскость.

На практике встречаются задачи определения величины напряжения в самом *ударяющем* теле, например, при расчёте штока ковочного молота. Наиболее опасным для прочности штока будет момент окончания ковки, когда проковываемое изделие почти не деформируется и вся энергия удара поглощается деформацией штока.

Схематически этот случай соответствует удару призматического стержня весом Q о неподвижную плоскость (фиг. 600). Высота падения стержня пусть будет h, площадь поперечного сечения F, длина l, объёмный вес γ. Кинетическая энергия стержня в момент удара равна $T_0=\gamma Flh=Qh$. Мы считаем, что эта энергия целиком переходит в потенциальную энергию деформации стержня. В момент удара, как мы видели выше, между стержнем и неподвижной плоскостью возникают давления, равные силе инерции ударяющего тела, слагающейся из сил инерции отдельных его частиц. Принимая, что в момент удара все элементы стержня испытывают одно и то же ускорение (направленное вверх), получаем, что напряжения в нашей системе будут такими же, как будто ко всем частицам падающего стержня были приложены равномерно распределённые по объёму силы инерции (фиг. 601).



Фиг. 600. Фиг. 601.

Таким образом, динамическая нагрузка стержня будет подобна статической нагрузке его собственным весом. Поэтому зависимость между его потенциальной энергией деформации при ударе $U_д$ и наибольшим динамическим напряжением (в нижнем сечении) $\sigma_{д\,max}$ будет такой же, как связь между U_c и $\sigma_{c\,max}$ при статической нагрузке собственным весом стержня, опёртого нижним концом. В этом случае напряжения по любому сечению, отстоящему на x от верхнего конца (фиг. 601), равны (§ 29):

$$\sigma_x=\gamma x=\sigma_{c\,max}\frac{x}{l},$$

где $\sigma_{c\,max}=\gamma l$ — напряжение по нижнему сечению.

Энергия, накопленная в элементе длиной dx у сечения с абсциссой x, равна:

$$dU_c=\frac{\sigma_x^2}{2E}dx\cdot F=\frac{\sigma_{c\,max}^2}{2E}F\frac{x^2}{l^2}dx.$$

Вся энергия U_c равна:

$$U_c=\int_0^l dU_c=\frac{F\sigma_{c\,max}^2}{2El^2}\int_0^l x^2\,dx=\frac{\sigma_{c\,max}^2}{6E}Fl.$$

При ударе

$$U_д=\frac{\sigma_{д\,max}^2}{6E}Fl.$$

Приравнивая величину $U_д$ кинетической энергии удара $T_0=\gamma Flh=Qh$, получаем:

$$\frac{\sigma_{д\,max}^2}{6E}Fl=\gamma Flh=T_0,$$

откуда

$$\sigma_{д\,max}=\sqrt{\frac{6ET_0}{Fl}}=\sqrt{6E\gamma h}.$$

Так как $h=\frac{v^2}{2g}$, где v — скорость стержня в момент удара, то

$$\sigma_{д\,max}=v\sqrt{\frac{3E\gamma}{g}}. \qquad (36.27)$$

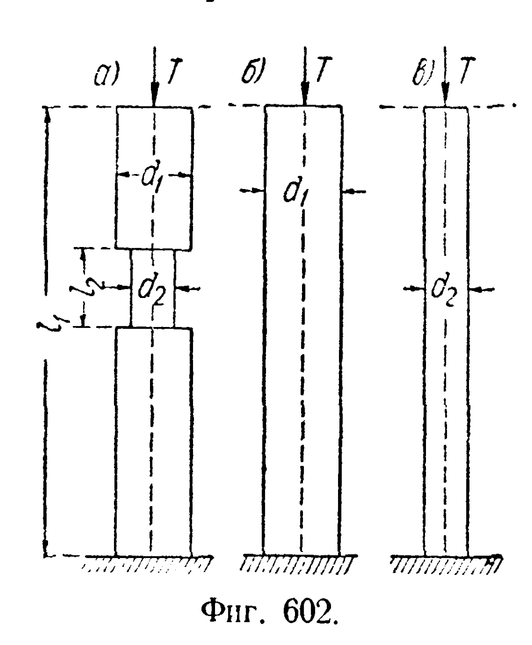
Полученный результат можно сформулировать ещё иначе:

$$\sigma_{д\,max}=\sqrt{\frac{6ET_0}{Fl}}=\sqrt{\frac{3\cdot 2EQh}{Fl}}, \qquad (36.28)$$

т. е. напряжение в ударяющем стержне будет таким же, как будто он получил удар от другого стержня с живой силой, в три раза большей.

§ 229. Напряжения в стержнях переменного сечения при ударе.

В § 227 показано, что для снижения напряжений при продольном ударе следует увеличивать объём стержня. Однако надо помнить, что это правильно лишь для того случая, когда площадь сечения стержня по его длине не меняется, — напряжения во всех сечениях одинаковы. Совершенно иначе может обстоять дело, если разные участки длины стержня будут иметь неодинаковую площадь поперечного сечения (фиг. 602).



Фиг. 602.

Мы знаем (формулы (36.16) или (36.17)), что динамическое напряжение при продольном ударе зависит и от площади поперечного сечения стержня и от его податливости, деформируемости. Наибольшие напряжения в стержне с выточкой (фиг. 602, *а*) будут, таким образом, определяться величиной наименьшей площади (в месте выточки) и *сжимаемостью* стержня, которая зависит от деформаций уже всего стержня, а не только его ослабленной части.

Понижение напряжений в этом случае может быть достигнуто двумя путями. Можно увеличить площадь в наиболее ослабленном месте (если конструкция это позволяет) — вернуться к стержню одного диаметра d_1 (фиг. 602, *б*); в этом случае мы увеличиваем площадь и в меньшей степени уменьшаем сжимаемость. Сила инерции немного возрастёт, но в большей степени возрастёт площадь в ослабленном сечении, и напряжение понизится.

Однако обычно этот (первый) путь неприменим, ибо конструкция может требовать сохранения выточки. Тогда для повышения прочности стержня необходимо увеличить его податливость, уменьшая площадь его сечения в утолщённой части. Если мы выполним весь стержень диаметром d_2 (фиг. 602, *в*), то этим значительно увеличим сжимаемость стержня, уменьшим силу $P_д$ и динамическое напряжение. Таким

образом, снижение напряжений может быть достигнуто двумя путями, ведущими *к выравниванию* напряжений, — *увеличением* объёма путём уничтожения выточки и *уменьшением* объёма за счёт уменьшения площади утолщённой части.

Эти выводы легко проверить расчётом; определим наибольшие динамические напряжения, вызванные одним и тем же продольным ударом с запасом энергии $T_0 = QH$ для трёх стержней, показанных на фиг. 602, *а*, *б* и *в*. Площадь утолщённой части стержня *а* назовём F_1, а тонкой F_2; обозначим $\frac{F_2}{F_1} = q$ и $\frac{l_2}{l_1} = p$. Напряжения в стержнях найдём по приближённым формулам (36.14) и (36.17). Наибольшее динамическое напряжение в стержне *а* по формуле (36.14):

$$p_д = \sigma_a = \sigma_c \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}} = \sigma_2 \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}} = \frac{Q}{F_2}\sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}} = \sqrt{\frac{2T_0Q}{F_2^2 \Delta l_c}}.$$

Так как

$$\Delta l_c = \frac{Ql_2}{EF_2} + \frac{Q(l_1 - l_2)}{EF_1} = \frac{Ql_1}{EF_2}[p + q(1-p)],$$

то

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{2T_0Q}{F_2^2 \frac{Ql_1}{EF_2}[p + q(1-p)]}} = \sqrt{\frac{2T_0E}{F_1 l_1 q [p + q(1-p)]}}.$$

Напряжения в стержнях постоянного сечения *б* и *в* найдём по формуле (36.17):

$$\sigma_б = \sqrt{\frac{2T_0E}{F_1 l_1}} \quad \text{и} \quad \sigma_в = \sqrt{\frac{2T_0E}{F_2 l_1}} = \sqrt{\frac{2T_0E}{F_1 q l_1}};$$

так как

$$[p + q(1-p)] < q < 1, \text{ то } \sigma_a > \sigma_в > \sigma_б.$$

Так, если $\frac{d_2}{d_1} = 0{,}8$, а $\frac{l_2}{l_1} = 0{,}1$, то $q = 0{,}64$ и $p = 0{,}1$; в этом случае вычисления дают: $\sigma_a = 1{,}52\sigma_б$; $\sigma_в = 0{,}82\sigma_a = 1{,}25\sigma_б$. Таким образом, наличие выточки, уменьшающей диаметр на 20% на одной десятой длины стержня, вызывает повышение напряжений на 50%; если теперь дать этому стержню минимальную площадь по всей длине, то напряжения снизятся примерно на 20%.

Хотя эти подсчёты и сделаны по приближённым формулам, однако найденные таким путём соотношения между σ_a, $\sigma_б$ и $\sigma_в$ оказываются достаточно близкими к тем, которые могут быть получены по более точной формуле (36.8), если энергия удара T_0 не очень мала.

§ 230. Практические выводы из полученных результатов.

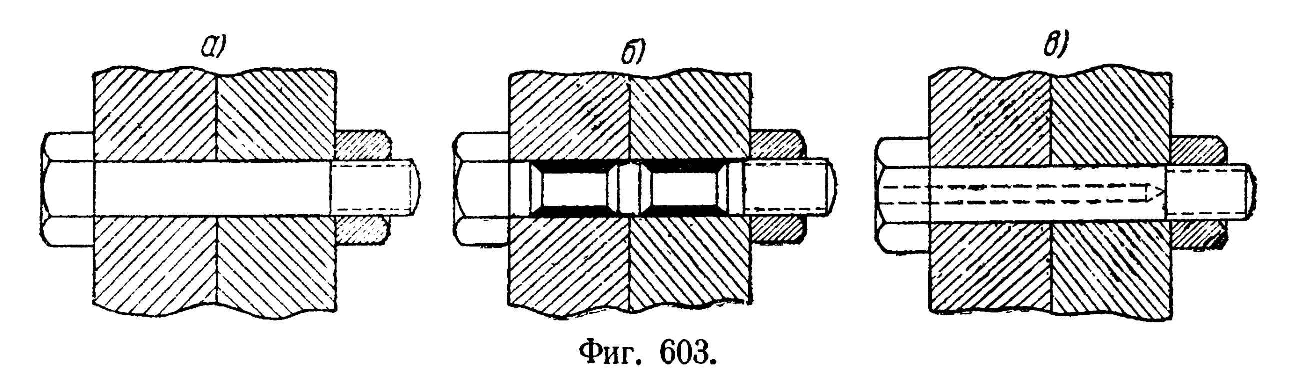
Результаты приведённых выше подсчётов имеют громадное практическое значение. Прежде всего они показывают, что характер сопротивления стержней удару качественно резко отличается от сопротивления их статической деформации. Утолщение одной половины

стержня при статическом сжатии не вызывает изменения напряжений в сечениях другой половины; при ударе же оно *повышает* их. Местные *уменьшения* площади поперечного сечения на *небольшой* длине стержня вызывают *резкое* повышение напряжений.

Для снижения напряжений надо стремиться, главным образом, к увеличению податливости стержня путём увеличения его длины, добавления буферной пружины, замены материала другим, с более низким модулем упругости, *выравнивания* площадей поперечных сечений. Наиболее эффективным может оказаться выравнивание площадей поперечных сечений по *наименьшей*.

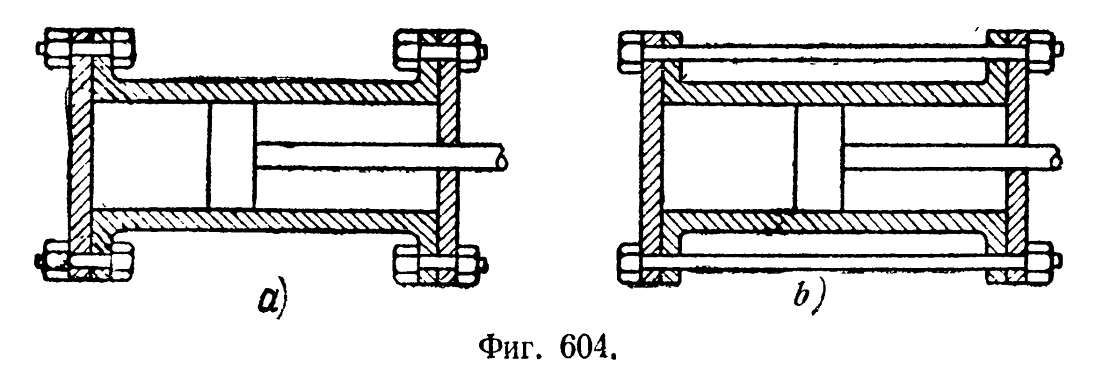
Поэтому при конструировании стержней, работающих на удар, надо добиваться постоянной площади сечения по всей длине стержня; местные *утолщения* допустимы лишь на небольших участках длины; местные же выточки небольшой протяжённости *крайне нежелательны*. Если при *таких условиях* не удаётся сконструировать достаточно прочный стержень, необходимо удлинение стержня или равномерное увеличение площади.

В качестве примера можно привести болт, передающий от одной части конструкции на другую растягивающий удар. Конструкция, показанная на фиг. 603, *a*, будет плохо сопротивляться удару, так



Фиг. 603.

как участок болта с нарезкой, имеющий меньший диаметр, будет работать как выточка. Бо́льшая часть энергии удара будет поглощаться частью болта, имеющей нарезку. Обрыв весьма вероятен.



Фиг. 604.

Для улучшения конструкции надо заставить весь объём болта более или менее равномерно поглощать энергию удара; для этого надо сделать его площадь всюду (или почти всюду) равной площади по

внутреннему диаметру нарезки. Этого можно достигнуть или обтачиванием тела болта (фиг. 603, *б*), или высверливанием в нём канала (фиг. 603, *в*).

В качестве примера увеличения сопротивления болтов путём их удлинения можно привести конструкцию, изображённую на фиг. 604, *а* и *б*. Крышки цилиндра бурового инструмента иногда испытывают сильные удары поршня. Короткие болты, прикрепляющие крышку к цилиндру по варианту фиг. 604, *а*, давали обрыв. Выход был найден путём удлинения болтов по варианту фиг. 604, б.

§ 231. Учёт массы упругой системы, испытывающей удар.

При вычислении напряжений при ударе мы считали, что вся энергия удара переходит в потенциальную энергию ударяемого тела. В действительности часть её переходит в энергию *местных* деформаций, происходящих около места удара. При более или менее значительной массе ударяемого тела эта поправка может оказаться существенной.

Исследуем, как отразится на величине расчётных напряжений при ударе учёт массы ударяемого тела. В качестве примера рассмотрим случай удара при изгибе (фиг. 599, *а*). В момент удара груз Q имел скорость v, а балка была неподвижна. В течение очень короткого промежутка времени все элементы балки приобретут некоторую скорость, а груз несколько замедлит своё движение.

Можно считать, что в этот период удара балка практически останется *прямой*, а уменьшение скорости груза будет происходить за счёт *местных деформаций* как балки, так и самого груза. Этот период окончится, когда скорости груза и балки в месте удара сравняются между собой и достигнут некоторого общего значения v_1; после этого *начнётся изгиб* балки под действием груза Q, движущегося со скоростью v_1 вместе с получившим удар сечением, как бы прикреплённым к грузу.

В этот второй период удара, когда имеют место деформации уже всей балки, кинетическая энергия груза и движущейся балки переходит в потенциальную энергию изгиба. Для вычисления этой энергии необходимо знать скорость груза v_1 и скорости остальных сечений балки.

В течение первого периода удара в основном происходит преобразование механического движения груза в механическое же движение груза и балки. Так как часть кинетической энергии падающего груза переходит в энергию местных деформаций, то живая сила груза и балки в конце первого периода удара меньше их живой силы до удара.

Живая сила груза и балки до удара равна живой силе падающего груза $\frac{Qv^2}{2g}$ (балка неподвижна). В конце первого периода удара

живая сила груза равна $\frac{Qv_1^2}{2g}$. Полагая, что при ударе балка гнётся по той же кривой, что и при статической нагрузке силой инерции, приложенной посредине пролёта, для вычисления живой силы балки в конце первого периода удара можем воспользоваться выводами § 223. По формуле (35.32) живая сила балки равна половине произведения приведённой массы балки на квадрат скорости, т. е. равна $\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{2g}v_1^2$. Таким образом, потерянная при ударе живая сила T может быть вычислена по формуле:

$$T=\frac{Qv^2}{2g}-\left(\frac{Qv_1^2}{2g}+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{2g}v_1^2\right)=\frac{Q}{2g}\left[v^2-v_1^2\left(1+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{Q}\right)\right]. \quad (36.29)$$

Потерянная скорость груза есть $v-v_1$, соответствующая ей живая сила равна $\frac{Q}{2g}(v-v_1)^2$. Живая сила всей балки, соответствующая скорости v_1-0, приобретённой получившим удар сечением балки, равна живой силе балки в конце первого периода удара. Поэтому суммарная живая сила груза и балки T_1, соответствующая потерянным и приобретённым скоростям, может быть вычислена по формуле:

$$T_1=\frac{Q}{2g}(v-v_1)^2+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{2g}(v_1-0)^2=$$
$$=\frac{Q}{2g}\left[v^2-2vv_1+v_1^2\left(1+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{Q}\right)\right]. \quad (36.30)$$

Приравнивая выражения для T и T_1 по формулам (36.29) и (36.30), получаем:

$$\frac{Q}{2g}\left[v^2-v_1^2\left(1+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{Q}\right)\right]=\frac{Q}{2g}\left[v^2-2vv_1+v_1^2\left(1+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{Q}\right)\right],$$

откуда

$$v_1=\frac{v}{1+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{Q}}.$$

Имея скорость v_1 движения груза и среднего сечения балки, вычислим теперь живую силу удара, переходящую в потенциальную энергию *изгиба* балки. Эта живая сила складывается из кинетической энергии груза $\frac{Qv_1^2}{2q}$ и кинетической энергии балки, которая, как уже было установлено выше, к концу первого периода удара равна $\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{2g}v_1^2$.

Таким образом, энергия удара T равна:

$$T=\frac{Qv_1^2}{2g}+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{2g}v_1^2=\frac{v_1^2}{2g}Q\left(1+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{Q}\right)=\frac{Qv^2}{2g}\,\frac{1}{1+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{Q}}=\frac{T_0}{1+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{Q}},$$

где

$$T_0=QH=\frac{Qv^2}{2g}.$$

Соответствующие наибольшие нормальные напряжения в балке должны быть вычислены по формуле:

$$\sigma_{д\,max}=K_д\sigma_{c\,max}=\sigma_{c\,max}\left[1+\sqrt{1+\frac{T}{U_c}}\right]=$$

$$=\sigma_{c\,max}\left[1+\sqrt{1+\frac{6T_0EJ}{lW^2\sigma^2_{c\,max}}\cdot\frac{1}{1+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{Q}}}\right].$$

Мы видим, что если отношение $\frac{Fl\gamma}{Q}$ не мало по сравнению с единицей, то энергия удара T будет меньше величины $T_0=\frac{Qv^2}{2g}$, т. е. учёт массы балки снижает расчётные напряжения при ударе.

Поступая аналогично вышеизложенному при исследовании явления удара с учётом массы ударяемого тела при деформации какого-либо другого вида, получим для нахождения живой силы удара T и для вычисления динамических напряжений $p_д$ подобные же формулы. В эти формулы войдёт отношение приведённой массы ударяемого тела $\frac{Q_1}{g}$ к массе ударяющего тела $\frac{Q}{g}$. Обозначая отношение $\frac{Q_1}{Q}$ через β, в общем случае можем написать:

$$T=\frac{T_0}{1+\beta} \tag{36.31}$$

и

$$p_д=K_дp_c=p_c\left[1+\sqrt{1+\frac{T}{U_c}}\right]=$$

$$=p_c\left[1+\sqrt{1+\frac{T_0}{U_c(1+\beta)}}\right]. \tag{36.32}$$

§ 232. Примеры.

Пример 137. Определим напряжения в канате подъёмника при внезапном торможении опускающегося груза Q (фиг. 605). Для смягчения удара между грузом и канатом расположена буферная пружина. Длина каната в момент торможения пусть будет l, площадь его F, модуль упругости E, скорость груза в этот момент v, растяжимость пружины от единичного груза назовём α.

Фиг. 605.

В момент удара живая сила груза $T_0=\frac{Qv^2}{2g}$ переходит в потенциальную энергию деформации каната и пружины. При вычислении напряжений в канате выражение для динамического коэффициента (36.11) необходимо изменить на:

$$K_д=1+\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta l_c}}\ ^{1)}.$$

[1]) Вывод этой формулы предлагается сделать самостоятельно (см. § 226), учтя ту особенность, что груз Q не падает извне на упругую систему, а неразрывно с ней связан.

Статическое удлинение каната и пружины от груза Q равно:

$$\Delta l_c = \frac{Ql}{EF} + Q\alpha = \frac{Ql}{EF}\left(1 + \frac{EF\alpha}{l}\right).$$

Отсюда

$$\sigma_д = K_д \sigma_c = \frac{Q}{F}\left[1 + \sqrt{\frac{EFv^2}{gQl\left(1 + \frac{EF\alpha}{l}\right)}}\right].$$

Из этого выражения ясна роль буферной пружины: чем она мягче, чем её растяжимость α больше, тем динамическое напряжение меньше.

Возьмём числовой пример:

$$E = 1{,}7 \cdot 10^6 \; кг/см^2 \,{}^{1)}, \quad v = 1 \; м/сек, \quad Q = 5 \; т,$$
$$F = 6 \; см^2, \quad l = 20 \; м, \quad \alpha = 2{,}5 \; см/т.$$

Выполняя вычисления, получаем:

$$\sigma_д = \frac{5000}{6}\left[1 + \sqrt{\frac{1{,}7 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^4}{981 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3\left(1 + \frac{1{,}7 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 2{,}5}{2 \cdot 10^3 \cdot 10^3}\right)}}\right] = 1560 \; кг/см^2.$$

При отсутствии пружины $\alpha = 0$ и $\sigma_д = 3520 \; кг/см^2$.

Пример 138. Определить наибольшие допустимые энергии удара T_1 и T_2 для двух балок, пролётом l, защемлённых одним концом. Первая балка имеет постоянное прямоугольное сечение высотой h_0 и шириной b_0; вторая представляет собой балку равного сопротивления изгибу с постоянной высотой h_0 и переменной шириной $b_x = b_0 \frac{x}{l}$ (§ 121). Удар наносится грузом, падающим на свободный конец балок. Допускаемое напряжение равно $[\sigma]$.

В первой балке наибольшие нормальные напряжения будут в крайних волокнах защемлённого сечения; во второй — нормальные напряжения одинаковы в крайних волокнах всех сечений, в том числе и опорного.

Размеры опорных сечений балок одинаковы; поэтому и наибольший допускаемый изгибающий момент будет один и тот же для обеих балок; его величины равны:

$$M_{max} = W_0[\sigma] = \frac{b_0 h_0^2}{6}[\sigma].$$

С другой стороны, этот момент равен:

$$M_{max} = lP_д,$$

где $P_д$ — динамическое давление на конец балки; оно тоже должно быть одинаково для обеих балок:

$$P_д = \frac{W_0[\sigma]}{l}.$$

Потенциальная энергия, накапливающаяся в балках при действии этой силы, равна: для первой балки

$$U_1 = \frac{1}{2}P_д f_1 = \frac{1}{2}P_д \frac{P_д l^3}{3EJ_0} = \frac{P_д^2 l^3}{6EJ_0},$$

для второй балки

$$U_2 = \frac{1}{2}P_д f_2 = \frac{1}{2}P_д \frac{P_д l^3}{2EJ_0} = \frac{P_д^2 l^3}{4EJ_0}.$$

---

[1]) Для канатов модуль упругости значительно меньше, чем для материала проволок.

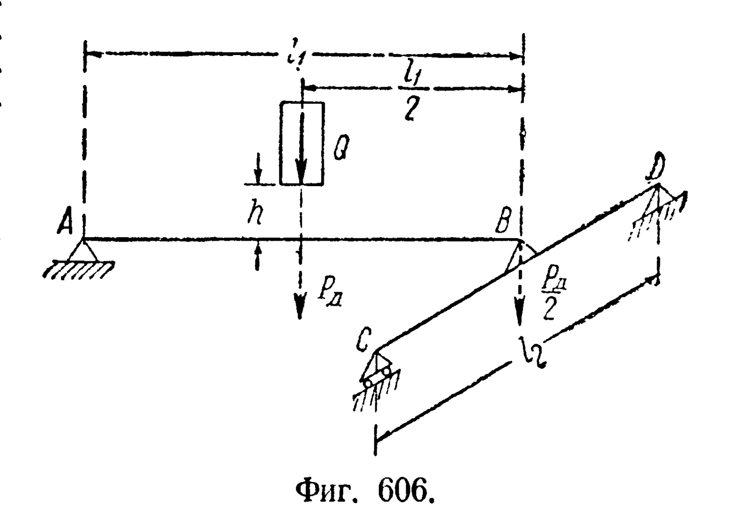
Здесь J_0 — момент инерции сечения в защемлении, а f_1 и f_2 — прогибы от действия силы $P_д$ свободных концов первой и второй балок.

Допустимые величины энергии удара T_1 и T_2 должны соответственно равняться U_1 и U_2. Следовательно,

$$T_1 = U_1 = \frac{P_д^2 l^3}{6EJ_0} = \frac{[\sigma]^2 W_0^2 l^3}{6EJ_0 l^2} = \frac{[\sigma]^2 b_0^2 h_0^4 l \cdot 12}{6E \cdot 36 b_0 h_0^3} = \frac{[\sigma]^2 l b_0 h_0}{18E},$$

$$T_2 = U_2 = \frac{P_д^2 l^3}{4EJ_0} = \frac{[\sigma]^2 W_0^2 l}{4EJ_0} = \frac{[\sigma]^2 l b_0 h_0}{12E}.$$

Таким образом, *вторая* балка может выдержать энергию удара в 1,5 раза *больше*, чем первая. Балка равного сопротивления, несмотря на *меньший* объём, лучше сопротивляется удару, чем балка постоянного сечения, за счёт полного использования материала в крайних волокнах всех сечений.



Фиг. 606.

Пример 139. В качестве примера расчёта на удар сложной конструкции разберём случай удара груза Q посредине пролёта балки, опирающейся в A на шарнирную неподвижную опору, а в B — на шарнирную опору, поставленную на вторую балку посредине её пролёта (фиг. 606). Пролёт первой балки равен l_1, момент инерции J_1, модуль упругости E; для второй балки соответствующие величины равны l_2, J_2, E. Наибольшие динамические напряжения возникнут в крайних волокнах средних сечений балок: первой и второй. Найдём эти напряжения.

Поставленную задачу решим, умножая статические напряжения от груза Q в первой (AB) и второй (CD) балках на динамический коэффициент

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_c}}.$$

Статический прогиб первой балки в ударяемом сечении определяется деформацией всей конструкции и равен $f_0 = f_1 + \frac{1}{2} f_2$, где f_1 и f_2 — соответственно наибольшие статические прогибы первой балки от груза Q и второй — от груза $\frac{Q}{2}$. Так как

$$f_1 = \frac{Ql_1^3}{48EJ_1} \quad \text{и} \quad f_2 = \frac{Ql_2^3}{96EJ_2},$$

то

$$f_0 = \frac{Ql_1^3}{48EJ_1} + \frac{Ql_2^3}{192EJ_2} = \frac{Ql_1^3}{48EJ_1}\left[1 + \frac{J_1}{4J_2}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3\right]$$

и

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{96EJ_1H}{Ql_1^3\left[1 + \frac{J_1}{4J_2}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3\right]}}.$$

Наибольшие напряжения в первой и второй балках будут:

$$\sigma_{д1}=K_д\sigma_{c1}=K_д\frac{Ql_1}{4W_1} \quad \text{и} \quad \sigma_{д2}=K_д\sigma_{c2}=K_д\frac{Ql_2}{8W_2}.$$

Так как количества потенциальной энергии, накапливающейся при ударе в первой балке ($U_{д1}$), во второй балке ($U_{д2}$) и в обеих балках вместе ($U_д=U_{д_1}+U_{д_2}=T_0$) соответственно пропорциональны U_{c_1}, U_{c_2} и U_c (коэффициентом пропорциональности служит квадрат динамического коэффициента), то

$$\frac{U_{д_1}}{U_д}=\frac{U_{д_1}}{T_0}=\frac{U_{c_1}}{U_c}=\frac{\frac{1}{2}Qf_1}{\frac{1}{2}Qf_1+\frac{1}{4}Qf_2}=\frac{f_1}{f_1+\frac{1}{2}f_2}=\frac{f_{01}}{f_0} \qquad (а)$$

и

$$\frac{U_{д_2}}{U_д}=\frac{U_{д_2}}{T_0}=\frac{U_{c_2}}{U_c}=\frac{\frac{1}{4}Qf_2}{\frac{1}{2}Qf_1+\frac{1}{4}Qf_2}=\frac{\frac{1}{2}f_2}{f_1+\frac{1}{2}f_2}=\frac{f_{02}}{f_0}. \qquad (б)$$

Прогиб f_0 является общей *податливостью всей конструкции* в точке, где она испытывает удар; прогибы же f_{01} и f_{02} являются *долями* этой *податливости*, зависящими от деформаций первой и второй балок в отдельности. Из формул (а) и (б) следует, что

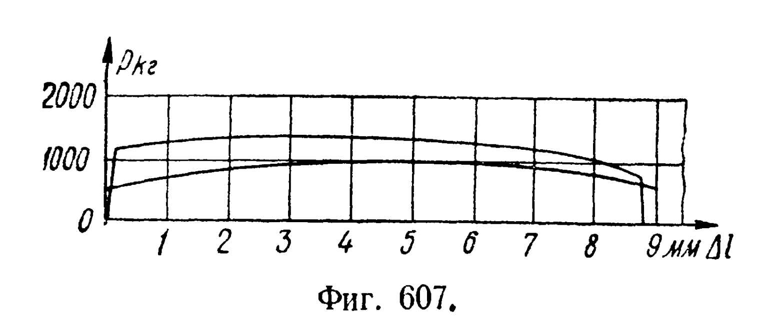
$$U_{д_1}=T_0\frac{f_{01}}{f_0} \quad \text{и} \quad U_{д_2}=T_0\frac{f_{02}}{f_0}.$$

Таким образом, энергия удара распределяется между балками пропорционально их долям в общей податливости конструкции в месте удара. Если размеры балок будут выбраны так, что $f_{01}=f_{02}$, то $U_{д_1}=U_{д_2}=\frac{1}{2}T_0$; если бы вместо второй балки была жёсткая опора, то вся энергия удара была бы целиком воспринята первой балкой; наличие второй балки смягчает удар, приходящийся на первую.

Подобный же эффект получится, если вместо жёстких опор мы расположим по концам балки очень податливые опоры в виде резиновых прокладок или винтовых пружин.

§ 233. Испытания на удар до разрушения. Ударная проба.

Выше было указано, что динамическое действие нагрузок не ограничивается тем, что напряжения (в пределах упругости) оказываются иными, чем при статических нагрузках. Сам материал иначе реагирует на динамическую нагрузку, чем на медленно возрастающую. Особенно это заметно при ударе.



Фиг. 607.

Опыты с ударным разрывом образцов показывают, что диаграмма растяжения в этом случае имеет совершенно другой вид, чем при статическом разрыве. На фиг. 607 изображены статическая и

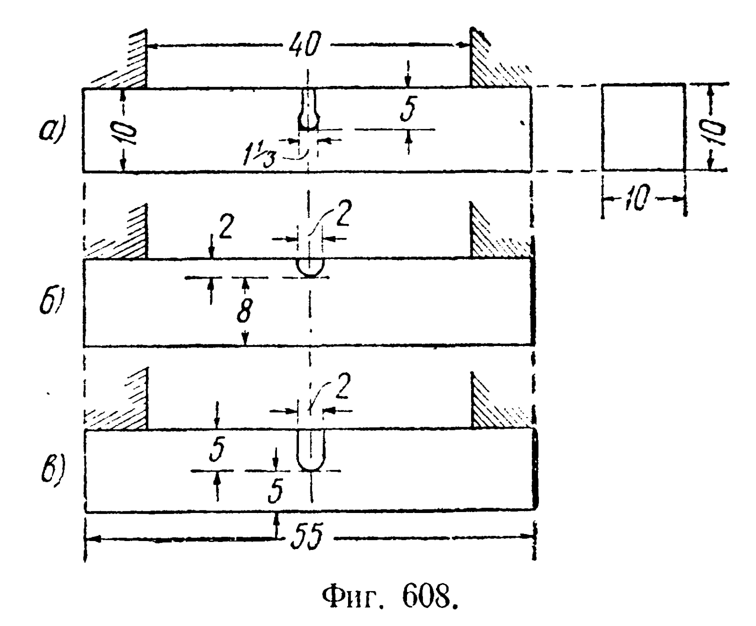
динамическая диаграммы растяжения образца мягкой стали; при ударе характерным является резкое повышение предела текучести и смещение положения наибольшего груза влево. Это показывает, что влияние скорости при ударном действии нагрузки меняет и механические характеристики материала. Бывают случаи, когда материал, отличающийся при статическом испытании прекрасными пластическими качествами, при ударном действии нагрузки оказывается хрупким [1]). Поэтому при выборе материала для деталей, подвергающихся динамическим воздействиям, вводят так называемую *ударную* пробу. Эта проба заключается в том, что образцы материала подвергают разрушению ударом при растяжении, а чаще при изгибе, и оценивают количество энергии, затраченной на разрушение образца. Наиболее распространена проба на удар при изгибе [2]).

Если количество энергии, затраченной на излом образца, равно T, а площадь поперечного сечения образца в месте излома равна F, то, деля T на F, получаем так называемую величину ударной вязкости:

$$a_{\text{к}} = \frac{T}{F} \ \text{кгм/см}^2.$$

Для того чтобы выявить свойства материала при ударной пробе, образцу придают специальную форму — в том сечении, где наносится удар, делают надрез. На практике встречаются различные формы надрезов, изображённые на фиг. 608; наиболее распространённым в настоящее время является надрез типа *б*).

Смысл устройства надреза заключается в том, что стараются поставить материал в наиболее тяжёлые условия работы в отношении ударных нагрузок. Надрез создаёт значительное ослабление сечений посредине пролёта и, значит, резкое повышение напряжений изгиба на протяжении небольшой длины образца.



Фиг. 608.

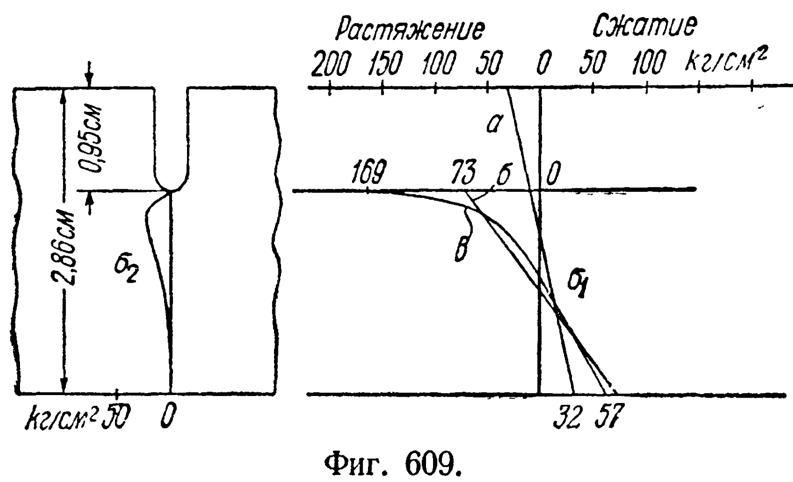
Мы уже видели (§ 229), как сильно влияет на величину напряжений подобное местное ослабление сечения. Почти вся энергия удара поглощается небольшим объёмом материала в зоне местного ослабления, что и вызывает резкое повышение динамических напряжений. Кроме того, наличие надреза вызывает вблизи его

[1]) Причины этого явления объяснены в главе XXXVIII.

[2]) Описание см. Беляев Н. М., Лабораторные работы по сопротивлению материалов, § 89, Гостехиздат, 1951.

дна ещё *местные* повышенные напряжения, подобные тем, которые возникают около краёв отверстий (§ 16).

На фиг. 609 показано распределение напряжений в сечении балки, ослабленном надрезом. Диаграмма *а* показывает эпюру напряжений σ_1 в сечении без надреза; эпюра *б* даёт нам распределение нормальных напряжений в надрезанном сечении без учёта местного повышения; наконец, на эпюре *в* показана полная картина нормальных напряжений σ_1 при изгибе.



Фиг. 609.

Мы видим, что одно уменьшение высоты сечения повышает напряжения в 2,25 раза; вместе же с местными напряжениями коэффициент концентрации достигает 5,22 по отношению к основной балке и 2,32 по отношению к балке пониженной высоты.

Местные напряжения обычно представляют собой такую систему напряжений, при которой материал находится в объёмном напряжённом состоянии; в этом случае затрудняются пластические деформации, и материал вблизи дна надреза оказывается в хрупком состоянии.

Так, в рассматриваемом примере помимо нормальных напряжений σ_1 по сечениям, перпендикулярным к оси образца, имеются ещё растягивающие напряжения σ_2 по сечениям, параллельным оси. Их эпюра показана тоже на фиг. 609. Кроме того, внутри образца имеет место и третье главное напряжение σ_3, тоже растягивающее. Таким образом, материал вблизи дна надреза подвергается всестороннему растяжению, при котором затрудняются пластические деформации. В самом деле, если предел текучести для материала при простом растяжении равен $\sigma_т$, а напряжения σ_2 и σ_3 составляют некоторую долю от σ_1, например 0,2 σ_1, то наступление текучести при сложном напряжённом состоянии определится по третьей теории прочности равенством

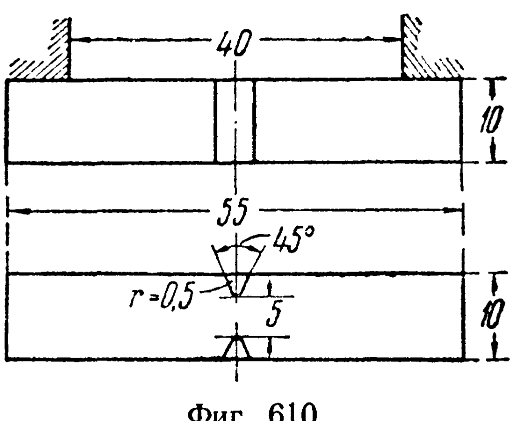
$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_т, \quad \text{или} \quad \sigma_1 - 0{,}2\sigma_1 = 0{,}8\sigma_1 = \sigma_т.$$

Таким образом, материал вблизи дна надреза получит пластические деформации при значении напряжения σ_1, большем чем $\sigma_т$, а именно, 1,25 $\sigma_т$. При таком затруднении пластических деформаций материал может оказаться в хрупком состоянии. Это в свою очередь усиливает эффект ударной нагрузки.

Таким образом, наличие надреза в образце помогает резче разграничить материалы более чувствительные к неблагоприятному

действию удара от менее чувствительных. В этом отношении различные формы надреза влияют неодинаково: так, острый надрез более обостряет действие удара, чем закруглённый надрез. Поэтому величины ударной вязкости, получаемые при испытании различных материалов, могут быть сравнимы лишь при условии однотипности образцов.

Показанные на фиг. 608 формы образцов имеют тот недостаток, что дно надреза попадает на растянутую сторону образца, где и начинается разрушение; таким образом, сопротивление такого образца в известной мере зависит от тщательности выполнения надреза, а с другой стороны, оказывается невозможным испытание на удар образцов с сохранением наружной поверхности изделия, что иногда имеет существенное значение.



Фиг. 610.

Эти недостатки избегнуты в образце, применявшемся нами в механической лаборатории Ленинградского института инженеров ж.-д. транспорта (фиг. 610). При изломе образца этого типа надрез располагается параллельно направлению удара; при этом по-прежнему почти вся энергия удара сосредоточивается в ослабленном месте, но картина разрушения оказывается более естественной.

Вид сломанных образцов этого типа пластичного и хрупкого материала резко отличен; для материала, мало чувствительного к ударам, в растянутой зоне наблюдается значительная пластическая деформация; для материала же в хрупком состоянии разрушение происходит почти без всяких остаточных деформаций.

§ 234. Влияние различных факторов на результаты ударной пробы.

Как правило, испытание на удар производят при комнатной температуре над партией однотипных образцов, количеством не меньше четырёх. Такое число образцов необходимо потому, что случайные обстоятельства изготовления и испытания образцов могут иногда очень сильно сказаться на величине их ударной вязкости.

В качестве примера в таблице 36 приведены величины ударной вязкости для ряда материалов при комнатной температуре; испытания производились на образцах типа *б*) фиг. 608.

Однако оказывается, что на величине ударной вязкости сильно отражается ряд обстоятельств, а именно: форма образцов, скорость удара и особенно температура образца.

Таблица 36. **Ударная вязкость для некоторых материалов.**

Характеристика стали и химический состав	Термическая обработка			
	отжиг		закалка и отпуск	
	$\sigma_в$ кг/мм²	$a_к$ кгм/см²	$\sigma_в$ кг/мм²	$a_к$ кгм/см²
Углеродистые стали				
$C < 0{,}15$	35—45	>25	36—50	>25
C 0,15—0,20	40—50	>22	45—65	>20
C 0,20—0,30	50—60	>20	55—75	>15
C 0,30—0,40	60—70	>16	70—85	>12
C 0,40—0,50	70—80	>12	80—95	>8
C 0,50—0,60	80—90	>10	90—105	>5
C 0,60—0,70	85—95	>8	>100	>3
$C > 0{,}7$	>95	>6	>105	>2
Специальные стали				
Никелевая, C 0,20; Ni 3,0	50—58	25—20	70—80	24—18
Хромоникелевая, C 0,3; Ni 2,5—3,0; Cr 0,5—0,8	>65	>7	75—90	>20
Хромоникелемолибденовая, C 0,25—0,35; Ni 2,5—3,5; Cr 0,8—1,2; Mo 0,3—0,5	65—70	13	95—100	20—16

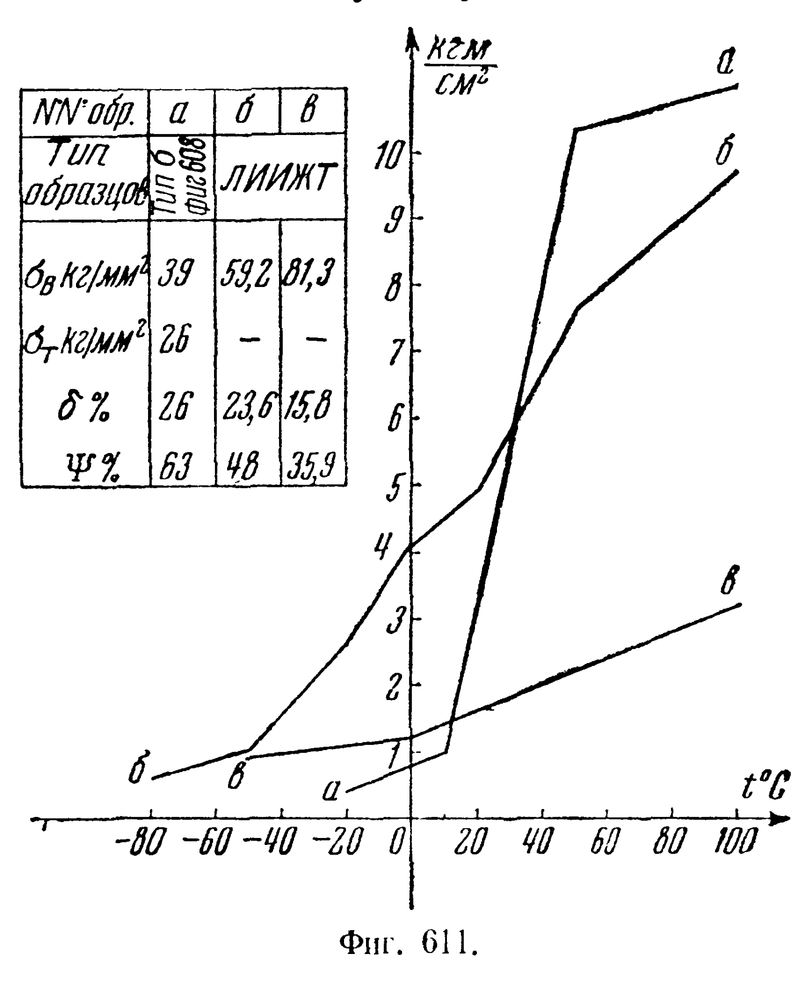
Ударная вязкость образцов одного и того же материала падает по мере понижения температуры опыта. Для некоторых материалов (мягкая сталь) это падение происходит очень резко; для сталей повышенной твёрдости, а также для специальных сталей (хромоникелевая) этот переход сглаживается. На фиг. 611, *а*, *б*, *в* показаны диаграммы ударной вязкости, полученные в механической лаборатории Ленинградского института инженеров ж.-д. транспорта.

Перед испытанием образец доводится до заданной температуры в ванне, или подогреваемой на электроплитке или охлаждаемой при помощи жидкого воздуха. Изображённые на фиг. 611, *а*, *б*, *в* кривые показывают, что понижение температуры вызывает резкое уменьшение ударной вязкости и, таким образом, может вызвать хрупкое разрушение частей конструкций. Это явление неоднократно наблюдалось на практике; так называемая хладноломкость рельсов, бандажей и других деталей конструкций железнодорожного транспорта неоднократно вызывала большие затруднения.

Наиболее существенно то обстоятельство, что для некоторых материалов (фиг. 611, *а*) переход от пластичных изломов с большой ударной вязкостью к хрупким происходит на протяжении весьма

небольшого интервала температур. Таким образом, материал, хорошо сопротивляющийся удару при комнатной или близкой к ней температуре, может дать хрупкий излом уже при сравнительно небольшом понижении температуры. Поэтому результаты обычного испытания на удар при комнатной температуре недостаточно характеризуют сопротивляемость материала динамическим воздействиям; следовало бы получить полную кривую ударной вязкости в зависимости от температуры (фиг. 611, *а*, *б*, *в*).

Чем левее располагается так называемый «критический» интервал падения ударной вязкости, тем материал менее чувствителен к воздействиям температуры при ударных нагрузках, тем более он надёжен в работе.



№№ обр.	а	б	в
Тип образцов	Тип б фиг 608	ЛИИЖТ	
$\sigma_в$ кг/мм²	39	59,2	81,3
$\sigma_т$ кг/мм²	26	—	—
δ%	26	23,6	15,8
ψ%	63	48	35,9

Фиг. 611.

Изменением формы образца можно в известной мере заменить испытание материала при разных температурах. Опыты показали, что переход к более широким образцам сдвигает «критический» интервал температур вправо, т. е. в сторону более высоких температур. Поэтому если обычная проба на удар при комнатной температуре даёт удовлетворительный результат, то для проверки того, не находимся ли мы вблизи критического интервала, можно произвести испытание на удар уширённых образцов; если это испытание даёт хрупкий излом, то «критический» интервал расположен близко к температуре опыта.

Наконец, следует отметить, что на хрупкость материала могут очень сильно влиять так называемые остаточные напряжения, которые могут получиться в материале при закалке, при холодной прокатке или при недостаточной температуре горячей прокатки, когда материал получает наклёп. Опытами на растяжение такие напряжения, как правило, не могут быть выявлены. Остаточные напряжения обычно связаны с возникновением объёмного напряжённого состояния в материале; в связи с этим возможно хрупкое разрушение. Такие случаи встречались при изготовлении мощных двутавровых балок со сравнительно тонкими полками. В нашей практике был

случай хрупкого разрушения двутавровой балки № 50 при сбрасывании её на землю в морозный день. Результаты статических испытаний, химического и металлографического анализа показали, что материал как будто вполне доброкачественный. Лишь ударные испытания при различных температурах обнаружили резкую хладноломкость для образцов, вырезанных у края полки двутавра, — в наиболее наклёпанном месте. Что касается влияния на хрупкость химического состава сталей, то ударная вязкость понижается, как это видно из таблицы 36, с увеличением количества углерода, т. е. с повышением предела прочности и уменьшением пластических свойств стали. Весьма неблагоприятно отражается на сопротивлении удару, особенно при низких температурах, наличие фосфора. Поэтому на практике при изготовлении материала для деталей, работающих на удар, всячески ограничивают примесь этого элемента.

ГЛАВА XXXVII.

ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ.

§ 235. Основные понятия о влиянии переменных напряжений на прочность материала.

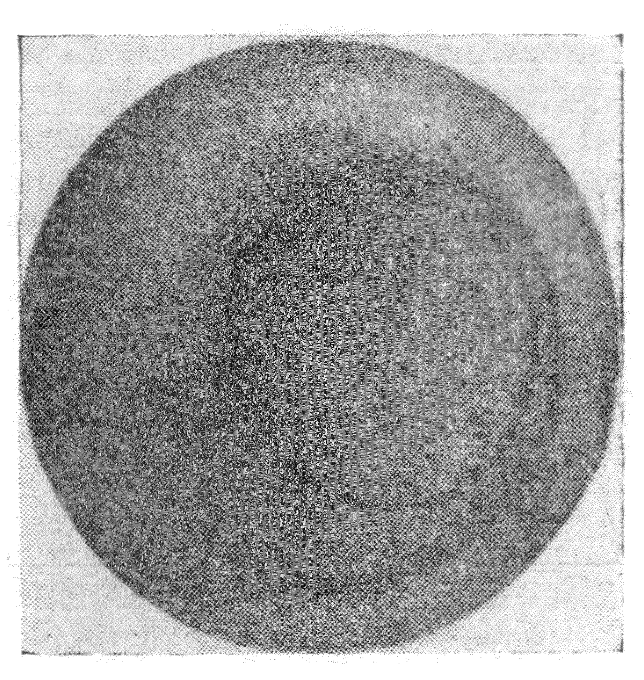
Сопротивление материалов действию нагрузок, систематически изменяющих свою величину или величину и знак, существенно отличается от сопротивления тех же материалов статическому и ударному действию нагрузок. Поэтому вопрос о проверке прочности материала при действии переменных нагрузок требует особого изучения.

Давно известно, что части машин, подвергающиеся усилиям, переменным по величине и повторяющимся большое число раз, иногда ломаются внезапно, без наличия заметных остаточных деформаций, при напряжениях, которым они сопротивляются при статических нагрузках вполне надёжно. Внимание инженеров прежде всего привлекло именно то обстоятельство, что элементы машины, изготовленные из материалов, обладающих при обычных испытаниях прекрасными пластическими свойствами — достаточным удлинением, сужением, ударной вязкостью, разрушаются без всяких видимых остаточных деформаций, как будто бы они были выполнены из хрупкого материала.

В ту эпоху, когда инженеры стали изучать подобные случаи разрушения (первая половина XIX века), не было ясного представления о строении металлов; пластичные металлы считали обладающими «волокнистой» структурой, а хрупкие — «кристаллической». Так как изломы деталей происходили обычно не сразу, а спустя известный, иногда довольно значительный, период времени работы машины, то возникла гипотеза, что при действии переменных напряжений металл

«устаёт», изменяет свою структуру, из пластичного делается хрупким, обладающим кристаллическим строением.

Сам вид поверхности излома, казалось, подтверждал такое предположение; эта поверхность, как правило, имела две зоны: одну — гладкую, притёртую (поверхность постепенно развивающейся трещины), другую — грубозернистую (поверхность окончательного излома в ослабленном трещиной сечении стержня). На фиг. 612 дана фотография излома вагонной оси; мы видим наружную, кольцеобразную зону с гладкой поверхностью и внутреннюю — зону хрупкого, грубозернистого излома, действительно характерного для хрупкого состояния материала.



Фиг. 612.

Однако уже с начала XX столетия, после исследований структуры металлов при помощи микроскопа, стало ясно, что указанная гипотеза неверна. Металлы и в пластичном состоянии оказались обладающими кристаллической структурой; никаких *принципиальных* изменений ни в их строении, наблюдаемом под микроскопом, ни в механических свойствах при действии переменных напряжений обнаружено не было. Материал штока поршня паровой машины или вагонной оси сохраняет свою структуру и свои пластические свойства, как бы долго он ни работал. Таким образом, ни о каком «перерождении», перекристаллизации металла под действием *только* переменных напряжений говорить не приходится.

Механизм разрушения от переменных нагрузок был раскрыт лишь в начале текущего столетия. Многочисленные исследования показали, что при действии переменных напряжений в металле возникает трещина, постепенно проникающая в глубь изделия. При переменных деформациях края трещины то сближаются и нажимают друг на друга, то расходятся; этим объясняется наличие гладкой, притёртой зоны излома. По мере развития трещины усталости поперечное сечение ослабляется всё сильнее, и наконец, при случайном толчке или ударе наступает окончательное разрушение, когда сопротивление оставшейся части сечения оказывается недостаточным.

Трещина усталости является очень острым поперечным надрезом, аналогичным надрезу в образцах для ударной пробы. У дна этой трещины создаётся объёмное напряжённое состояние, обусловливающее хрупкий характер разрушения материала при ударе (см. § 233). Этим и объясняется наличие в изломе грубозернистой зоны, соответствующей хрупкому излому.

Таким образом, хрупкий характер окончательного излома при переменных нагрузках объясняется не тем, что материал изменился, переродился, стал хрупким, а тем, что он оказался благодаря наличию трещины усталости в таком напряжённом состоянии, которое обусловливает хрупкое, без остаточных деформаций, разрушение.

Разрушение при переменных нагрузках носит *местный* характер, не затрагивающий всего материала конструкции в целом. Поэтому при обнаружении развивающихся трещин при переменных нагрузках во многих случаях нет необходимости ставить вопрос о смене всей конструкции; достаточно заменить повреждённые части и уничтожить причины, вызвавшие возникновение трещин.

Изложенная точка зрения является теперь общепринятой среди инженеров; таким образом, само понятие «усталость» материала потеряло свой физический смысл; описывая явление разрушения при действии переменных нагрузок, надо говорить не о разрушении от «усталости», а о разрушении путём постепенного развития трещины.

Однако благодаря краткости этого термина и широкому распространению его в технических кругах, выражение «усталость материалов» удержалось в литературе до настоящего времени, изменив лишь свой смысл: под этим термином мы в дальнейшем и будем подразумевать *разрушение при постепенном развитии трещины.*

Нашей задачей теперь будет установить обстоятельства, вызывающие появление трещин усталости, и дать такие правила конструирования элементов машин и сооружений и проверки их прочности, которые гарантировали бы их от разрушения при переменных нагрузках.

Эта задача является чрезвычайно важной, особенно для машиностроения, где мы чаще всего встречаемся с многократным повторением переменных напряжений. Можно считать, что примерно $90^0/_0$ всех поломок частей машин являются следствием развития трещин усталости. Эти поломки чрезвычайно опасны и зачастую ведут к очень тяжёлым катастрофам, так как обнаружить развивающуюся волосную трещину усталости далеко не всегда удаётся. Изломы вагонных и паровозных осей на железнодорожном транспорте обычно вызываются подобными трещинами и сопровождаются почти неизбежно сходом поезда с рельсов с крайне тяжёлыми последствиями. Подобного же рода катастрофы известны и в авиации и в других отраслях машиностроения.

§ 236. Составление условия прочности при переменных напряжениях.

Опыты показывают, что постепенно развивающаяся трещина возникает только при *переменных* напряжениях, колеблющихся систематически между двумя крайними значениями. Изменение напряжений от одной крайней величины до другой, и обратно, мы в дальнейшем будем называть *циклом* напряжений.

С другой стороны, известно, что громадное количество элементов машин и конструкций благополучно сопротивляется переменным нагрузкам в течение весьма продолжительного срока, если напряжения в них остаются в определённых границах. Таким образом, одной *переменности* напряжений недостаточно; для образования трещины усталости необходимо, чтобы действительная величина наибольшего значения систематически колеблющегося напряжения превзошла определённую границу, так называемый предел усталости, или предел выносливости.

Пределом выносливости $p_к$ ($\sigma_к$, $\tau_к$) мы будем называть наибольшую величину периодически меняющегося напряжения, которое материал может противостоять практически неограниченно долго без появления трещин усталости.

Таким образом, возможность разрушения путём постепенного развития трещины обусловливается двумя обстоятельствами:

а) периодическим колебанием напряжений между определёнными крайними пределами;

б) превышением наибольшими действительными напряжениями в элементе конструкции предела выносливости материала.

Условие прочности в данном случае должно выражать, что наибольшие действительные напряжения $p^д_{max}$ должны быть с некоторым запасом меньше предела выносливости $p_к$:

$$p^д_{max} \leqslant \frac{p_к}{k_к},$$

где $k_к$ — коэффициент запаса.

Для практического применения этого условия надо установить методы определения предела выносливости и вычисления наибольших действительных напряжений.

В настоящее время определение предела выносливости материала возможно лишь чисто экспериментальным путём. Величина этого предела зависит в *основном* от:

а) материала (сталь, чугун, цветные металлы),

б) типа деформации (изгиб, кручение и т. д.),

в) степени несимметрии цикла, т. е. соотношения между крайними значениями меняющегося напряжения.

Некоторые дополнительные обстоятельства, влияющие на величину предела выносливости (коррозия, размеры деталей), будут рассмотрены отдельно (§§ 239 и 240).

Что касается наибольшего значения действительных напряжений $p^д_{max}$, то опыты показывают, что в противоположность разрушению от статической нагрузки появление трещин усталости не только у хрупких, но и у пластичных материалов связано не с теми расчётными наибольшими напряжениями p_{max}, которые получаются для чисто призматических стержней $\left(\text{например, при изгибе } \sigma_{max} = \frac{M}{W}\right)$,

а с так называемыми (§ 16) *местными* напряжениями, возникающими в местах нарушения призматической формы стержня (надрезы, выточки, отверстия, переход от тонкой к утолщённой части и т. д.).

Эти местные напряжения $p_м$ оказываются значительно выше наибольших общих напряжений p_{max}, вычисляемых для призматических стержней, и могут быть представлены формулой

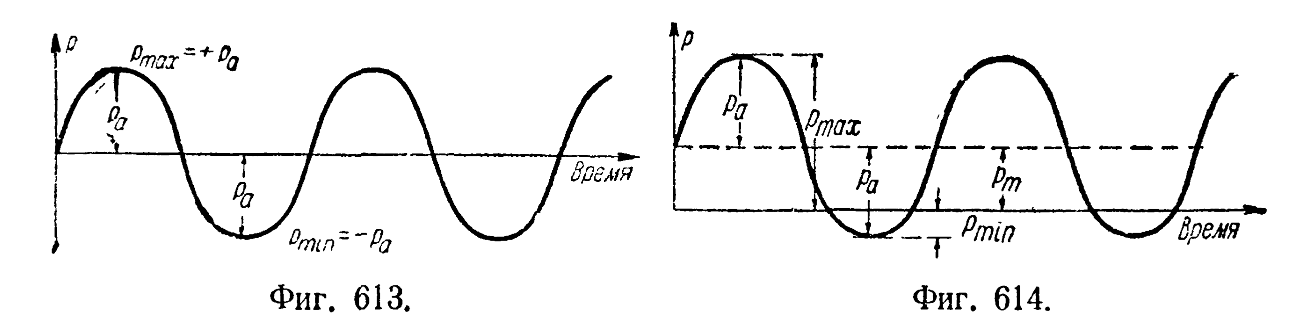
$$p_м = \alpha_к p_{max},$$

где $\alpha_к$ — так называемый коэффициент концентрации напряжений; его величина зависит от характера нарушения призматической формы стержня.

В дальнейших параграфах рассмотрено определение предела выносливости и коэффициентов концентрации напряжений.

§ 237. Определение предела выносливости при симметричном цикле.

Как показывают опыты, величина предела выносливости материала в значительной степени зависит от соотношения между крайними значениями p_{max} и p_{min} изменяющегося напряжения. Если эти значения равны по величине p_a и обратны по знаку (фиг. 613), то мы имеем *симметричный цикл*, при котором предел выносливости оказывается наименьшим.



Фиг. 613. Фиг. 614.

Если мы добавим к симметрично колеблющемуся в пределах $+p_a$ и $-p_a$ напряжению ещё напряжение постоянной величины p_m (фиг. 614), то получим случай *несимметричного* цикла; в этом случае предел выносливости оказывается выше, чем для симметричного цикла.

Крайние значения напряжения при несимметричном цикле p_{max} и p_{min} будут (фиг. 614):

$$p_{max} = p_m + p_a \quad \text{и} \quad p_{min} = p_m - p_a;$$

в свою очередь,

$$p_m = \frac{p_{max} + p_{min}}{2} \quad \text{и} \quad p_a = \frac{p_{max} - p_{min}}{2}.$$

Напряжение p_m называют средним напряжением цикла, а p_a — амплитудой колебаний напряжения цикла. Отношение $r = \frac{p_{min}}{p_{max}}$ называется *характеристикой цикла*. При симметричном цикле $p_m = 0$, $p_{min} = -p_{max}$ и $r = -1$; при постоянном статическом напряжении $p_a = 0$, $p_{min} = p_{max}$ и $r = +1$; если $p_{min} = 0$, то и $r = 0$.

Приведём несколько примеров несимметричных циклов:

$$\text{а)}\ \left.\begin{aligned} p_{max} &= +\ 800\ кг/см^2 \\ p_{min} &= -\ 400\ кг/см^2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} p_m &= 200\ кг/см^2 \\ p_a &= 600\ кг/см^2 \end{aligned}\right\} r = -0{,}5,$$

$$\text{б)}\ \left.\begin{aligned} p_{max} &= +1000\ кг/см^2 \\ p_{min} &= +\ 300\ кг/см^2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} p_m &= 650\ кг/см^2 \\ p_a &= 350\ кг/см^2 \end{aligned}\right\} r = +0{,}3.$$

Удвоенная величина амплитуды колебаний напряжения p_a

$$p_{max} - p_{min} = 2p_a$$

называется «размахом» цикла.

Значение предела выносливости для любого цикла переменных напряжений будем обозначать через p, σ или τ со значком внизу, указывающим на соответствующую характеристику цикла. Так, p_{-1} — предел выносливости при симметричном цикле с характеристикой $r = -1$, $p_{0,2}$ — предел выносливости при несимметричном цикле с характеристикой $r = +0{,}2$ и т. п.

Наибольший интерес представляет определение величины предела выносливости при симметричном ($p_m = 0$) цикле, как наименьшего. Эта величина оказывается различной для случая деформации изгиба, осевой деформации (растяжение и сжатие) и кручения.

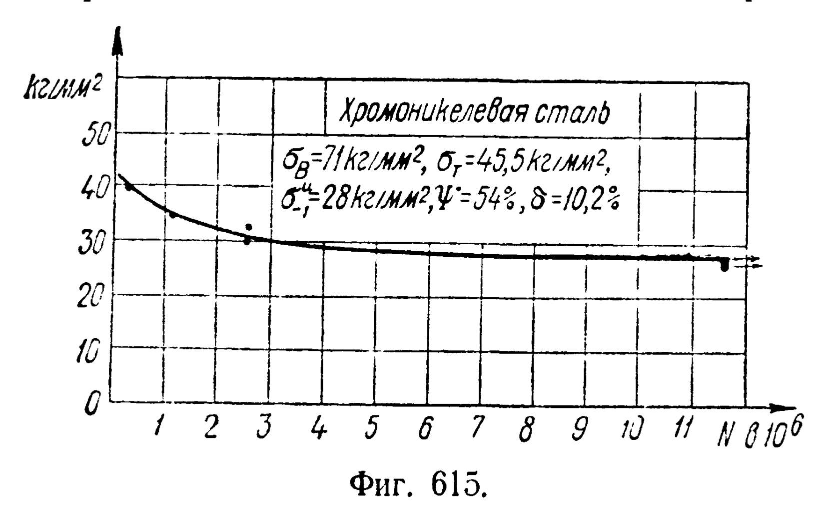
Для определения предела выносливости при изгибе применяются машины, в которых образец круглого поперечного сечения нагружается через шарикоподшипники, или как консоль — силой на конце, или как шарнирно-опёртая балка — симметрично расположенными равными силами; образец вращается со скоростью около 2000—3000 об/мин. При каждом обороте материал образца в наиболее напряжённых местах испытывает симметричный цикл изменения напряжений от наибольшего сжатия до такого же наибольшего растяжения, и обратно. Число циклов, испытанных образцом, определяется числом его оборотов N, отмечаемым специальным счётчиком [1]).

Образцам придаётся форма с весьма плавными очертаниями, исключающими возможность появления местных напряжений. Опыт по определению предела выносливости производится следующим образом. Заготовляется партия образцов испытываемого материала в количестве 6—10 штук; образцам даётся последовательная нумерация: 1, 2, 3, ...

---

[1]) Описание см. Беляев Н. М., Лабораторные работы по сопротивлению материалов, § 90.

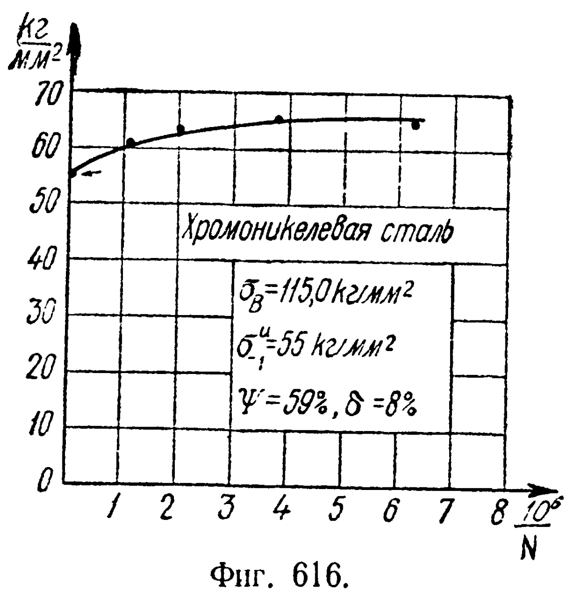
Первый образец закладывается в машину и нагружается так, чтобы получить определённую величину наибольшего нормального напряжения σ'; эту величину обычно берут равной 0,5—0,6 от предела прочности материала; затем машина пускается в ход, и образец вращается, испытывая переменные напряжения от $+\sigma'$ до $-\sigma'$ до тех пор, пока произойдёт излом. В этот момент специальное приспособление выключает мотор, машина останавливается, и счётчик оборотов показывает число циклов N_1, необходимое для излома образца при напряжении σ'.



Фиг. 615.

Тем же порядком испытывают второй образец при напряжении σ'', *меньшем* σ', третий — при напряжении $\sigma''' < \sigma''$, и т. д. Соответственно возрастает число циклов, необходимое для излома. Уменьшая для каждого нового образца рабочее напряжение, мы, наконец, для какого-то из них не получаем излома, даже при очень большом числе оборотов образца. Соответствующее напряжение будет очень близко к пределу выносливости.

Опыты показали, что если стальной образец не разрушился после $10 \cdot 10^6$ циклов, то он может выдержать практически неограниченное число циклов ($100 \cdot 10^6 — 200 \cdot 10^6$). Поэтому при определении предела выносливости для того или иного сорта стали прекращают опыт, если образец испытал $10 \cdot 10^6$ циклов и не сломался. В ряде случаев при испытаниях ограничиваются и меньшим предельным числом циклов, однако, не меньше $5 \cdot 10^6$.



Фиг. 616.

Для цветных металлов подобной зависимости нет, и чтобы обнаружить, действительно ли при заданном напряжении образец может выдержать очень большое число перемен знака, приходится давать до $200 \cdot 10^6$ и даже $500 \cdot 10^6$ циклов. В этом случае можно говорить об условном пределе выносливости, соответствующем отсутствию излома при определённом числе перемен знака напряжений, — при $10 \cdot 10^6$, $30 \cdot 10^6$ и т. д.

Для нахождения числовой величины предела выносливости полученные результаты обрабатываются графически. На фиг. 615 и 616

показаны два метода подобной обработки. На первой из них по оси ординат откладываются величины σ', σ'', ..., а по оси абсцисс N_1, N_2 и т. д. Ордината горизонтальной касательной к полученной кривой (асимптоты) и будет равна пределу выносливости $\sigma^{и}_{-1}$. На втором чертеже по оси абсцисс откладываются величины, равные $\frac{10^6}{N}$. В этом случае предел выносливости определяется как отрезок, отсекаемый на оси ординат продолжением полученной кривой, так как начало координат соответствует $N=\infty$. В настоящее время более употребительным является второй метод.

Подобным же образом определяется предел выносливости для осевых усилий (растяжение и сжатие) и для кручения; для этой цели также применяются специальные испытательные машины (пульсаторы и др.[1]).

В настоящее время получено громадное количество экспериментальных результатов по определению предела выносливости различных материалов. Бо́льшая часть произведённых исследований относится к стали, как наиболее употребительному материалу в машиностроении. Результаты этих исследований показали, что предел выносливости *стали всех сортов* связан более или менее определённым соотношением лишь с величиной предела прочности при растяжении $\sigma_в$. Для катаного и кованого материала предел выносливости при симметричном цикле в случае изгиба составляет от 0,40 до 0,60 $\sigma_в$; для литья это соотношение заключается в пределах от 0,40 до 0,46.

Таким образом, *в запас прочности с достаточной для целей практики точностью* можно принять для всех сортов стали

$$\sigma^{и}_{-1}=0{,}4\sigma_в=\beta_к\sigma_в.$$

Если подвергать образец стали *осевым* усилиям при симметричном цикле (попеременному растяжению и сжатию), то соответствующий предел выносливости σ^0_{-1}, как показывают опыты, будет ниже, чем при изгибе; соотношение между этими пределами выносливости может быть принято равным, как показывают опыты, 0,7, т. е. $\sigma^0_{-1}=0{,}7\sigma^{и}_{-1}$.

Это снижение объясняется тем, что при растяжении и сжатии всё сечение подвергается одинаковым напряжениям; при изгибе же наибольшие напряжения имеют место лишь в крайних волокнах; остальная часть материала работает слабее и, таким образом, несколько затрудняет образование трещин усталости; кроме того, на практике всегда имеет место некоторый эксцентриситет осевой нагрузки.

Наконец, при кручении для симметричного цикла предел выносливости по касательным напряжениям составляет в среднем 0,55 от

[1]) См. сноску на стр. 731.

предела выносливости при изгибе. Таким образом, для стали при симметричном цикле

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{\text{и}}_{-1} &= 0{,}40\sigma_{\text{в}}, \\ \sigma^{0}_{-1} &= 0{,}7\sigma^{\text{и}}_{-1} = 0{,}28\sigma_{\text{в}}, \\ \tau^{\text{к}}_{-1} &= 0{,}55\sigma^{\text{и}}_{-1} = 0{,}22\sigma_{\text{в}}. \end{aligned}\right\} \qquad (37.1)$$

Эти данные и могут быть положены в основу расчётных формул при проверке прочности.

Для цветных металлов мы имеем менее устойчивое соотношение между пределом выносливости и пределом прочности; опыты дают

$$\sigma^{\text{и}}_{-1} = (0{,}24 \div 0{,}50)\,\sigma_{\text{в}}.$$

При пользовании приведёнными выше соотношениями (37.1) надо иметь в виду, что предел выносливости для данного материала является характеристикой, зависящей от очень большого числа факторов (§ 239); данные (37.1) относятся к опытам с образцами сравнительно *малого диаметра* (7—10 *мм*) с полированной поверхностью и отсутствием резких изменений формы поперечного сечения.

§ 238. Предел выносливости при несимметричном цикле.

Определение пределов выносливости при несимметричных циклах требует значительно более сложного оборудования, чем при экспериментах с симметричным циклом напряжений.

Применение простейших машин с изгибом вращающегося образца требует добавления специальной пружины, растягивающей или сжимающей образец; чаще приходится пользоваться ещё более сложными машинами, осуществляющими осевую нагрузку образца (растяжение, сжатие) при различных крайних значениях напряжений.

Однако в настоящее время мы имеем уже достаточное количество опытных данных, чтобы иметь возможность представить графически или аналитически зависимость предела выносливости металла от характеристики цикла r, т. е. от соотношения $\frac{p_{\min}}{p_{\max}}$.

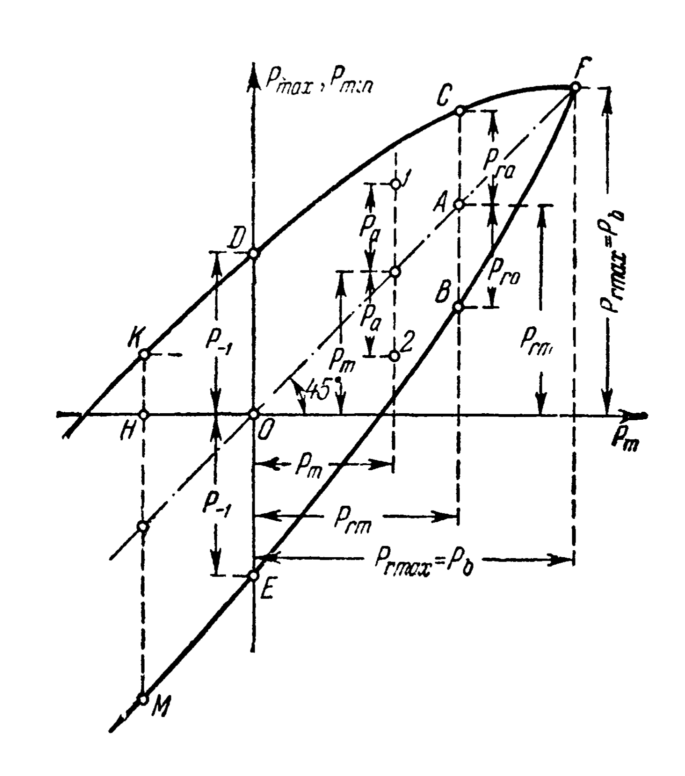
Напомним принятые нами обозначения: $p_{\text{в}}$ — предел прочности материала, $p_{\text{т}}$ — предел текучести, p_r — предел выносливости при любом цикле напряжений с характеристикой r, p_{-1} — предел выносливости при симметричном цикле, $p_{\max}$ и $p_{\min}$ — верхняя и нижняя границы цикла, $p_m = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2}$ — среднее напряжение цикла, $p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}$ — амплитуда колебаний напряжения цикла, $2p_a$ — «размах» цикла, $r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}$ — характеристика цикла.

Те значения напряжений p_{max}, p_{min}, p_a, p_m, при которых материал будет работать на пределе выносливости, обозначим индексом r внизу:

$$p_{r\max},\ p_{r\min},\ p_{rm},\ p_{ra};$$

наибольшее по абсолютной величине значение $p_{r\max}$ или $p_{r\min}$ совпадает с p_r.

В частных случаях, когда речь идёт о нормальных или касательных напряжениях, буква p заменяется соответственно через σ или τ; для обозначения изгиба, кручения и осевых усилий добавляются вверху индексы «и», «к» и «о».



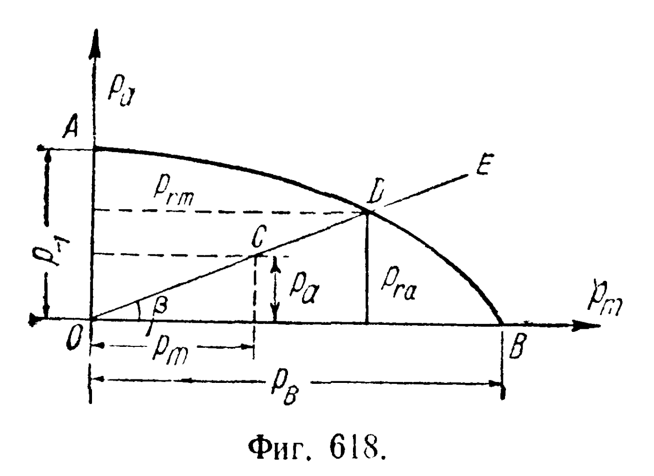
Фиг. 617.

Изображая графически или при помощи формул зависимость предела выносливости от несимметрии цикла, надо иметь в виду два крайних случая: для симметричного цикла ($p_{min} = -p_{max}$, $p_m = 0$ и $r = -1$) эти зависимости должны давать нам величину p_{-1}; для случая же постоянной нагрузки ($p_{min} = p_{max}$, $p_a = 0$ и $r = +1$) мы должны получить предел прочности материала $p_в$.

Наиболее распространены два вида диаграмм для изображения зависимости $p_r = \varphi(r) = \varphi\left(\frac{p_{min}}{p_{max}}\right)$: диаграмма $p_{max} - p_m$ и диаграмма $p_a - p_m$. На диаграмме $p_{max} - p_m$ (фиг. 617) напряжённое состояние материала при разной несимметрии цикла, характеризуемой отношением $\frac{p_{min}}{p_{max}} = r$, изображается двумя точками с ординатами p_{max} и p_{min} (например, точки *1* и *2* на фиг. 617); общей абсциссой этих точек служит p_m — среднее напряжение цикла. Получив из опыта $p_{r\max} = p_r$ — значение предела выносливости материала при известной характеристике цикла r, вычисляем среднее напряжение цикла p_m (абсциссу) и наносим на диаграмму точки C и B с соответствующими ординатами $p_{r\max}$ и $p_{r\min}$. Поступая так для серии значений r и соединяя полученные точки кривыми KF и MF, получаем диаграмму, дающую зависимость $p_{r\max}$ и $p_{r\min}$ от среднего напряжения цикла p_m. (В некоторых случаях, в зависимости от рода материала, кривые KF и MF могут обратиться в прямые линии.)

Кривые KF и MF сходятся в точке F, абсцисса и ордината которой равны друг другу: $p_{r\max}=p_{r\min}=p_{rm}$. Таким образом, для этой точки $p_{ra}=0$ и $r=+1$; ордината её представляет собой разрушающее напряжение при статической нагрузке, т. е. предел прочности материала. Прямая, соединяющая точку F с началом координат O, проходит под углом в 45° к осям p_m и $p_{\max}$ ($p_{\min}$); ординаты точек, расположенных на этой прямой, равны p_m, а вертикальные отрезки между нею и кривыми KF и MF (например, отрезки AC и AB) представляют собой опасные значения переменной составляющей цикла (амплитуды колебаний напряжения) p_{ra}.

При симметричном цикле ($p_{\min}=-p_{\max}$, $p_a=p_{\max}$, $p_m=0$ и $r=-1$) предел выносливости p_{-1} изображается отрезками OD и OE. Точки K и M соответствуют случаю отрицательного p_m (сжатие); предел выносливости изображается величиной ординаты $p_{r\min}(HM)$.



Фиг. 618.

Диаграмма показывает, что при заданной характеристике цикла r разрушения не произойдёт, пока амплитуда цикла p_a будет меньше отрезков AC и AB, т. е. трещина усталости не образуется, пока точки *1* и *2* лежат между кривыми KF и MF.

На диаграмме p_a-p_m (фиг. 618) напряжённое состояние материала изображается одной точкой C с ординатой p_a и абсциссой p_m. Таким образом, все циклы с одним и тем же отношением

$$\frac{p_a}{p_m}=\frac{p_{\max}-p_{\min}}{p_{\max}+p_{\min}}=\frac{1-r}{1+r}$$

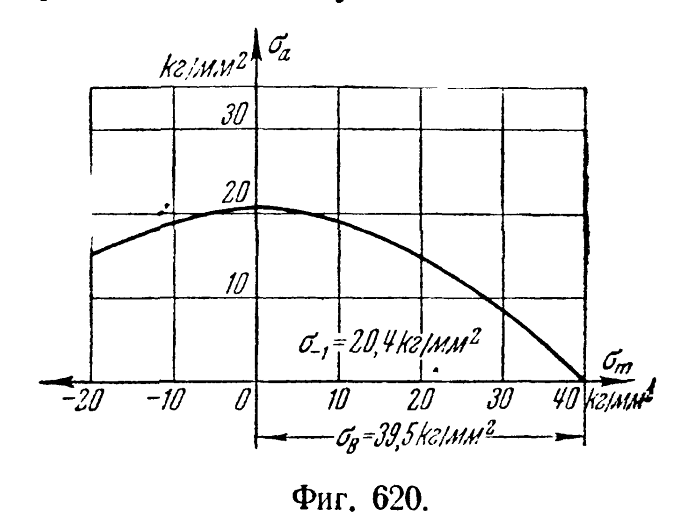
изображаются точками прямой OE. Получив для выбранного отношения $\frac{p_a}{p_m}$ величины p_{ra} и p_{rm}, соответствующие пределу выносливости материала, наносим на прямой OE точку D с этими координатами.

Ряд подобных точек, располагающихся на кривой ADB, изображает напряжённое состояние материала на пределе выносливости в зависимости от характера цикла. Величина предела выносливости при заданном отношении $\frac{p_a}{p_m}$ определяется суммой координат точки кривой ADB, т. е. $p_r=p_{ra}+p_{rm}$ (при отрицательном p_{rm} слагаемое p_{ra} надо тоже брать со знаком минус, ибо в этом случае $p_r=p_{r\min}$). Статической нагрузке соответствует точка B (пересечение кривой ADB с осью абсцисс): $p_a=0$ и $OB=p_в$; при симметричном цикле ($p_m=0$) предел выносливости p_{-1} изображается отрезком OA на оси ординат.

Диаграмма p_a-p_m показывает, что все точки C, лежащие внутри площади $OADB$, соответствуют циклам напряжений, *безопасным* в отношении возможности образования трещины усталости.

Довольно много формул было предложено для установления аналитической зависимости между пределом выносливости, пределом прочности и характеристиками цикла. Из них заслуживает внимания следующая формула:

Фиг. 619.



Фиг. 620.

$$p_{ra}=p_{-1}\left[1-n_1\frac{p_{rm}}{p_в}-n_2\left(\frac{p_{rm}}{p_в}\right)^2\right]. \qquad (37.2)$$

Коэффициенты n_1 и n_2 имеют различные числовые значения в зависимости от рода материала.

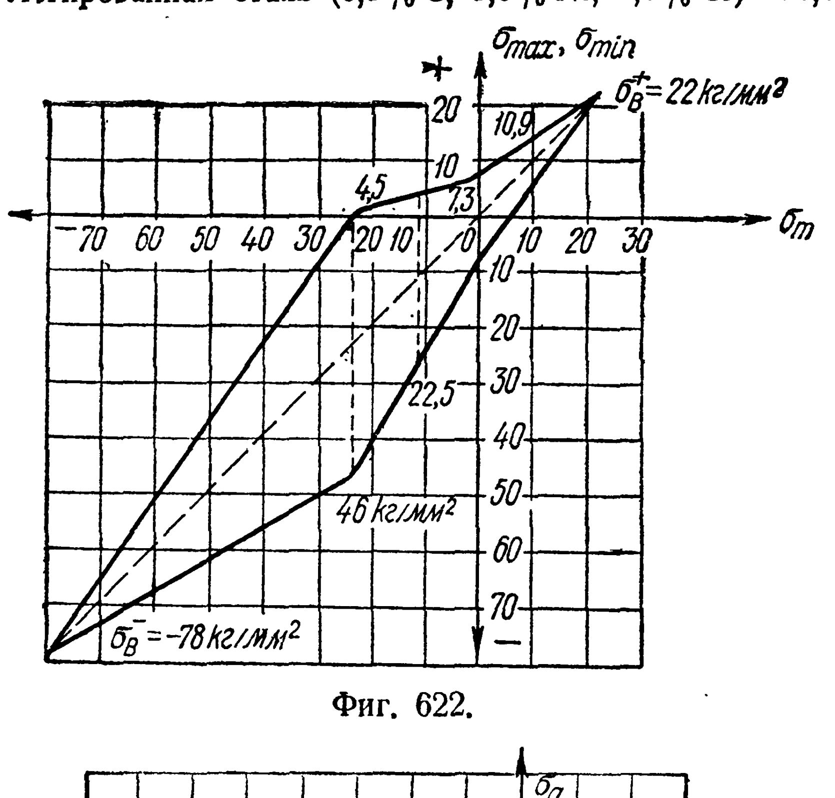
Для малоуглеродистой стали $n_1=0$ и $n_2=1$ и зависимость между p_{ra} и p_{rm} имеет форму параболы; для сталей с высоким пределом прочности, наоборот, $n_1=1$, $n_2=0$, и указанная зависимость имеет линейный вид. Формула (37.2) может быть изображена графически в форме любой из диаграмм.

Фиг. 621.

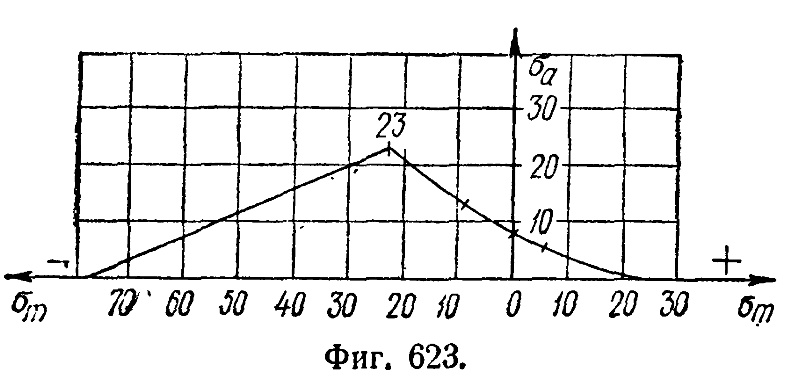
На фиг. 619 изображена диаграмма σ_{max}-σ_m, а на фиг. 620 — диаграмма σ_a-σ_m для обычной малоуглеродистой стали; на фиг. 621 дана диаграмма σ_{max}-σ_m для легированной хромоникелевой стали, причём сплошной линией показана часть графика, полученная

непосредственными экспериментами. Механические свойства этих двух сталей таковы:

	$\sigma_в$ кг/мм²	$\sigma_т$ кг/мм²	σ_{-1} кг/мм²
Малоуглеродистая сталь (0,13% C)	39,5	33,0	20,4
Легированная сталь (0,3% C, 3,6% Ni, 0,6% Cr)	80,0	55,5	36,4



Фиг. 622.



Фиг. 623.

Для первой имеет место формула

$$\sigma_{ra}=\sigma_{-1}\left[1-\left(\frac{\sigma_{rm}}{\sigma_в}\right)^2\right];$$

для второй

$$\sigma_{ra}=\sigma_{-1}\left[1-\frac{\sigma_{rm}}{\sigma_в}\right].$$

На фиг. 622 и 623 построены диаграммы для серого чугуна; механические свойства этого материала таковы: $\sigma_в^-=78$ *кг/мм²*; $\sigma_в^+=22$ *кг/мм²*; $\sigma_{-1}=7,3$ *кг/мм²* и $\sigma_0=46$ *кг/мм²* $=0,59\sigma_в^-$; σ_0 — предел выносливости для одностороннего цикла (напряжения меняются от нуля в одну сторону, $r=0$) при сжатии. Эти диаграммы свидетельствуют о том, что и при переменных нагрузках чугун на сжатие работает значительно лучше, чем на растяжение.

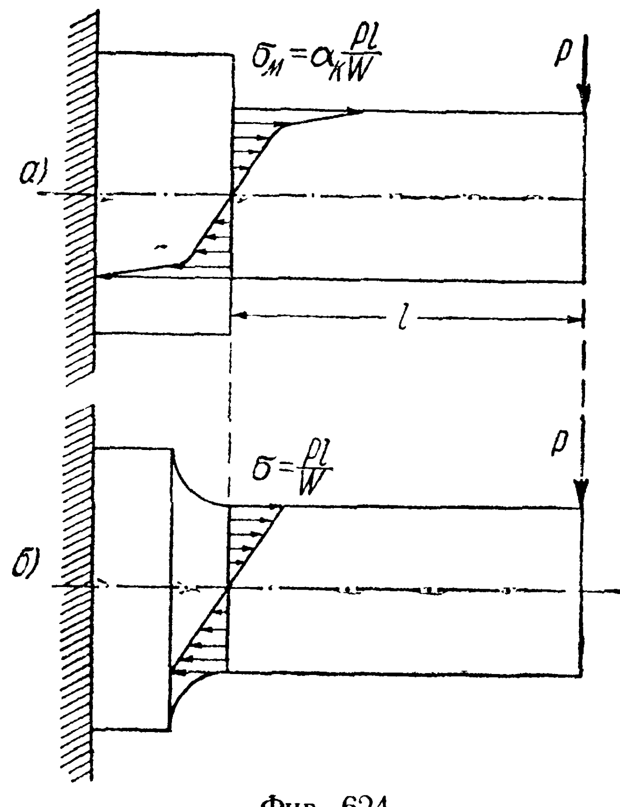
§ 239. Местные напряжения.

Опыты показывают, что для образования трещины усталости имеет значение величина так называемых *местных* напряжений, возникающих или в местах резкого изменения призматической формы стержня (надрезы, выточки, переходы), или при повреждениях его поверхности (царапины, риски), или в местах нарушения сплошности материала (пустоты, включения, трещины).

Все перечисленные факторы, вызывающие развитие местных напряжений, «повышатели напряжений», мы в дальнейшем для краткости будем обозначать термином «фактор (источник) концентрации»;

в зависимости от степени резкости нарушения призматической формы стержня или сплошности материала мы будем говорить о «резком или смягчённом характере» фактора концентрации.

Местные напряжения $p_м$ по своей величине обыкновенно значительно превышают те наибольшие напряжения p_{max}, которые получаются при отсутствии факторов концентрации, так называемые *общие* напряжения: $p_м = \alpha_к p_{max}$, $\alpha_к > 1$ — коэффициент концентрации напряжений. Величина $(\alpha_к - 1)$ характеризует степень превышения местных напряжений над общими.

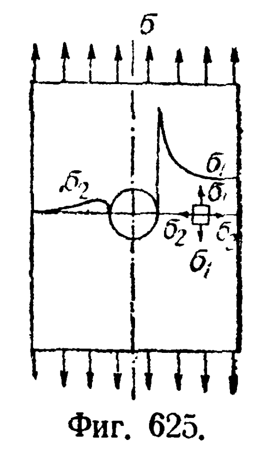


Фиг. 624.

На фиг. 624, *а* показаны местные напряжения при изгибе, вызванные резким изменением размеров поперечного сечения стержня; на фиг. 624, *б* для сравнения показано распределение напряжений в случае плавного изменения диаметра стержня при отсутствии местных напряжений.

На фиг. 625 изображены местные напряжения, вызванные наличием отверстия в растянутом стержне. Из этих диаграмм видно, что местные напряжения захватывают весьма небольшой объём и, быстро затухая, падают до величины соответствующих общих напряжений.

Местные напряжения даже при линейном общем напряжённом состоянии обычно образуют систему, соответствующую более сложному напряжённому состоянию. На фиг. 625 показано, что, помимо напряжений по сечениям, перпендикулярным к оси стержня, у отверстия возникают и добавочные меньшие нормальные напряжения по площадкам, перпендикулярным к первым (σ_2).



Фиг. 625.

Величина коэффициента концентрации зависит, главным образом, от степени резкости нарушения призматической формы стержня. Если переход от бóльшего диаметра стержня к меньшему сделан резким, под прямым углом, то мы получаем наибольшее значение $\alpha_к$; если же этот переход смягчён галтелью того или иного радиуса, то величина $\alpha_к$ значительно снижается и может оказаться даже равной единице (фиг. 624, *а* и *б*).

Для определения коэффициентов концентрации применяют следующие методы. В ряде случаев (например, растяжение и изгиб

стержней с отверстиями и выточками) удаётся найти величину местных напряжений при помощи методов теории упругости. Затем широкое распространение нашёл метод экспериментального определения местных напряжений путём просвечивания поляризованным светом плоской напряжённой модели из прозрачного материала (стекло, целлулоид, бакелит); по получающейся при этом окраске различных участков модели можно установить величину разности главных напряжений в различных точках, а затем при помощи дополнительных измерений и вычислений и сами величины главных напряжений.

К числу экспериментальных методов относятся также исследования местных напряжений с помощью лаковых покрытий[1]) или сеток[2]) (из квадратов или окружностей малого диаметра), наносимых на поверхности образцов испытуемого материала и исследования на хрупких (гипсовых) моделях.

Определяя предел прочности материала путём испытания до разрушения двух моделей (фиг. 624, *а* и *б*), одной с местными напряжениями, а другой — без них, мы получаем для первой модели меньшее значение $\sigma_в$, чем для второй (конечно, вводя в вычисления один и тот же момент сопротивления сечения диаметром d); отношение этих величин $\sigma_в$ и даёт искомый коэффициент концентрации $\alpha_к$.

Однако наиболее надёжным является способ получения $\alpha_к$ путём определения предела выносливости для образцов исследуемого материала с местными напряжениями и без них. Первые дают пониженную (за счёт влияния местных напряжений) величину предела выносливости $\sigma_к'$ по сравнению со вторыми $\sigma_к''$, отношение $\frac{\sigma_к''}{\sigma_к'}$ и будет равно $\alpha_к$. В результате применения всех указанных методов оказалось, что величины коэффициентов концентрации напряжений, определённые разными методами для одного и того же типа фактора концентрации, оказываются различными.

Первые два способа — применение теории упругости или оптического метода — дают близкие друг к другу величины $\alpha_к$; это понятно, так как в обоих случаях результаты исследования относятся к изотропному упругому материалу; между тем, величины $\alpha_к$, определённые при помощи испытаний на усталость, оказываются для некоторых сортов материала (хромоникелевая сталь, углеродистая сталь высокого сопротивления) близкими к полученным первыми двумя методами, а для некоторых (малоуглеродистая сталь) значительно пониженными. Оказалось, что коэффициент концентрации зависит не только от формы детали, но и от материала образца. Он тем ниже, чем материал пластичнее. Известное объяснение этому обстоя-

---

[1]) См., например, Прокофьев И. П., Методика изучения деформаций при помощи лаковых покрытий, «Вестник металлопромышленности», 1936.

[2]) См., например, Смирнов-Аляев Г. А., Сопротивление материалов пластическим деформациям, 1949.

тельству дано уже в § 17; пластические свойства материала образуют своеобразный буфер, смягчающий в той или иной степени эффект местных напряжений.

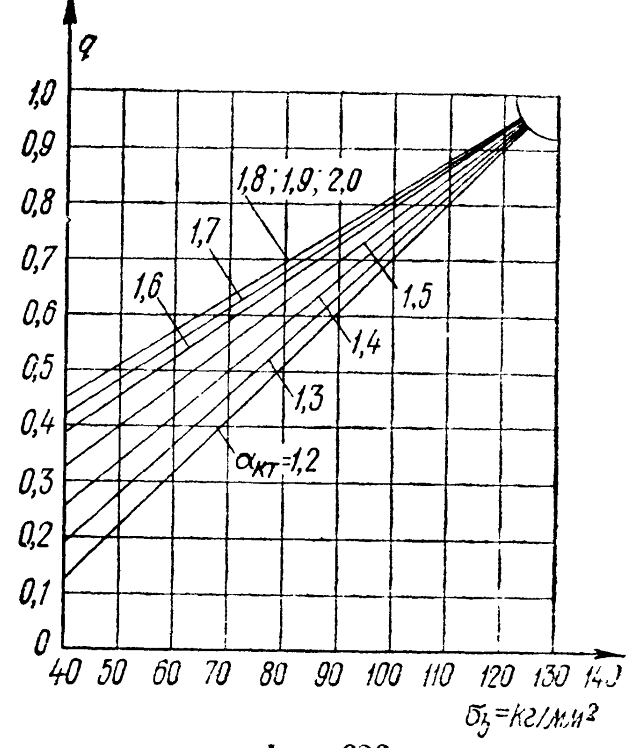
Таким образом, можно рассматривать два коэффициента концентрации: первый — теоретический $\alpha_{\text{кт}}$ — учитывает лишь влияние *формы* фактора концентрации и определяется, главным образом, при помощи первых двух из указанных выше методов; второй же — действительный коэффициент концентрации $\alpha_{\text{кд}}$, — определяемый опытами на усталость, учитывает влияние не только формы, но и *материала* детали.

Так как это влияние сказывается только на превышении местных напряжений над общими, т. е. на величинах $(\alpha_{\text{кт}} - 1)$ и $(\alpha_{\text{кд}} - 1)$, то степень «чувствительности» материала к местным напряжениям можно определить отношением этих двух величин, так называемым «коэффициентом чувствительности»:

$$q = \frac{\alpha_{\text{кд}} - 1}{\alpha_{\text{кт}} - 1}. \tag{37.3}$$

Этот коэффициент зависит от характера материала: для высококачественных, термически обработанных легированных сталей он доходит до единицы, а для малоуглеродистых сталей падает до 0,5. Крайне мало чувствительным к местным напряжениям оказывается чугун; для него величина q близка к нулю и действительные коэффициенты $\alpha_{\text{кд}}$ близки к единице. Это объясняется тем, что предел выносливости чугуна весьма сильно зависит от наличия микроскопических включений графита, представляющих собою фактически очень острые трещины в массе основного металла; влияние этих трещин, всегда имеющихся в чугуне, настолько велико, что почти совершенно сглаживает эффект других факторов концентрации напряжений.

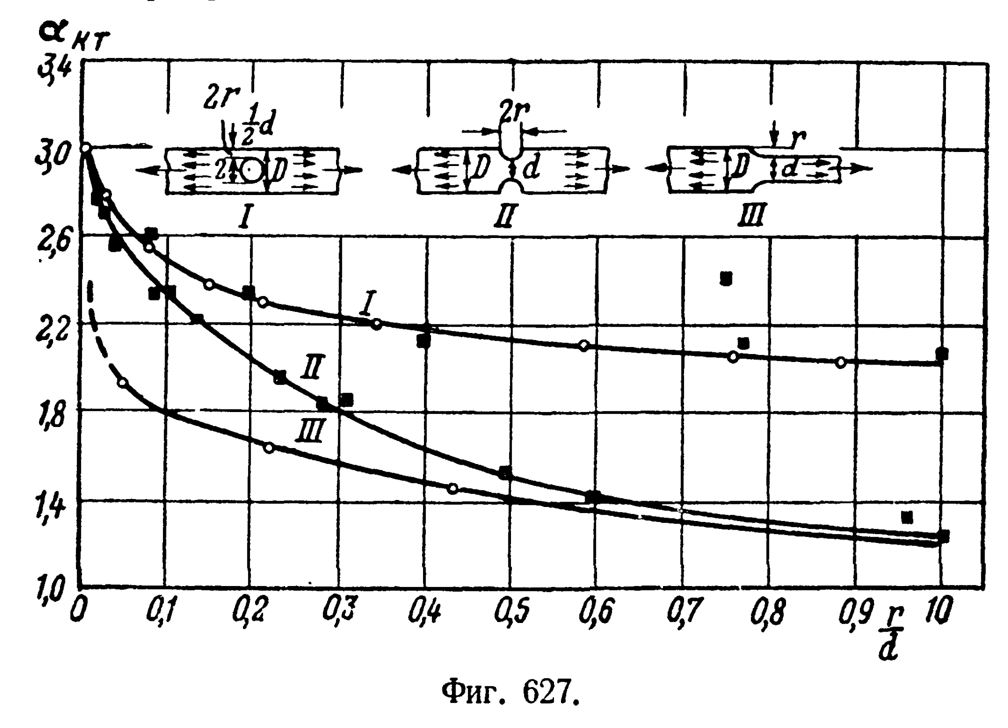
Коэффициент чувствительности не является, однако, только характеристикой материала, он зависит от геометрической конфигурации детали и от её абсолютных размеров; с увеличением абсолютных размеров детали q растёт.



Фиг. 626.

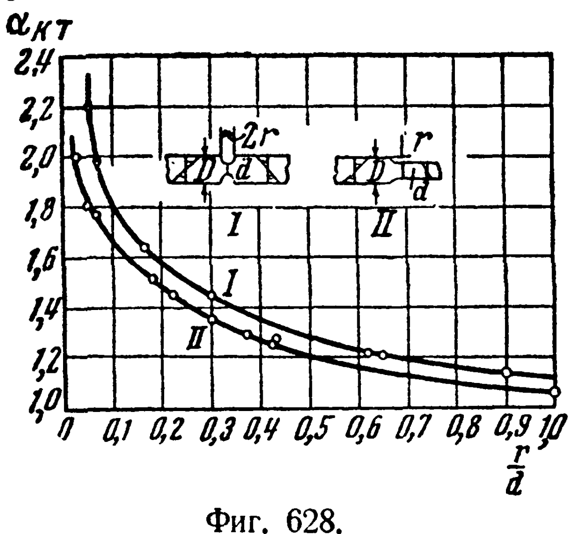
Приближённо (без учёта влияния абсолютных размеров детали) величина коэффициента чувствительности q для стали может быть определена из графиков на фиг. 626 в зависимости от предела прочности материала (в пределах от 40 до 130 *кг/мм*²) и от теорети-

ческого коэффициента концентрации $\alpha_{кт}$ (фиг. 627 и 628). Этот график получен путём обработки экспериментальных данных по испытанию на усталость малых (диаметром 7—10 *мм*) образцов различных марок стали при разных теоретических коэффициентах концентрации.



Фиг. 627.

Из него видно, что коэффициент чувствительности растёт с увеличением предела прочности материала и теоретического коэффициента концентрации. Начиная со значения $\alpha_{кт}=1,8$, дальнейшее увеличение $\alpha_{кт}$ уже не влияет на величину коэффициента чувствительности. Для легированных сталей с высоким пределом прочности (130 *кг/мм*²) можно считать коэффициент q равным единице и $\alpha_{кд}=\alpha_{кт}$.



Фиг. 628.

Для цветных металлов имеется значительно меньше данных о величине коэффициента чувствительности. Для электрона (сплав магния с алюминием, цинком, марганцем) в отливках этот коэффициент равен 0,15; в редких случаях он повышается до 0,25. Для электрона в тянутом или штампованном виде коэффициент чувствительности повышается и колеблется в пределах 0,35 — 0,50. Для алюминиевых сплавов наблюдались несколько более низкие значения коэффициентов чувствительности.

Для определения теоретического коэффициента концентрации в наиболее распространённых случаях концентрации напряжений (отверстия, выточки, галтели) могут быть использованы изображён-

ные на фиг. 627 и 628 графики изменения величины $\alpha_{кт}$ в зависимости от степени резкости нарушения формы детали при растяжении или сжатии (фиг. 627) и чистом изгибе (фиг. 628). Эти коэффициенты определены на плоских образцах с помощью оптического метода измерения напряжений. Для круглых образцов с выточками и галтелями соответствующие значения $\alpha_{кт}$ оказываются несколько меньшими. Некоторые значения $\alpha_{кт}$ для круглых стержней приведены в таблице 37.

Таблица 37. **Коэффициенты концентрации.**

Вид деформации и фактора концентрации напряжений	$\alpha_к$
I. Изгиб и растяжение:	
1. Полукруглая выточка на валу; отношение радиуса выточки к диаметру вала:	
0,1	2,0
0,5	1,6
1,0	1,2
2,0	1,1
2. Галтель Отношение радиуса полной галтели к высоте сечения (диаметру вала):	
0,0625	1,75
0,125	1,50
0,25	1,20
0,5	1,10
3. Переход под прямым углом	2,0
4. Острая V-образная выточка	3,0
5. Нарезка дюймовая	2,0
6. Нарезка метрическая	2,5
7. Отверстия при отношении диаметра отверстия к поперечному размеру сечения от 0,1 до 0,33	2,0
8. Риски от резца на поверхности изделия	1,2—1,4
II. Кручение:	
1. Галтель при отношении радиуса галтели к наименьшему диаметру вала:	
0,02	1,8
0,10	1,2
0,20	1,1
2. Шпоночные канавки	1,6—2,0

Следует подчеркнуть, что с помощью графиков фиг. 627 и 628 и таблицы 37 определяются теоретические, т. е. максимальные возможные значения коэффициентов концентрации; зная величину теоретического коэффициента концентрации $\alpha_{кт}$, величину действительного коэффициента концентрации $\alpha_{кд}$ можно вычислить по формуле

$$\alpha_{кд} = 1 + q(\alpha_{кт} - 1), \qquad (37.4)$$

вытекающей из соотношения (37.3). Однако если значение коэффициента чувствительности q, входящего в эту формулу, приближённо

определять с помощью графиков фиг. 626, то искомая величина действительного коэффициента концентрации $\alpha_{кд}$ окажется вычисленной тоже приближённо. Поэтому значения $\alpha_{кд}$ предпочтительнее определять непосредственно из испытаний на усталость образцов соответствующей формы. Значения коэффициентов концентрации $\alpha_{кт}$ и $\alpha_{кд}$ для более широкого круга факторов концентрации приводятся в специальных курсах и справочных пособиях[1]).

Довольно простые приближённые эмпирические формулы были предложены для вычисления действительных коэффициентов концентрации для стали в зависимости от предела прочности. В том случае, когда деталь не имеет резких переходов, выточек, шпоночных канавок и обладает чисто обработанной резцом поверхностью (но не полированной)

$$\alpha_{кд} = 1{,}2 + 0{,}2\,\frac{\sigma_в - 40}{110}. \qquad (37.5)$$

В случае же, когда имеются резкие переходы, надрезы, выточки:

$$\alpha_{кд} = 1{,}5 + 1{,}5\,\frac{\sigma_в - 40}{110}. \qquad (37.6)$$

Эти формулы годятся для стали с пределом прочности 40—130 *кг/мм*^{2} и являются достаточными для практического применения; $\sigma_в$ выражается в *кг/мм*^{2}.

Говоря о местных напряжениях, необходимо особенно подчеркнуть влияние всякого рода повреждений поверхности на величину предела выносливости. Опыты показали, что кованые детали с поверхностью, не подвергавшейся механической обработке, дают предел выносливости, меньший, чем тот же материал после удаления поверхностного слоя и полировки; разница достигает для малоуглеродистой стали 15—20%, для высококачественных сталей даже 50%.

Подобного же рода явление наблюдается при работе пружин, изготовляемых из высокосортных легированных сталей, если поверхность этих пружин после термической обработки (закалка и отпуск) не подвергается уже механической обработке; наличие подобной поверхности снижает предел выносливости в некоторых случаях *вдвое*. Даже простые царапины и риски снижают предел выносливости на 10—20%.

Очень важным фактором, вызывающим значительную концентрацию напряжений, является плотная посадка с натягом одной детали на другую, например ступиц шкивов, дисков и колёс на вал или ось. Многочисленные опыты показали, что в этом случае действительный коэффициент концентрации *доходит* до 1,8—2,0. Конструктивными мерами (§ 245) можно понизить эту величину.

---

[1]) См., например, Серенсен С. В., Тетельбаум И. М., Пригоровский Н. И., Динамическая прочность в машиностроении, 1946.

Специальный вид комбинированного влияния местных напряжений и химического воздействия представляет собой резкое снижение предела выносливости при коррозии. Опыты показывают, что если производить испытания на усталость в воде или другой жидкости, вызывающей коррозию металла, то предел выносливости значительно снижается. Это влияние слабо сказывается на нержавеющей стали.

Наконец, за счёт своеобразных местных напряжений надо отнести влияние на предел выносливости структуры стали. Так как металл представляет собой конгломерат кристаллических зёрен различной величины и различно ориентированных, то в действительности мы всегда имеем в известной мере неравномерное распределение напряжений даже при простом растяжении. Эта степень неравномерности увеличивается с неравномерностью величин отдельных зёрен. Поэтому получение возможно более однородной мелкозернистой структуры стали при помощи термической обработки повышает предел выносливости.

В заключение необходимо ещё раз подчеркнуть, что *чем более высокую прочность имеет сталь, тем она чувствительнее ко всякого рода надрезам и повреждениям поверхности, тем более культурной обработки она требует.*

Полученными данными о пределе выносливости и о коэффициентах концентрации мы воспользуемся в дальнейшем, чтобы установить правила для выбора допускаемых напряжений.

§ 240. Влияние размеров детали на величину предела выносливости.

Приведённые выше данные о величине предела выносливости получены, как правило, при испытании образцов малого диаметра, от 7 до 10—12 *мм*. В последнее время начали определять предел выносливости на образцах большого диаметра, до 40—50 *мм*. Существуют машины для испытания на усталость осей подвижного состава в натуральную величину, позволяющие испытывать оси диаметром 150 и даже 300 *мм*.

Эти опыты показали, что, во-первых, результаты, получаемые для отдельных образцов такого большого размера, дают очень значительный разброс точек при попытке определить предел выносливости по методу, данному на фиг. 616, во-вторых, предел выносливости, хотя и не очень точно определённый вследствие разброса данных эксперимента, всё же оказывается для больших образцов ниже, и иногда значительно ниже, чем для малых. Это снижение особенно имеет место для легированных сталей; на предел выносливости углеродистых сталей влияние абсолютных размеров значительно слабее.

Экспериментально установленный факт снижения предела выносливости в изделиях по сравнению с величиной предела выносливости в малых образцах, испытываемых обычно в лабораториях,

имеет очень большое значение, так как это обстоятельство идёт *не в запас прочности.*

К сожалению, в настоящее время ещё не найдено более или менее достоверное объяснение этому факту; по-видимому, указанное снижение предела выносливости вызывается рядом обстоятельств, в частности:

а) В больших образцах более вероятно наличие различных внутренних факторов концентрации напряжений (включения, пузыри и т. д.); малые образцы оказываются в этом отношении обычно чище.

б) При изготовлении образцов поверхностный слой получает некоторый наклёп, который может оказаться относительно большим в малых образцах; между тем опыты показывают, что наклёп в целом ряде случаев может повышать предел выносливости.

в) Наконец, при одной и той же величине наибольшего (в крайнем волокне) напряжения в малых образцах падение напряжения при переходе к более глубоко расположенным слоям металла происходит интенсивнее, чем в больших; как говорят, *градиент* напряжений в малых образцах больше, и отдельные кристаллические зёрна оказываются в лучших условиях.

Все эти соображения, однако, являются лишь некоторыми предположениями.

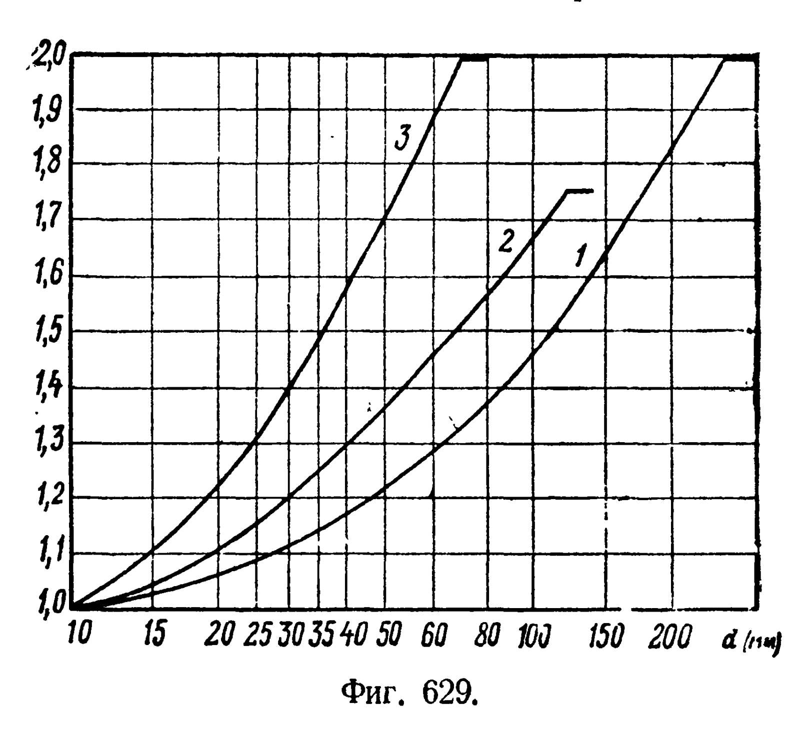
Эксперименты с определением действительных коэффициентов концентрации на образцах разных размеров показали, что увеличение абсолютных размеров образца в известной мере эквивалентно повышению коэффициента чувствительности материала. Например, испытание двух образцов с диаметрами 10 и 40 *мм* из углеродистой стали с $\sigma_в = 50$ *кг/мм*^{2} показало, что при $\frac{r}{d} = 0{,}025$ для малого образца $\alpha_{кд} = 1{,}5$, в то время как для большого $\alpha_{кд} = 2{,}4$, т. е. совпадает с его теоретическим значением. Зато при увеличении $\frac{r}{d}$ коэффициент $\alpha_{кд}$ для больших образцов падает резче, чем для малых. Всё это имеет большое практическое значение, так как показывает, что факторы концентрации, вызывающие большие местные напряжения, в действительности гораздо опаснее, чем это дают лабораторные опыты с малыми образцами.

Таким образом, при проверке прочности материала влияние абсолютных размеров детали на величину предела выносливости обязательно должно быть учтено. Избежать необходимости такого учёта, очевидно, можно было бы только, определяя величину предела выносливости на моделях деталей, изготовленных в натуральную величину. Последнее, однако, далеко не всегда возможно. Вместе с тем в настоящее время уже имеется более или менее достаточное количество данных по сравнительным испытаниям на усталость малых лабораторных (диаметром 7—10 *мм*) и больших образцов из одного и того же материала. Используя эти данные и оценивая степень снижения предела выносливости за счёт увеличения размеров

образца с помощью так называемого *масштабного коэффициента* $\alpha_м$, представляющего собой отношение предела выносливости малого образца p_r к пределу выносливости геометрически подобного большого образца или детали $p_r^д$, можно по известному значению предела выносливости, полученному из испытаний малых образцов, приближённо определить величину предела выносливости детали. Так как $\alpha_м = \frac{p_r}{p_r^д}$, то

$$p_r^д = \frac{p_r}{\alpha_м}. \qquad (37.7)$$

Величина масштабного коэффициента $\alpha_м$ в зависимости от абсолютных размеров образца или детали может быть определена по графикам фиг. 629. При этом снижение предела выносливости детали определяется по отношению к пределу выносливости, полученному из испытаний на усталость образцов диаметром 10 *мм*. Величина $\alpha_м$ зависит не только от абсолютных размеров детали, но и от материала детали и фактора концентрации напряжений. На фиг. 629 по кривой *1* определяются значения $\alpha_м$ для деталей из углеродистых сталей при отсутствии концентрации напряжений, по кривой *2* — для деталей из углеродистых сталей при умеренной концентрации напряжений ($\alpha_{кд} < 2$) и для деталей из легированных сталей при отсутствии концентрации напряжений, по кривой *3* — для деталей из легированных сталей при наличии концентрации напряжений. Графики фиг. 629 можно применять для гладких образцов только при изгибе и кручении, а для образцов с концентрацией напряжений — при всех видах напряжённого состояния.



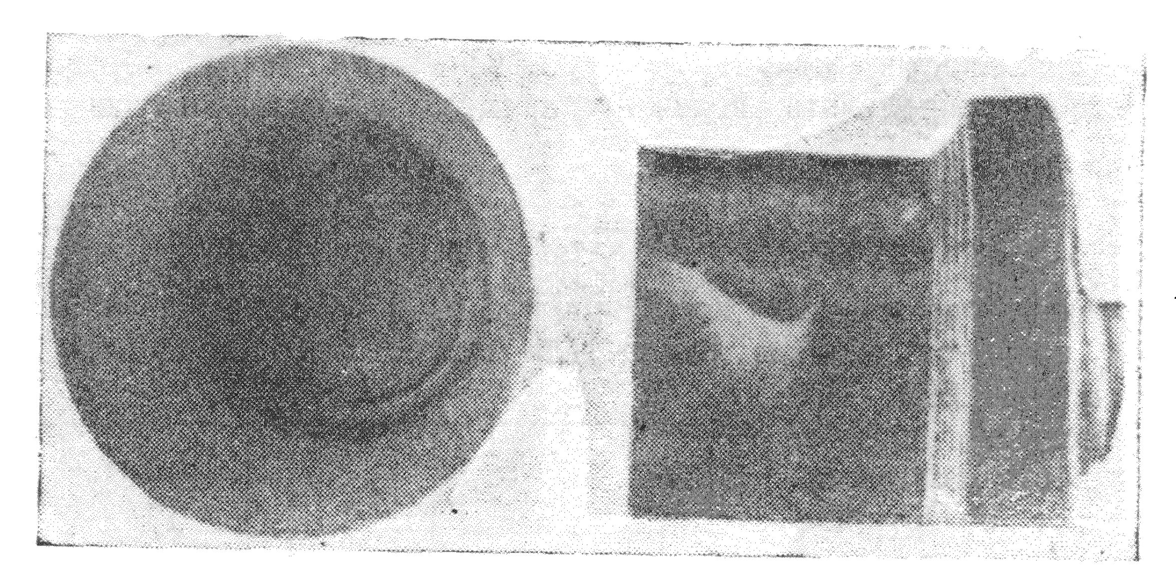
Фиг. 629.

§ 241. Практические примеры разрушения при переменных нагрузках. Механизм появления и развития трещин усталости.

После того как установлены все обстоятельства, характеризующие явление разрушения при переменных нагрузках, следует рассмотреть некоторые практические случаи подобного вида поломок.

На фиг. 630 и 631 показан случай излома вагонной оси (изгиб при вращении), вызванный резким переходом от утолщённой части

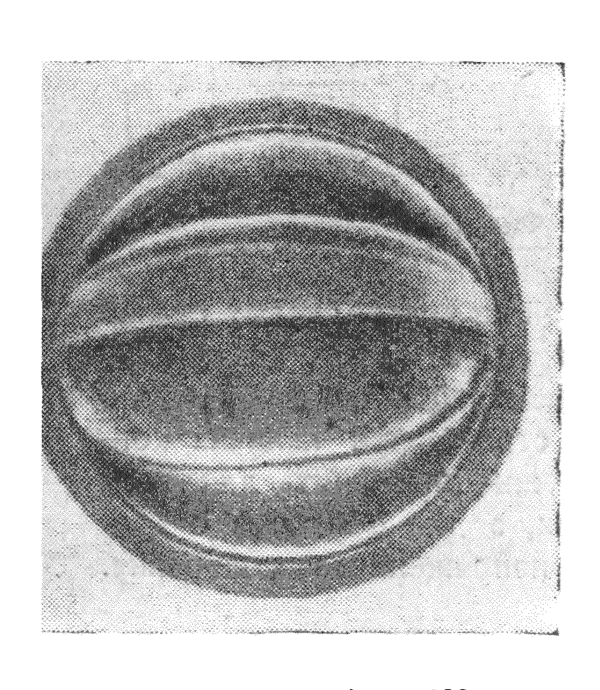
к более тонкой; вместо плавного перехода галтелью дан ступенчатый переход с грубыми рисками от резца. Трещина усталости начинается с наружной поверхности и имеет кольцеобразную форму.



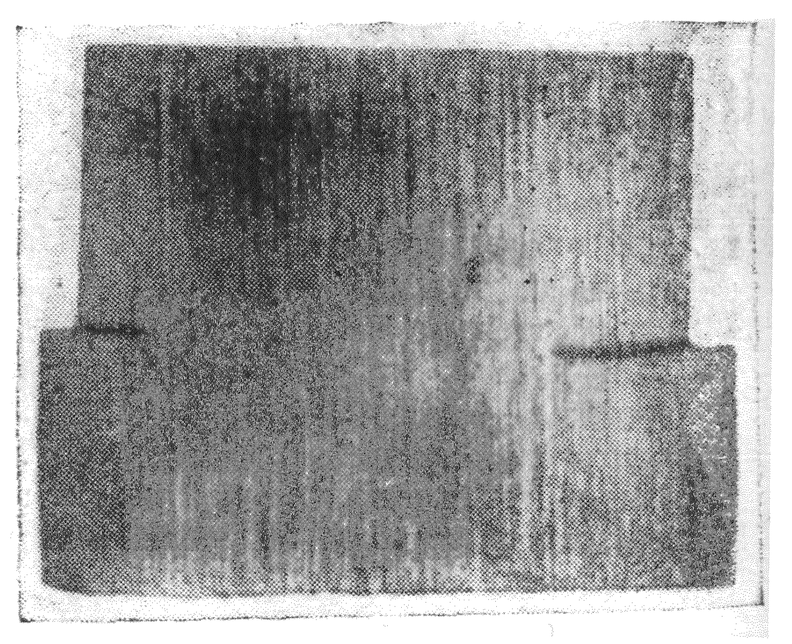
Фиг. 630. Фиг. 631.

Материал оси вполне удовлетворителен; на это указывает и весьма малая площадь зоны мгновенного излома.

На фиг. 632 показан излом оси, не вращавшейся, а лишь изгибавшейся в вертикальной плоскости. Материал — осевая сталь с преде-



Фиг. 632.



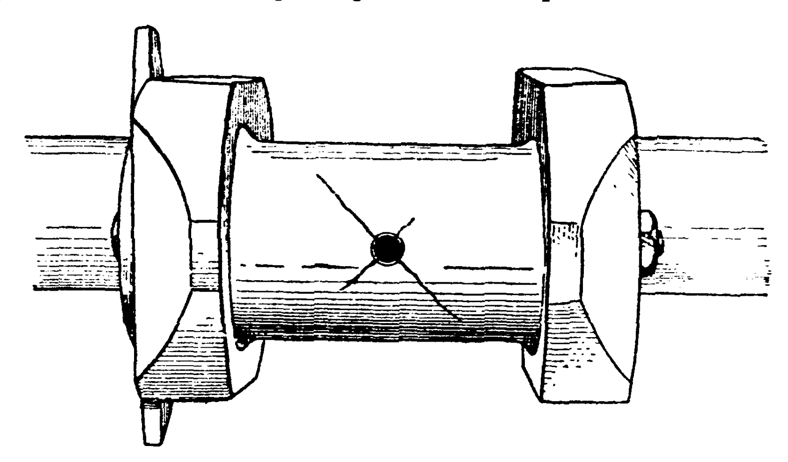
Фиг. 633.

лом прочности около 50 *кг/мм*². Причиной развития трещины усталости явился резкий (под прямым углом) переход от квадратного сечения оси к круглому.

На фиг. 633 показан продольный разрез другого конца этой же оси, ещё не успевшего сломаться; ясно видны трещины усталости,

распространяющиеся от крайних волокон сечения в месте резкого перехода.

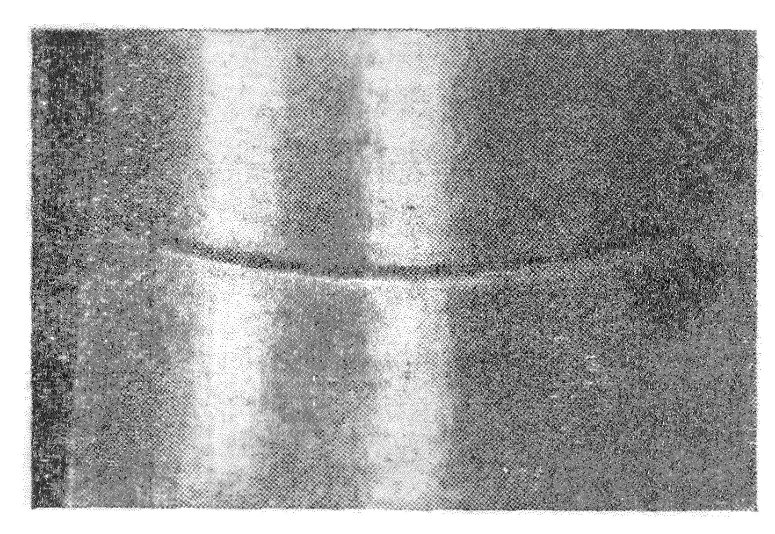
На фиг. 632 видны зоны этих трещин и зона окончательного излома. Следует обратить внимание на ряд криволинейных полос и линий на поверхности трещин усталости. Это — следы *постепенного* развития трещины; разрушение идёт примерно по нормали к этим линиям; таким образом, изучая расположение этих линий, мы всегда можем найти исходный пункт, откуда началось развитие трещины; как правило, там и следует искать источник местных напряжений, вызвавших начало трещины. Рост трещины объясняется тем, что у её дна, в свою очередь, развиваются очень высокие местные напряжения, которые и обусловливают дальнейшее распространение трещины в глубь металла.



Фиг. 634.

Интересно отметить, что оси, излом одной из которых изображён на фиг. 632, не давали трещин усталости, когда они изготовлялись из более мягкой стали ($\sigma_в \approx 40$ *кг/мм*²), даже при той же конфигурации. Здесь сказывается различная чувствительность этих сталей к местным напряжениям.

На фиг. 634 показаны трещины усталости, начавшие распространяться от отверстия для смазки в шейке коленчатого вала, работавшего на переменное (в разные стороны) кручение. Трещины идут под углом 45° к оси вала, перпендикулярно к главным напряжениям.

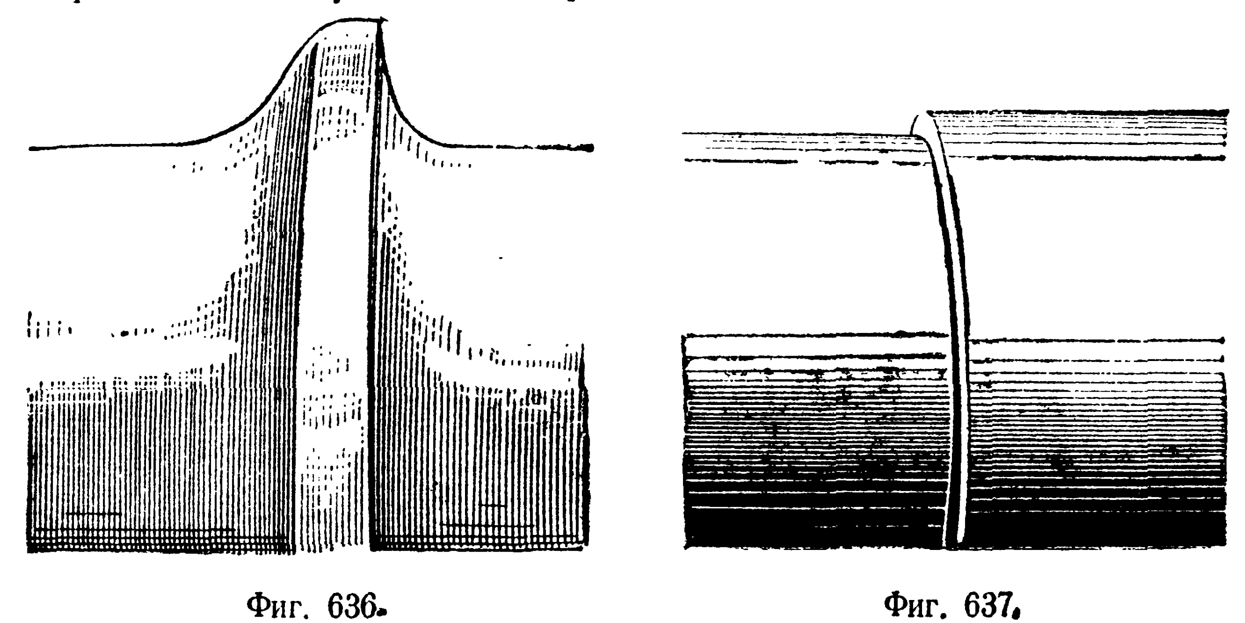


Фиг. 635.

На фиг. 635 показано начало трещины усталости на оси моторной дрезины, у места очень небольшого (0,5 *мм* высотой), но очень резкого уступа. Мы видим, что трещина усталости начинает развиваться в нескольких местах сразу и даже не строго в одном сечении. Позднее все эти трещины сливаются в одну.

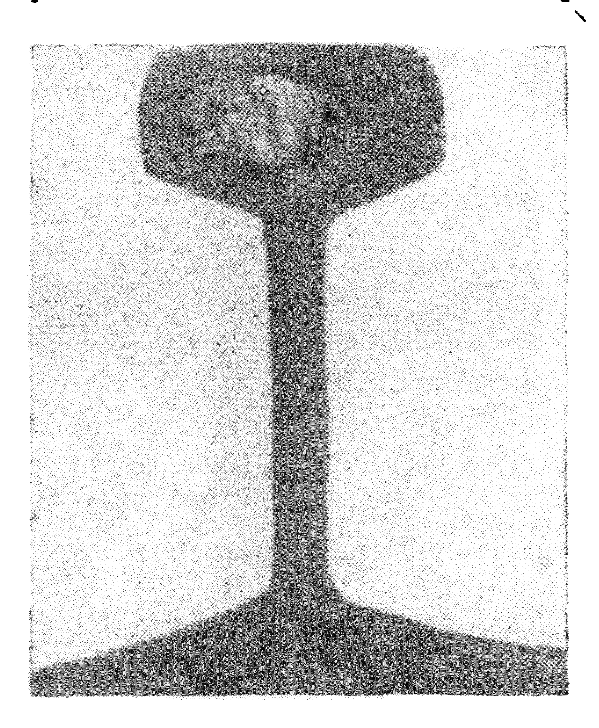
На фиг. 636 и 637 показаны очертания двух паровозных осей, из которых одна, с плавными переходами, прослужила благополучно

40 лет, вторая же, с резким надрезом, — всего один год. Материал второй оси был лучше, чем первой.



Фиг. 636. Фиг. 637.

Наконец, на фиг. 638 показан пример трещины усталости, начавшейся от внутреннего фактора концентрации. Пустота или постороннее включение в головке рельса создали очаг местных напряжений, вызвавший постепенное развитие трещины, ослабившей сечение и приведшей к излому. На поверхности излома трещина имеет вид серебристого пятна.



Фиг. 638.

Приведённых примеров достаточно, чтобы показать характерные черты изломов усталости.

Опыт показывает, что главную роль в образовании этих изломов играет не качество материала (обычно оно оказывалось вполне нормальным), а совершенно неправильная обработка детали, вызывающая весьма значительные местные напряжения. Гораздо реже могут быть случаи, когда плохое качество материала может обусловить появление трещины усталости при таком повреждении поверхности, которое при нормальном материале, может быть, и не вызвало бы излома. Нам известен случай излома оси вследствие наличия точки, выбитой острым керном на поверхности вагонной оси.

В заключение настоящего параграфа следует остановиться на том физическом процессе, который вызывает и заставляет развиваться трещину усталости.

При действии высоких местных напряжений, вызванных тем или иным фактором концентрации и обычно значительно превышающих предел текучести материала, в отдельных кристаллических зёрнах начинаются сдвиги, аналогичные тем, которые имеют место и при статическом растяжении. Разница заключается лишь в том, что при растяжении образца пластические деформации и явления сдвига в кристаллических зёрнах вызываются общими напряжениями, охватывают поэтому весь объём образца и растут в одном направлении; при переменных нагрузках эти деформации происходят в пределах очень малого объёма, подвергающегося местным напряжениям, и происходят то в одном, то в противоположном направлениях. Поэтому они не оказывают заметного влияния на прочность образца в целом, но та часть материала, которая подвергается высоким местным напряжениям, постепенно проходит все стадии пластической деформации, которые испытывает материал всего образца, подвергающегося простому растяжению.

При каждом цикле изменения нагрузок пластически деформированная часть материала, попавшая в зону высоких местных напряжений, испытывает сдвиги то в том, то в другом направлениях; каждый новый сдвиг происходит в другой плоскости, чем предыдущий, так как эти сдвиги сопровождаются упрочнением материала. По мере упрочнения пластически деформированный объём всё более приближается по своей жёсткости к упругому, окружающему его материалу, и в связи с этим берёт на себя всё бо́льшую долю нагрузки. Это вызывает непрерывный рост фактических максимальных напряжений в рассматриваемом малом объёме материала при остающемся постоянном среднем (измеряемом) напряжении. В то же время это разгружает упругую зону, что влечёт за собой уменьшение её деформаций, а значит, и деформаций пластической части материала, заключённой внутри упругой зоны.

Таким образом, при переменных нагрузках происходит постепенный рост фактических наибольших напряжений перенапряжённого объёма материала, а в связи с этим постепенное затухание его деформаций. Если это затухание успеет закончиться раньше, чем фактические напряжения дойдут до величины разрушающего напряжения, материал не даст трещины; мы будем иметь случай работы детали при напряжениях, лежащих ниже предела выносливости. В противном случае, если эти напряжения успеют сделаться равными разрушающему напряжению, возникает начальная трещина, у дна которой процесс повторяется и вызывает дальнейший рост трещины; деталь работает при напряжениях, превышающих предел выносливости.

Физический процесс разрушения при переменных нагрузках по существу не отличается в общих чертах от тех явлений, которые имеют место при статическом растяжении. Это заключение подтверждается и современными исследованиями при помощи рентгеновских лучей механизма разрушения в обоих случаях.

§ 242. Установление допускаемых напряжений.

Было установлено, что основную роль в образовании трещин усталости и разрушении металла от повторно-переменных нагрузок играют местные напряжения. Поэтому условие прочности при переменных напряжениях придётся составлять так, чтобы именно местные напряжения не превышали предела выносливости с коэффициентом запаса k_0, т. е.

$$p_м = \alpha_{кд} p_{max} \leqslant \frac{p_r}{k_0}$$

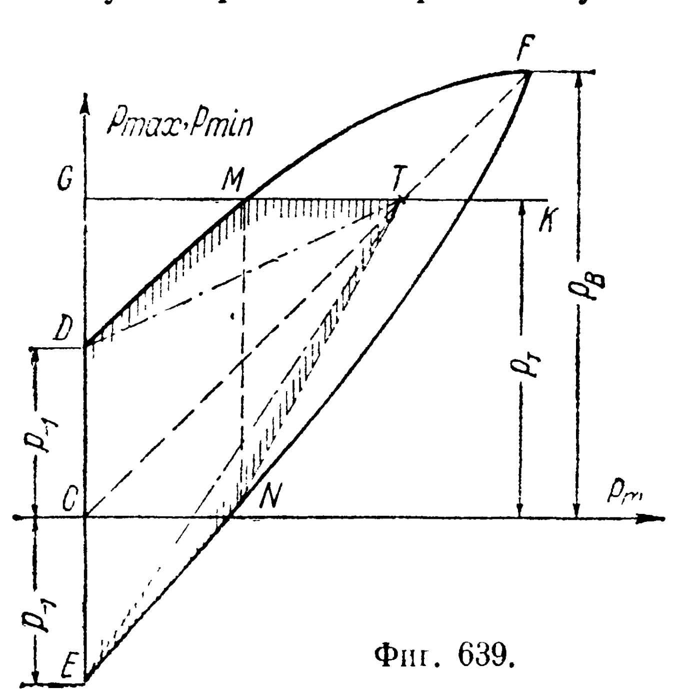
или

$$p_{max} \leqslant \frac{p_r}{k_0 \alpha_{кд}} = [p_r]. \tag{37.8}$$

Величины p_r и $\alpha_{кд}$ найдены; остаётся, выбрав основной коэффициент запаса k_0, найти допускаемые напряжения $[p_r]$; влияние динамичности нагрузки следует учесть или при вычислении p_{max} при помощи динамического коэффициента (§ 216), или добавочным специальным коэффициентом запаса $k_д$. Влияние размеров детали на величину предела выносливости p_r следует учесть введением масштабного коэффициента $\alpha_м$ (см. § 240). Таким образом, для детали вместо (37.8) будем иметь:

$$p_{max} \leqslant \frac{p_r^д}{k_0 \alpha_{кд}} = \frac{p_r}{k_0 \alpha_{кд} \alpha_м} = [p_r]. \tag{37.9}$$

Рассмотренные в § 238 диаграммы (фиг. 617 и 618) дают величины наибольших напряжений, при которых разрушение происходит или путём развития трещины усталости, или (при $p_a = 0$) путём простого разрыва. Таким образом, из этих диаграмм можно получить величины напряжений, эквивалентных пределу прочности материала.



Фиг. 639.

Однако при применении пластичных материалов нарушение нормальной работы конструкции обычно происходит уже при напряжениях, равных пределу текучести $p_т$. Поэтому, чтобы получить полный график разрушающих напряжений, надо на диаграммах $p_{max} - p_m$ и $p_a - p_m$ нанести линию, изображающую напряжённое состояние $p_{max} = p_т$.

На диаграмме $p_{max} - p_m$ это сделать просто: достаточно провести прямую GK, параллельную оси абсцисс и имеющую ординатой $p_т$ (фиг. 639).

Тогда график «разрушающих», в практическом смысле слова, напряжений изобразится линией $DMTNE$, заштрихованной на чертеже. Этот график имеет достаточно сложный для практического применения вид. В запас прочности его можно заменить двумя прямыми, соединив точку T с D и E, как показано на фиг. 639 пунктиром. Таким образом, упрощённая диаграмма $p_{\max}-p_m$ для разрушающих напряжений имеет вид треугольника DTE с ординатами $p_т$ (предел текучести) в точке T и p_{-1} (предел выносливости при симметричном цикле) в точках D и E. Диаграмма легко может быть построена по этим трём точкам.

Зная предел прочности $\sigma_в$, можно найти необходимую для построения графика величину p_{-1} при любом виде деформации (растяжение или сжатие, изгиб, кручение) и определить тем самым положение точек D и E.

Как мы видели выше (§ 237), величина предела выносливости при симметричном цикле p_{-1} связана с $\sigma_в$ соотношением $p_{-1}=\beta_к\sigma_в$, где $\beta_к$ — числовой коэффициент, соответствующий тому или иному виду деформации. Мы имели:

растяжение и сжатие . . . . . $\sigma^0_{-1}=0{,}28\sigma_в$,
изгиб . . . . $\sigma^и_{-1}=0{,}4\sigma_в$,
кручение . . . . $\tau^к_{-1}=0{,}22\sigma_в$.

Подобным же образом можно связать предел текучести с пределом прочности формулой $p_т=\beta_т p_в$. Результаты многочисленных опытов[1]) дают следующие значения предела текучести:

Углеродистые стали

Растяжение или сжатие . . . . . . $\sigma^о_т=(0{,}56\div 0{,}60)\,\sigma_в$
Изгиб . . . . $\sigma^и_т=1{,}20\,\sigma^о_т=(0{,}67\div 0{,}72)\,\sigma_в$
Кручение . . . . $\tau^к_т=0{,}60\,\sigma^о_т=(0{,}34\div 0{,}36)\,\sigma_в$

Специальные стали

Растяжение или сжатие . . . . . $\sigma^о_т=(0{,}75\div 0{,}8)\,\sigma_в$
Изгиб . . . . $\sigma^и_т=1{,}11\,\sigma^о_т=(0{,}83\div 0{,}89)\,\sigma_в$
Кручение . . . . $\tau^к_т=0{,}60\,\sigma^о_т=(0{,}45\div 0{,}48)\,\sigma_в$

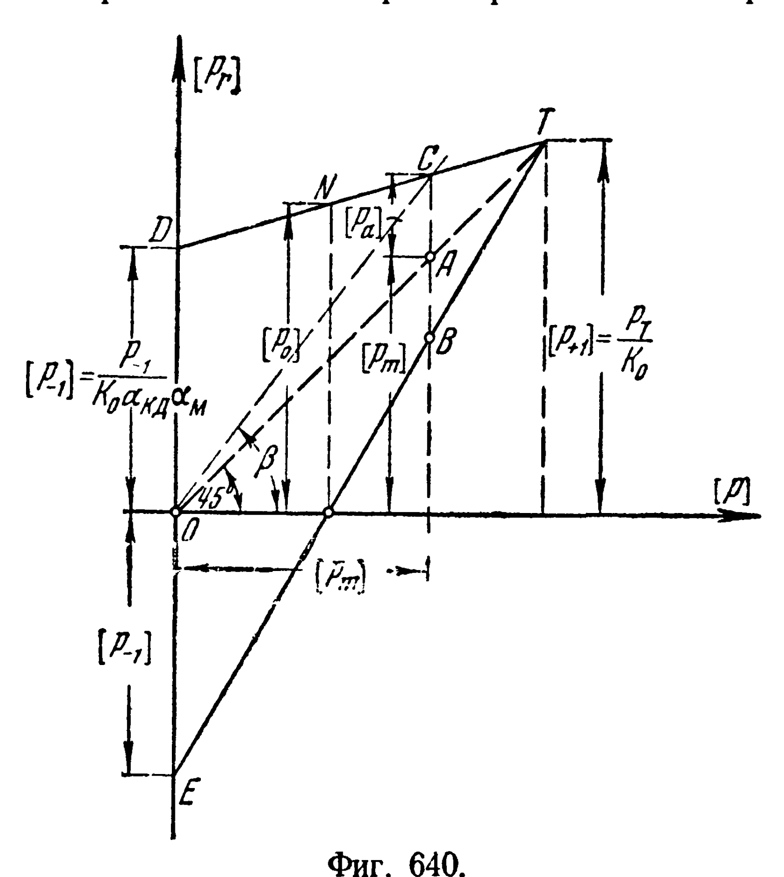
Здесь $\sigma^о_т$, $\sigma^и_т$ и $\tau^к_т$ представляют собой значения предела текучести при растяжении или сжатии, изгибе и кручении. Эти данные позволяют установить положение точки T на диаграмме фиг. 639.

Разделив ординаты графика фиг. 639 на коэффициент запаса и учитывая величину коэффициента концентрации $\alpha_{кд}$, а также и

[1]) Серенсен С. В., Тетельбаум И. М., Пригоровский Н. И., Динамическая прочность в машиностроении, 1946.

величину масштабного коэффициента $\alpha_м$, мы можем из этой диаграммы получить график *допускаемых напряжений* для всех видов нагрузки как переменной, так и постоянной.

Коэффициент запаса k_0, учитывающий влияние общих для всех случаев работы материала обстоятельств, можно, как уже указано (§ 17), принимать равным от 1,4 до 1,6. Так как величина коэффициента концентрации $\alpha_{кд}$ отражается на прочности пластичных материалов лишь при переменных напряжениях и почти не имеет значения (§ 16) при действии постоянных нагрузок, то полностью его следует учесть лишь при симметричном цикле; при постоянной нагрузке его можно не учитывать, а при несимметричных циклах следует вводить пониженные значения этого коэффициента. Влияние размеров детали сказывается, главным образом, также при переменных напряжениях.



Фиг. 640.

Таким образом, с известным приближением график допускаемых напряжений $[p_r]$ может быть получен таким путём (фиг. 639): ординату точки T делим на коэффициент запаса k_0, а ординаты точек D и E — на $k_0\alpha_{кд}\alpha_м$; полученные точки соединяем прямыми линиями (фиг. 640). При таком построении влияние $\alpha_{кд}$ и $\alpha_м$ постепенно падает от симметричного цикла к случаю постоянной нагрузки. Ординаты прямой DT (фиг. 640) представляют собой величины допускаемых напряжений $[p_r]$ для различных случаев соотношений p_{min} и p_{max}.

Для случая постоянной нагрузки допускаемое напряжение $[p_{+1}] = \frac{p_т}{k_0}$ и изображается ординатой точки T; для случая симметричного цикла допускаемое напряжение $[p_{-1}] = \frac{p_{-1}}{k_0\alpha_{кд}\alpha_м}$ изображается ординатой точки D; наконец, при одностороннем цикле, когда напряжение меняется от нуля до определённой величины, величина допускаемого напряжения $[p_0]$ изображается ординатой точки N.

Чтобы получить графики разрушающих и допускаемых напряжений из диаграммы $p_a - p_m$ (фиг. 618), надо на этом чертеже нанести

линию, изображающую условие $p_{\max}=p_т$; подставим вместо $p_{\max}$ его значение p_m+p_a; тогда на диаграмме p_a-p_m уравнение

$$p_{\max}=p_m+p_a=p_т$$

изобразится прямой GMN (фиг. 641). Графиком разрушающих напряжений будет линия AMN; в запас прочности её можно заменить прямой AN.

Поступая так же, как при обработке предыдущей диаграммы, мы получим график допускаемых напряжений в виде, показанном на фиг. 642. Сумма ординаты $[p_a]$ и абсциссы $[p_m]$ каждой точки прямой AB представляет собой величину допускаемого напряжения $[p_r]$ для того или иного цикла напряжений

$$[p_r]=[p_a]+[p_m].$$

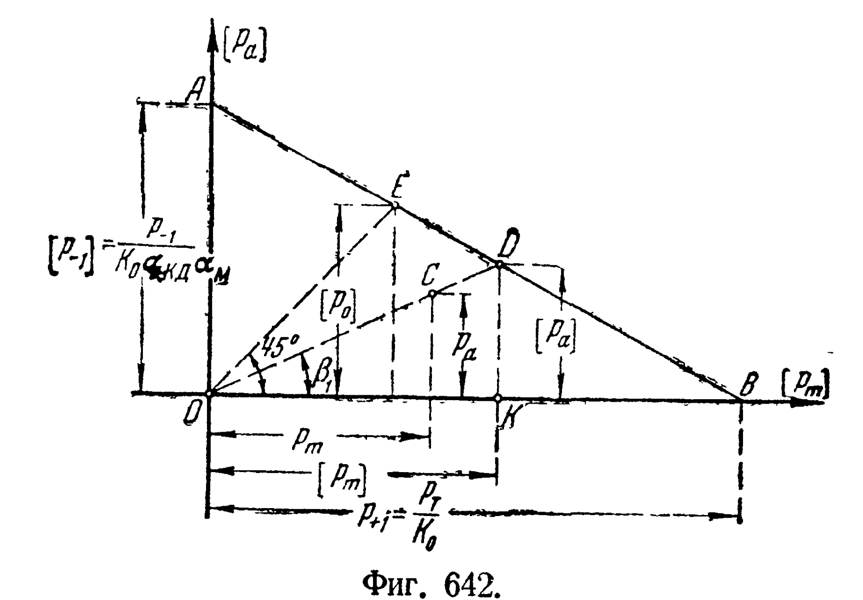
Фиг. 641.

На фиг. 642 показаны и величины допускаемых напряжений $[p_{+1}]$, $[p_0]$ и $[p_{-1}]$.

Чтобы при заданной характеристике цикла r найти при помощи описанных диаграмм величину допускаемого напряжения $[p_r]$, надо на диаграмме фиг. 640 провести луч OC, наклонённый к оси абсцисс под углом β, определяемым условием

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{p_m+p_a}{p_m}=\frac{2p_{\max}}{p_{\max}+p_{\min}}=\frac{2}{1+r};$$

ордината точки C прямо и даст нам величину допускаемого напряжения $[p_r]$.



Фиг. 642.

На диаграмме фиг. 642 надо через начало координат провести луч OD, наклонённый к оси абсцисс под углом β_1, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg}\beta_1=\frac{p_a}{p_m}=\frac{p_{\max}-p_{\min}}{p_{\max}+p_{\min}}=\frac{1-r}{1+r};$$

сумма абсциссы и ординаты точки D пересечения этого луча с прямой AB и даёт нам величину $[p_r]$.

Легко получить и формулу, выражающую $[p_r]$ через $[p_{+1}]$, $[p_{-1}]$ и характеристику цикла r. Используем, например, диаграмму $p_a - p_m$ (фиг. 642). Для заданной характеристики r отношение $\frac{p_a}{p_m} = \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{1-r}{1+r}$; допускаемое напряжение выражается суммой

$$[p_r] = OK + KD = KD(1 + \operatorname{ctg} \beta_1).$$

Величина KD определяется из подобия треугольников KDB и OAB:

$$\frac{KD}{OA} = \frac{KB}{OB} \quad \text{или} \quad \frac{KD}{[p_{-1}]} = \frac{[p_{+1}] - KD \operatorname{ctg} \beta_1}{[p_{+1}]}.$$

Отсюда

$$KD = \frac{[p_{+1}][p_{-1}]}{[p_{+1}] + [p_{-1}] \operatorname{ctg} \beta_1} \quad \text{и} \quad [p_r] = \frac{[p_{+1}][p_{-1}](1 + \operatorname{ctg} \beta_1)}{[p_{+1}] + [p_{-1}] \operatorname{ctg} \beta_1}.$$

Подставляя значение $\operatorname{ctg} \beta_1 = \frac{1+r}{1-r}$, имеем:

$$[p_r] = \frac{2[p_{+1}][p_{-1}]}{(1-r)[p_{+1}] + (1+r)[p_{-1}]}. \tag{37.10}$$

После определения допускаемого напряжения можно составить и условие прочности:

$$p_{\max} = [p_m + p_a] \leqslant [p_r]. \tag{37.11}$$

Если переменные нагрузки меняются не плавно, а сопровождаются *резкими* ударами, то допускаемое напряжение $[p_r]$ следует разделить ещё на дополнительный коэффициент запаса $k_д$. Величина этого коэффициента меняется в зависимости от несимметрии цикла. Чем резче меняется напряжение, тем выше этот коэффициент; для постоянной нагрузки он должен быть принят равным единице, для симметричного цикла пусть его значение будет $k_д$; для того чтобы учесть влияние динамики при промежуточных типах нагрузок, можно поступить так же, как и при учёте концентрации напряжений, а именно, делить ординату p_{-1} не на $k_0 \alpha_{кд} \alpha_м$, а на $k_0 \alpha_{кд} \alpha_м k_д$; ординату же p_{+1} делить только на k_0. Числовые значения коэффициента $k_д$ обычно колеблются между 1 и 2.

Общий ход решения задачи установления допускаемых напряжений описанным способом может быть представлен в виде следующей схемы.

Дано: а) вид деформации; б) соотношение напряжений $p_{\max}$ и $p_{\min}$; в) конфигурация детали; г) механические характеристики материала ($\sigma_в$). Требуется найти допускаемое напряжение $[p_r]$.

Схема решения:

1. Вычислить

$$p_m = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} \quad \text{и} \quad p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}.$$

2. Найти

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}.$$

3. Определить предел выносливости для симметричного цикла при данном виде деформации:

$$p_{-1} = \beta_{\text{к}} \sigma_{\text{в}}.$$

4. По графикам фиг. 627 и 628 найти $\alpha_{\text{кт}}$ в зависимости от конфигурации детали.

5. По графику фиг. 626 найти q.

6. Вычислить действительный коэффициент концентрации:

$$\alpha_{\text{кд}} = 1 + (\alpha_{\text{кт}} - 1) q.$$

Действительный коэффициент концентрации может быть вычислен и по формулам (§ 239):

$$\alpha_{\text{кд}} = 1{,}2 + 0{,}2 \frac{\sigma_{\text{в}} - 40}{100}, \quad \text{или} \quad \alpha_{\text{кд}} = 1{,}5 + 1{,}5 \frac{\sigma_{\text{в}} - 40}{110},$$

если известен лишь *общий* характер обработки детали.

7. По графикам фиг. 629 в зависимости от размеров детали найти величину масштабного коэффициента $\alpha_{\text{м}}$.

8. Найти допускаемое напряжение для симметричного цикла

$$[p_{-1}] = \frac{p_{-1}}{k_0 \alpha_{\text{кд}} \alpha_{\text{м}}}.$$

9. Найти предел текучести материала $p_{\text{т}} = \beta_{\text{т}} \sigma_{\text{в}}$.

10. Определить допускаемое напряжение при статической нагрузке

$$[p_{+1}] = \frac{p_{\text{т}}}{k_0}.$$

11. Найти искомое значение допускаемого напряжения

$$[p_r] = \frac{2 [p_{+1}] [p_{-1}]}{(1 - r) [p_{+1}] + (1 + r) [p_{-1}]}.$$

Описанный выше метод установления допускаемых напряжений является в значительной мере приближённым за счёт спрямления диаграмм и недостаточно точного учёта влияния коэффициента концентрации. При желании можно пользоваться более точным изображением графика разрушающих напряжений[1]), не прибегая к спрямлению его пунктирными линиями, как это было показано на фиг. 639 и 641. Уточнённый способ расчёта может дать значительное

---

[1]) См., например, Подзолов И. В., Расчёт допускаемых напряжений для чёрных металлов, Оборонгиз, 1947.

повышение расчётной величины допускаемого напряжения для циклов с характеристикой r, близкой к $r=0$, при значениях предела выносливости, близких к пределу текучести; в остальных случаях разница в результатах расчёта по спрямлённой и уточнённой диаграммам будет сравнительно невелика.

§ 243. Примеры.

Пример 140. Проверить прочность штока поршня паровой машины паровоза серии С. Давление пара в котле паровоза $q=10$ *ат*. Диаметр цилиндра $D=550$ *мм*. Материал штока — углеродистая сталь с пределом прочности $\sigma_в=60$ *кг/мм²*, диаметр штока $d=90$ *мм*.

Мы имеем дело с симметричным циклом; сила P, растягивающая и сжимающая шток, равна:

$$P=\frac{q\pi D^2}{4}=\frac{10\cdot 3{,}14\cdot 55^2}{4}=23\,760\ кг.$$

Найдём допускаемое напряжение $[p_r]$. Так как цикл напряжений симметричен, то $r=-1$ и $[p_r]=[p_{-1}]=[\sigma_{-1}]$. Предел выносливости при симметричном цикле (осевые усилия) равен $\overset{0}{p}_{-1}=\sigma^0_{-1}=0{,}28\sigma_в=0{,}28\cdot 6000=1700\ кг/см^2$. Поверхность штока обрабатывается чисто, переходы смягчаются достаточно плавными галтелями; поэтому действительный коэффициент концентрации равен:

$$\alpha_{кд}=1{,}2+0{,}2\,\frac{60-40}{110}=1{,}24.$$

Дополнительный коэффициент запаса $k_д$ можно было бы принять, учитывая внезапное приложение нагрузки, равным 2; однако, в связи с некоторой потерей давления пара при переходе в цилиндр и смягчением при этом удара, его можно снизить и принять равным 1,6.

По графику фиг. 629 для детали диаметром 90 *мм* по кривой *2* (углеродистая сталь при умеренной концентрации напряжений) находим величину масштабного коэффициента $\alpha_м=1{,}62$. Основной коэффициент запаса k_0 принимаем 1,4. Допускаемое напряжение $[\sigma_{-1}]=[\overset{0}{\sigma}_{-1}]$ равно:

$$[\overset{0}{\sigma}_{-1}]=\frac{\overset{0}{\sigma}_{-1}}{k_0k_д\alpha_{кд}\alpha_м}=\frac{1700}{1{,}4\cdot 1{,}6\cdot 1{,}24\cdot 1{,}62}=\frac{1700}{4{,}50}=378\ кг/см^2.$$

Наибольшее действительное напряжение в штоке

$$\sigma_{max}=\frac{P}{F}=\frac{4P}{\pi d^2}=\frac{4\cdot 23\,760}{3{,}14\cdot 9^2}=374\ кг/см^2<[\overset{0}{\sigma}_{-1}].$$

Пример 141. Определить допускаемое напряжение на изгиб для пальца кривошипа диаметром $d=12$ *см*, имеющего галтель радиусом $r=5$ *мм*; палец изготовлен из углеродистой стали с пределом прочности $\sigma_в=60$ *кг/мм²*; цикл напряжений симметричен.

В данном случае $[p_r]=[p_{-1}]=[\sigma^и_{-1}]$; предел выносливости для симметричного цикла при изгибе равен:

$$\sigma^и_{-1}=0{,}4\sigma_в=0{,}4\cdot 6000=2400\ кг/см^2.$$

Отношение $\frac{r}{d}=\frac{5}{120}=0{,}042$; по графику фиг. 628 находим $\alpha_{кт}$ при $\frac{r}{d}=0{,}042$:

$$\alpha_{кт}=1{,}90.$$

По графику фиг. 626 находим коэффициент чувствительности q при $\alpha_{кт} = 1,9$ и $\sigma_в = 60$ *кг/мм²*:

$$q = 0,57.$$

Действительный коэффициент концентрации равен:

$$\alpha_{кд} = 1 + (\alpha_{кт} - 1)\,q = 1 + (1,90 - 1) \cdot 0,57 = 1,51.$$

Надо заметить, что вычисленное значение $\alpha_{кд}$ близко к полученному прямым опытом для этой стали.

По графику фиг. 629 для детали диаметром 120 *мм* по кривой *2* (углеродистая сталь с умеренной концентрацией напряжений) находим величину масштабного коэффициента $\alpha_м = 1,73$. Основной коэффициент запаса с учётом динамики принимаем равным $k_0' = 1,8$, тогда допускаемое напряжение равно:

$$[\sigma_{-1}^{и}] = \frac{2400}{1,8 \cdot 1,51 \cdot 1,73} = \frac{2400}{4,7} = 510 \ кг/см^2.$$

Посмотрим, как изменится допускаемое напряжение, если палец сделать из специальной стали с пределом прочности $\sigma_в = 100$ *кг/мм²*. Предел выносливости при изгибе для симметричного цикла будет равен:

$$\sigma_{-1}^{и} = 0,4\,\sigma_в = 0,4 \cdot 10\,000 = 4000 \ кг/см^2.$$

Теоретический коэффициент концентрации останется прежним и равным 1,9; коэффициент чувствительности будет равен (по графику фиг. 626) $q = 0,82$; действительный коэффициент концентрации будет равен:

$$\alpha_{кд} = 1 + (1,9 - 1)\,0,82 = 1,74.$$

Масштабный коэффициент, определённый по кривой *3* фиг. 629 (легированная сталь при наличии концентрации напряжений), равен $\alpha_м = 2$. Допускаемое напряжение равно:

$$[\sigma_{-1}^{и}] = \frac{4000}{1,8 \cdot 1,74 \cdot 2} = \frac{4000}{6,26} = 640 \ кг/см^2.$$

Таким образом, хотя предел прочности материала увеличился более чем на 65%, допускаемое напряжение повысилось всего лишь на 25%. Увеличим теперь радиус галтели r до 10 *мм*, но оставим по-прежнему углеродистую сталь с $\sigma_в = 60$ *кг/мм²*. Тогда

$$\frac{r}{d} = \frac{10}{120} = 0,083;$$

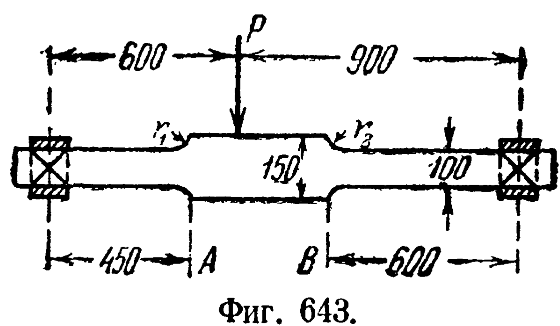
теоретический коэффициент концентрации $\alpha_{кт} = 1,75$; коэффициент чувствительности $q = 0,56$. Действительный коэффициент концентрации равен:

$$\alpha_{кд} = 1 + (1,75 - 1) \cdot 0,56 = 1,42.$$

Масштабный коэффициент равен $\alpha_м = 1,73$. Допускаемое напряжение

$$[\sigma_{-1}^{и}] = \frac{2400}{1,8 \cdot 1,42 \cdot 1,73} = \frac{2400}{4,42} = 545 \ кг/см^2.$$

Пример 142. Определить допускаемую величину силы P для вала, изображённого на фиг. 643. Предел прочности легированной стали, из которой изготовлен вал, равен $\sigma_в = 90$ *кг/мм²*. Сила P состоит из двух частей: одна, величиной $0,25\,P$, сохраняет всё время своё направление; другая, $0,75\,P$, меняет своё направление на 2π за один оборот вала. Коэффициент запаса равен 1,6.



Фиг. 643.

Выясним величину характеристики цикла; напряжения, вызванные силой $0{,}25\,P$, будут постоянными; вызванные же силой $0{,}75\,P$, будут изменяться между крайними значениями, равными по величине, но обратными по знаку; поэтому характеристика цикла равна:

$$r=\frac{p_m-p_a}{p_m+p_a}=\frac{0{,}25\,P-0{,}75\,P}{0{,}25\,P+0{,}75\,P}=-0{,}5.$$

Опасными будут в первую очередь сечения A и B, где могут возникнуть значительные местные напряжения в связи с переходом от одного диаметра к другому. Момент сопротивления для этих сечений равен:

$$W=\frac{\pi r^3}{4}=\frac{\pi\cdot 5^3}{4}=98\ \text{см}^3.$$

Изгибающий момент в сечении A равен:

$$M(A)=P\frac{0{,}9\cdot 0{,}45}{1{,}5}=0{,}27\,P\ \text{кгм}=27\,P\ \text{кгсм}$$

(P — в килограммах). Наибольшее нормальное напряжение в сечении A:

$$\sigma=\frac{M(A)}{W}=\frac{27\,P}{98}=0{,}276\,P\,\text{кг/см}^2.$$

Аналогично для сечения B:

$$M(B)=P\frac{0{,}6\cdot 0{,}6}{1{,}5}=0{,}24\,P\ \text{кгм}=24\,P\ \text{кгсм};$$

$$\sigma=\frac{M(B)}{W}=\frac{24\,P}{98}=0{,}245\,P\ \text{кг/см}^2.$$

Найдём допускаемые напряжения $[p_r]=[\sigma_r^{\text{и}}]$ в этих сечениях:

$$[p_r]=\frac{2\,[p_{+1}]\,[p_{-1}]}{(1-r)\,[p_{+1}]+(1+r)\,[p_{-1}]}.$$

Величина $[p_{+1}]$ одинакова для обоих сечений; она равна $[p_{+1}]=[\sigma_{+1}^{\text{и}}]=$ $=\frac{\sigma_{\text{т}}^{\text{и}}}{k}$ — пределу текучести при изгибе, делённому на коэффициент запаса k. Предел текучести при изгибе для легированной стали (§ 242)

$$\sigma_{\text{т}}^{\text{и}}=1{,}11\cdot 0{,}75\sigma_{\text{в}}=1{,}11\cdot 0{,}75\cdot 90=75\ \text{кг/мм}^2$$

и

$$[\sigma_{+1}^{\text{и}}]=\frac{7500}{1{,}6}=4690\ \text{кг/см}^2.$$

Для нахождения $[p_{-1}]=[\sigma_{-1}^{\text{и}}]=\frac{\sigma_{-1}^{\text{и}}}{k\alpha_{\text{кд}}}$ надо найти $\sigma_{-1}^{\text{и}}$ и величину коэффициента концентрации $\alpha_{\text{кд}}$: последняя будет иметь разное значение для сечений A и B.

Величина $\sigma_{-1}^{\text{и}}=0{,}4\sigma_{\text{в}}=0{,}4\cdot 90=36$ кг/мм². Для сечения A радиус галтели равен $r_1=2$ см, а для сечения B $r_2=0{,}5$ см. Диаметр вала $d=10$ см; таким образом, для сечения A отношение $\frac{r}{d}=0{,}2$ и теоретический коэффициент концентрации по графику II фиг. 628 равен $\alpha_{\text{кт}}=1{,}48$; коэффициент чувствительности при $\sigma_{\text{в}}=90$ кг/мм² по графику фиг. 626 равен $q=0{,}7$; таким образом,

$$\alpha_{\text{кд}}=1+(1{,}48-1{,}0)\,0{,}7=1{,}34$$

Для сечения B

$$\frac{r}{d}=\frac{0,5}{10}=0,05,\quad \alpha_{кт}=1,90,\quad q=0,77;$$

$$\alpha_{кт}=1+(1,9-1,0)\,0,77=1,69.$$

Величина масштабного коэффициента одинакова для обоих сечений и определяется по кривой *3* фиг. 629 (легированная сталь при наличии концентрации напряжений); для детали диаметром 100 *мм* $\alpha_м=2$.

Допускаемое напряжение $[\sigma_{-1}^и]$ равно: для сечения A

$$[\sigma_{-1}^и]=\frac{3600}{1,6\cdot 1,34\cdot 2}=\frac{3600}{4,29}\approx 840\ кг/см^2;$$

для сечения B

$$[\sigma_{-1}^и]=\frac{3600}{1,6\cdot 1,69\cdot 2}=\frac{3600}{5,41}=665\ кг/см^2.$$

Допускаемое напряжение $[\sigma_r^и]$ равно: для сечения A

$$[\sigma_r^и]=[\sigma_{-0,5}^и]=\frac{2\cdot 4690\cdot 840}{(1+0,5)\,4690+(1-0,5)\,840}=1055\ кг/см^2;$$

для сечения B

$$[\sigma_r^и]=[\sigma_{-0,5}^и]=\frac{2\cdot 4690\cdot 655}{(1+0,5)\,4690+(1-0,5)\,655}=845\ кг/см^2.$$

Величина силы P определяется из двух неравенств

$$0,276\ P\leqslant 1055\ кг/см^2,$$
$$0,245\ P\leqslant 845\ кг/см^2,$$

т. е.

$$P\leqslant\frac{1055}{0,276}=3820\ кг,\quad P\leqslant\frac{845}{0,245}=3450\ кг.$$

Таким образом, сила P должна быть не больше 3450 *кг*.

Пример 143. Полый вал диаметром $d=80$ *мм* из хромоникелевой стали с $\sigma_в=110$ *кг/мм²* ослаблен кольцевой выточкой для смазки диаметром $2r=8$ *мм*; касательные напряжения при кручении вала меняются от $-\tau_1$ до $+\tau_2$; отношение $\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{1}{4}$; найти допускаемое напряжение.

Находим характеристику цикла $r=\frac{p_{min}}{p_{max}}=\frac{-\tau_1}{\tau_2}=-0,25$. Предел выносливости при кручении для симметричного цикла равен:

$$\tau_{-1}^к=0,22\,\sigma_в=0,22\cdot 110=24,2\ кг/мм^2.$$

Отношение $\frac{r}{d}=\frac{4}{80}=0,05$; теоретический коэффициент концентрации по графику *I* фиг. 628 (принят как для изгиба) равен $\alpha_{кт}=2,29$; коэффициент чувствительности (фиг. 626) $q=0,89$; действительный коэффициент концентрации $\alpha_{кд}=1+(2,29-1,0)\times 0,89=2,15$. Масштабный коэффициент для детали диаметром 80 *мм* равен $\alpha_м=2$ (кривая *3* фиг. 629). Принимая

основной коэффициент запаса (с учётом динамики) $k=2{,}0$, получаем для $[\tau^{\text{к}}_{-1}]$ значение

$$[\tau^{\text{к}}_{-1}]=\frac{\tau^{\text{к}}_{-1}}{k\alpha_{\text{кд}}\alpha_{\text{м}}}=\frac{2420}{2\cdot 2{,}15\cdot 2}=280\ \textit{кг/см}^2.$$

Предел текучести для специальной стали при кручении равен (§ 242):

$$\tau^{\text{к}}_{\text{т}}=0{,}60\cdot 0{,}75\,\sigma_{\text{в}}=0{,}60\cdot 0{,}75\cdot 110=49{,}5\ \textit{кг/мм}^2.$$

Допускаемое напряжение $[\tau^{\text{к}}_{+1}]$ равно:

$$[\tau^{\text{к}}_{+1}]=\frac{4950}{2}=2475\ \textit{кг/см}^2.$$

Допускаемое напряжение $[\tau^{\text{к}}_{r}]$ равно:

$$[\tau^{\text{к}}_{r}]=[\tau^{\text{к}}_{-0{,}25}]=\frac{2\cdot 2475\cdot 280}{(1+0{,}25)\,2475+(1-0{,}25)\,280}=420\ \textit{кг/см}^2.$$

§ 244. Проверка прочности при переменных напряжениях и сложном напряжённом состоянии.

Указанные выше приёмы проверки прочности материала при переменных напряжениях относятся к случаю простейших деформаций — растяжения, сжатия, кручения и изгиба. Возникает вопрос, как использовать полученные данные для случаев сложного напряжённого состояния.

Наибольшее значение для практики имеет случай совместного действия изгиба и кручения. Как указано в § 167, проверке подлежит элемент материала, испытывающий плоское напряжённое состояние; по четырём его граням действует касательное напряжение $\tau=\frac{M_{\text{к}}}{2W}$ и по двум из них нормальное $\sigma=\frac{M_{\text{и}}}{W}$, где $W=\frac{\pi r^3}{4}$ — момент сопротивления вала круглого поперечного сечения.

Для проверки прочности при постоянной нагрузке мы имели по теории наибольших касательных напряжений (А) и по энергетической теории (Б) такие условия:

$$\text{А)}\ \sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\leqslant[\sigma]\quad\text{и}\quad\text{Б)}\ \sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\leqslant[\sigma].$$

Обе эти формулы могут быть приведены к общему виду путём деления обеих частей неравенства на $[\sigma]$:

$$\text{А)}\ \sqrt{\frac{\sigma^2}{[\sigma]^2}+\frac{\tau^2}{\left(\frac{[\sigma]}{2}\right)^2}}\leqslant 1\quad\text{и}\quad\text{Б)}\ \sqrt{\frac{\sigma^2}{[\sigma^2]}+\frac{\tau^2}{\left(\frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}\right)^2}}\leqslant 1,$$

иначе

$$\sqrt{\frac{\sigma^2}{[\sigma]^2}+\frac{\tau^2}{[\tau]^2}}\leqslant 1,$$

где $[\tau]=\frac{[\sigma]}{2}$ по теории наибольших касательных напряжений и $[\tau]=\frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$ по энергетической теории.

Таким образом, проверка прочности как по той, так и по другой теориям прочности приводит к одному и тому же уравнению:

$$\frac{\sigma^2}{[\sigma]^2}+\frac{\tau^2}{[\tau]^2}\leqslant 1. \qquad (37.12)$$

Так как появление трещины усталости обусловлено теми же физическими процессами деформации материала, которые имеют место и при статическом действии нагрузок, то условие (37.12) может быть применено и к проверке прочности при переменных нагрузках. Величины σ и τ могут быть разложены на составляющие σ_m и σ_a, τ_m и τ_a:

$$\sigma=\sigma_m+\sigma_a; \quad \tau=\tau_m+\tau_a;$$

под $[\sigma]$ и $[\tau]$ в этом случае надлежит понимать значения допускаемых напряжений для изгиба и кручения $[\sigma_к^и]$ и $[\tau_к^и]$, полученные из спрямлённых диаграмм $[p_r]-[p_m]$ или $[p_a]-[p_m]$ (фиг. 640 и 642) с учётом *соответствующих каждому виду деформации* коэффициентов концентрации и характеристик цикла $\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ и $\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}$.

Пример 144. Определить запас прочности в сечении вала диаметром $d=100$ *мм* с галтелью радиусом $r=1$ *мм*. Материал вала — углеродистая сталь с пределом прочности $\sigma_в=60$ *кг/мм²*.

Материал вала подвергается изгибу и кручению; нормальные и касательные напряжения меняются от нуля до наибольшей величины

$$\sigma_{\max}=+800 \text{ кг/см}^2 \quad \text{и} \quad \tau_{\max}=500 \text{ кг/см}^2.$$

Механические характеристики материала равны:

$$\sigma_т^и=1{,}20\cdot 0{,}6\,\sigma_в=1{,}2\cdot 0{,}6\cdot 60=43 \text{ кг/мм}^2;$$

$$\tau_т^к=0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 60=22 \text{ кг/мм}^2;$$

$$\sigma_{-1}^и=0{,}4\cdot 60=24 \text{ кг/мм}^2; \quad \tau_{-1}^к=0{,}22\cdot 60=13{,}2 \text{ кг/мм}^2.$$

Теоретический коэффициент концентрации при $\frac{r}{d}=\frac{1}{100}$ равен $\alpha_{кт}=2{,}2$; коэффициент чувствительности $q=0{,}58$; действительный коэффициент концентрации $\alpha_{кд}=1+(2{,}2-1)\,0{,}58=1{,}64$. Характеристика цикла $r=0$. Масштабный коэффициент для детали диаметром 100 *мм*, из углеродистой стали равен $\alpha_м=1{,}66$ (кривая *2* фиг. 629).

Допускаемая величина напряжений:
для нормальных напряжений

$$[\sigma_{+1}^и]=\frac{\sigma_т^и}{k}=\frac{4300}{k} \text{ кг/см}^2; \quad [\sigma_{-1}^и]=\frac{\sigma_{-1}^и}{k\alpha_{кд}\alpha_м}=\frac{2400}{k\cdot 1{,}64\cdot 1{,}66}=\frac{882}{k} \text{ кг/см}^2;$$

$$[\sigma^и]=2\,\frac{4300\cdot 882}{k^2\left(\frac{4300}{k}+\frac{882}{k}\right)}=\frac{1465}{k} \text{ кг/см}^2;$$

для касательных напряжений [1])

$$[\tau^{к}_{+1}] = \frac{\tau^{к}_{т}}{k} = \frac{2200}{k}\ кг/см^2;$$

$$[\tau^{к}_{-1}] = \frac{\tau^{к}_{-1}}{k\alpha_{кд}\alpha_{м}} = \frac{1320}{k \cdot 1{,}64 \cdot 1{,}66} = \frac{490}{k}\ кг/см^2;$$

$$[\tau^{к}_{к}] = 2\,\frac{2200 \cdot 490}{k^2\left(\frac{2200}{k} + \frac{490}{k}\right)} = \frac{800}{k}\ кг/см^2.$$

Условие прочности принимает вид:

$$\frac{\sigma^2}{[\sigma^{н}_{к}]^2} + \frac{\tau^2}{[\tau^{к}_{к}]^2} \leqslant 1; \quad \frac{k^2\,(800)^2}{(1465)^2} + \frac{k^2\,(500)^2}{(800)^2} = 1,$$

откуда $k = 1{,}45$.

§ 245. Практические меры по борьбе с изломами усталости.

Результаты, изложенные в предыдущих параграфах, дают возможность установить те практические меры, которые позволяют инженеру обеспечить прочность деталей машин и конструкций при переменных напряжениях.

Эти меры могут быть разделены на две категории. С одной стороны, необходимо обеспечить изготовление элементов машин и конструкций из материала, который наилучшим образом сопротивлялся бы действию переменных напряжений. Как мы видели, требования к материалу в этом отношении сводятся к двум положениям: во-первых, желательно применять металл с возможно более высоким пределом прочности при достаточной пластичности, что обеспечит высокое значение предела выносливости; во-вторых, материал должен быть свободен от всяких внутренних «факторов концентрации»; это требует возможно более однородной, мелкозернистой структуры, отсутствия всяких остаточных напряжений (например, закалочных) или нарушений сплошности материала в виде трещин, газовых пузырьков, неметаллических включений.

Указанные требования к материалу объясняют, почему для ответственных деталей, работающих на переменную нагрузку, применяют так часто легированные (хромоникелевые, хромованадиевые) стали с очень высоким пределом прочности, которым при помощи тщательной термической обработки (закалка с последующим отпуском) придана мелкозернистая структура, свободная от внутренних напряжений.

Однако при применении таких сталей иногда приходится встречаться с наличием микроскопических трещин (особенно в хромо-

---

[1]) При кручении принят тот же коэффициент концентрации, что и при изгибе. Пользуясь таблицей 37, можно подсчитать его точнее.

никелевых сталях), так называемых флокенов. Эти трещины, как и включения, могут очень резко снизить предел выносливости стали, обладающей в то же время высоким пределом прочности.

Таблица 38. **Результаты испытаний хромоникелевой стали.**

№ марок	Предел прочности $\sigma_в$ *кг/мм²*	Предел пропорциональности $\sigma_п$ *кг/мм²*	Относительное удлинение при разрыве δ%	Относительное сужение ψ%	Предел выносливости $\sigma^и_{-1}$ *кг/мм²*
1	105,0	100,0	11,6	59,0	30,5
2	108,0	100,0	9,7	60,3	45,0
3	111,0	106,0	10,3	61,6	50,0
4	115,0	—	8,0	59,0	54,0

В таблице 38 приведены результаты испытаний четырёх марок хромоникелевой стали, из которых одна (1) имела флокены; как видно из таблицы, наличие этого порока могло вскрыть только испытание на усталость; все прочие характеристики (предел прочности и т. д.), полученные при статических испытаниях для всех четырёх марок, примерно одинаковы, а предел выносливости для первой марки резко снижен.

Вторая категория мер, обеспечивающих прочность деталей при переменной нагрузке, сводится к *грамотной, культурной проектировке внешних очертаний детали и тщательной обработке её поверхности.* Основная цель, которую должны ставить себе при этом конструктор и технолог, сводится к возможному снижению коэффициентов концентрации напряжений, вызываемых всякого рода резкими изменениями очертания детали и дефектами обработки поверхности. Снижение местных напряжений достигается прежде всего возможно более плавными очертаниями переходов, выемок, надрезов, галтелей. Совершенно необходимо решительно не допускать переходов, вовсе не смягчённых кривой хотя бы не очень большого радиуса; везде, где возможно, следует применять радиус, достаточный для существенного снижения местных напряжений. Данные, позволяющие соответствующим образом выбрать числовую величину этих радиусов, приведены на фиг. 627 и 628. Надо заметить, что иногда даже небольшое увеличение радиуса перехода избавляет деталь от опасности.

Известен случай большого количества изломов коленчатых валов авиационных двигателей в английском воздушном флоте; эти изломы происходили на галтели около места насадки пропеллера; стоило увеличить радиус галтели всего на $1/8'' \approx 3$ *мм*, и изломы прекратились.

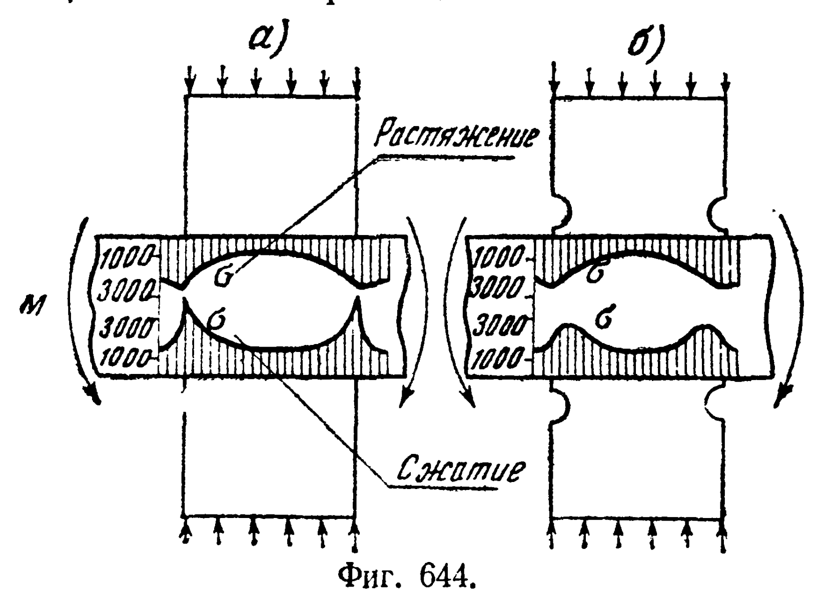
Это объясняется тем, что при напряжениях, близких к пределу выносливости, кривая зависимости разрушающего напряжения от

числа циклов идёт почти горизонтально (фиг. 615). Поэтому, если действительное напряжение хотя бы немного превышает предел выносливости, излом неминуем, так как большинство деталей испытывает достаточное число циклов напряжений, чтобы трещина усталости имела время образоваться. (В таблице 39 приведены ориентировочные данные о предельном числе циклов напряжений, испытываемых различными деталями конструкций и машин во время их службы.)

Таблица 39. **Число циклов напряжений в элементах конструкций.**

Название частей конструкции или машины	Число циклов
Элементы главных ферм железнодорожных мостов	$2 \cdot 10^6$
Балки проезжей части	$40 \cdot 10^6$
Рельсы	$15 \cdot 10^6$
Валы авиамоторов	$18 \cdot 10^6$
Оси вагонов	$50 \cdot 10^6$
Валы автомобильных двигателей	$120 \cdot 10^6$
Штоки и шатуны паровых двигателей	$1\,000 \cdot 10^6$
Валы паровых турбин	$15\,000 \cdot 10^6$
Лопатки паровых турбин	$250\,000 \cdot 10^6$

С другой стороны, стоит смягчением коэффициента концентрации снизить напряжение хотя бы немного ниже предела выносливости, как трещина уже не может возникнуть. Коэффициент концентрации напряжений тем больше, чем резче происходит изменение напряжений, чем больше разница в жёсткости смежных частей стержня, чем резче изменение очертаний детали. Поэтому бороться с местными повышениями напряжений можно не только путём установления более плавных переходов, но и путём снижения разницы в жёсткостях смежных частей детали в тех местах, где неизбежна концентрация напряжений. Так, в последнее время возникла идея «разгружающих» надрезов. Например, при глухой посадке с натягом ступицы колеса на ось или шкива на вал возникают очень значительные местные напряжения в материале вала (фиг. 644, *а*).

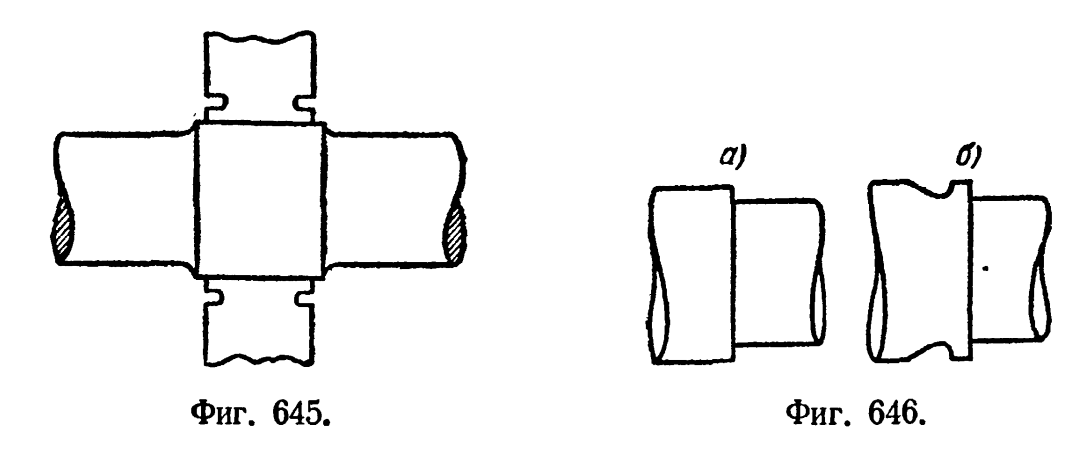


Фиг. 644.

Коэффициент концентрации, отнесённый к нормальным напряжениям от изгиба в сечении, перпендикулярном к оси вала, достигает величины 1,8—2,0. На фиг. 644, *а* дан график величины нормальных напряжений σ в крайних волокнах изгибаемого вала, на который насажена с натягом ступица шкива. Напряжения определены оптическим методом.

На чертеже видно, что около края ступицы напряжения σ, особенно в сжатой зоне, дают резкое местное повышение.

Если в ступице около места посадки сделать вырез, смягчающий жёсткость детали у её края, то местные напряжения падают и распределяются более равномерно (фиг. 644, *б*). Коэффициент концентрации падает с 2,0 до 1,4; если же, кроме окружной канавки, сделать подступичную часть вала несколько большего диаметра, как показано на фиг. 645, то коэффициент концентрации удаётся сни-



Фиг. 645. Фиг. 646.

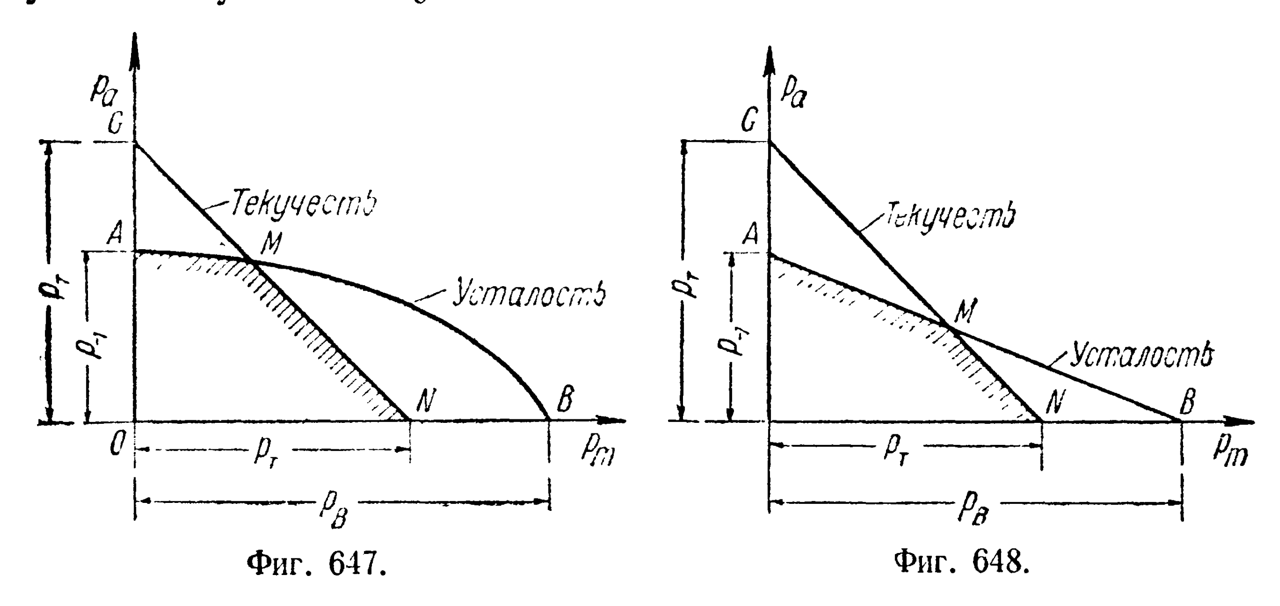
зить до 1,0—1,05. Точно так же, если у места резкого перехода (под прямым углом) сделать плавную выкружку в более толстой части детали (фиг. 646, *а* и *б*), то местные напряжения резко снизятся.

Во всех приведённых примерах изменения формы детали имеют целью создать возможно более плавное изменение напряжений в месте перехода.

Для сопротивления материала переменным нагрузкам не менее важную роль, чем плавность очертаний, играет и чистота отделки поверхности. Всякие царапины, риски от резца играют громадную роль. Нам известен целый ряд случаев обрыва штоков паровой машины паровозов после того, как при ремонте изношенного конического конца штока на него надевалась для утолщения коническая втулка; перед посадкой втулки изношенная поверхность штока грубо обтачивалась резцом и не подвергалась более чистой обработке. Трещина усталости образовывалась под втулкой, начинаясь от места концентрации напряжений, вызванной рисками от резца. Поэтому чистота обработки поверхности изделия, применение никелировки или лакировки для покрытия этой поверхности в случае возможности коррозии являются не роскошью для деталей, работающих при

переменных нагрузках, а во многих случаях совершенно необходимой мерой для возможности благополучной работы конструкции.

Необходимо отметить, что вопросы о выборе материала и о правильном проектировании формы детали нельзя отрывать друг от друга. *Чем лучше материал, чем выше его предел прочности, тем более тщательной обработки он требует.* Применяя дорогостоящую легированную сталь высокого качества и не обращая внимания на снижение местных напряжений, мы рискуем свести на-нет все преимущества применения качественной стали. Коэффициент чувствительности к местным напряжениям для такой стали будет значительно выше, чем для более мягкой, простой углеродистой стали. На это уже было указано в § 239.



Фиг. 647. Фиг. 648.

На фиг. 647 и 648 показаны диаграммы $p_a - p_m$ для всех сортов материала: обыкновенной углеродистой стали и высококачественной легированной стали. На этих диаграммах линии AMB соответствуют разрушению за счёт развития трещин усталости, линии же GN — за счёт образования пластических деформаций при превышении напряжениями предела текучести.

Линии AMN, заштрихованные на чертеже, представляют диаграмму разрушающих напряжений (в широком смысле слова). Как мы видим, для легированной стали возможность разрушения за счёт развития трещины усталости гораздо значительнее, чем для обычной углеродистой стали. Смягчения местных напряжений за счёт пластических деформаций в первом случае ждать гораздо труднее, чем во втором. Этим в значительной степени и объясняется повышенная чувствительность качественной стали к концентрации напряжений.

Резюмируя, можно сказать, что чем лучше применяемая нами сталь как материал, тем более культурной и тщательной обработки она требует, чтобы все её преимущества могли быть использованы в полной мере.

§ 246. Развитие вопроса о сопротивлении материалов динамическим нагрузкам.

Вопросы сопротивления материалов действию динамических нагрузок получили широкое развитие в связи с тем крупным переворотом, который произошёл в экономическом фундаменте капиталистического общества в конце XVIII и начале XIX столетий. В эти годы на месте старой мануфактурной промышленности с её узким ручным базисом начала создаваться мощная фабричная индустрия, опирающаяся на мощную технику; широкое применение нашла паровая машина, появились железные дороги с механической паровой тягой и быстроходные пароходы.

В последующие десятилетия технические достижения были очень разнообразны и характеризовались в основном большими сдвигами в энергетической промышленности, в области развития и усовершенствования всякого рода двигателей — главным образом в отношении увеличения их мощности и быстроходности.

В связи с широким распространением машин, быстродвижущиеся элементы которых подвергались воздействию динамических усилий и которые сами вызывали подобные же усилия в поддерживающих их конструкциях, появилась настоятельная необходимость в изучении сопротивления материалов действию динамических нагрузок.

В прошлом столетии наша страна, значительно отстававшая в развитии техники от крупных капиталистических стран, не имела, в сущности, своего машиностроения и достаточно развитого железнодорожного и водного транспортов. В связи с этим и вопросы динамики в строительной механике в эту эпоху не могли получить и не получили у нас надлежащего развития.

Экспериментальные и теоретические исследования в области динамики широко развернулись у нас только после Великой Октябрьской социалистической революции — в особенности в годы выполнения Сталинских пятилеток. Дело обороны нашей родины, грандиозное строительство новых фабрик и заводов, молодое советское машиностроение, за короткий период добившееся крупных успехов в различных областях техники, — выдвинули целый ряд проблем, связанных с наиболее эффективным и рациональным конструированием новых типов машин и сооружений. В связи с этим перед отечественной наукой были поставлены многие важные задачи, относящиеся к области динамического расчёта конструкций. В процессе решения этих задач работа наших учёных за короткое время ознаменовалась целым рядом крупных научных и технических достижений, значительно опередивших достижения заграничной науки и техники.

В основу многих динамических расчётов в строительной механике положены данные теоретической и прикладной механики — главным образом динамики материальной точки и системы. Поэтому развитие вопроса о сопротивлении материалов действию динамических нагрузок должно быть рассматриваемо в тесной связи с развитием смежных вопросов динамики в механике.

Теория колебаний развилась из исследований Галилея о малых колебаниях маятника. Однако опыты Галилея, в сущности, лишь наметили путь для дальнейшей работы в этой области. Возникновение учения о колебаниях упругих тел в механике связано с именами академиков Петербургской Академии наук — Д. Бернулли, Эрмана и Л. Эйлера. В 1716 г. Эрман нашёл решение некоторых сложных задач о колебаниях маятника; в 1740 г. Эйлер обобщил принцип Эрмана и применил его к исследованию колебаний струн и тонких брусьев. В 1751 г. Эйлер и Бернулли впервые получили дифференциальные уравнения поперечных колебаний. Хотя общая теория колебаний систем с конечным числом степеней свободы была дана в 1762—1765 гг. в работах Лагранжа, но по его же собственному признанию эти работы представляли собой «возврат к методу Эрмана и Эйлера».

Однако пока не были открыты общие уравнения теории упругости, разработанная Лагранжем теория колебаний ещё не могла быть эффективно использована для расчётов в строительной механике. Это стало возможным лишь в первой половине прошлого столетия, когда были выведены дифференциальные условия равновесия и движения. В первой половине прошлого столетия над вопросами механики твёрдого тела работал выдающийся русский математик, новатор в области теоретической и прикладной механики, академик М. В. Остроградский; его труды по математике и механике, и в частности по теории колебательного движения, доставили ему мировую известность.

Широкое использование теории колебаний упругих тел в инженерном деле началось, в сущности, только в текущем столетии; при этом в построении и развитии общих методов динамического расчёта машин и сооружений ведущая роль принадлежала и принадлежит нашим отечественным учёным.

Замечательные работы по теории колебаний были выполнены крупнейшим учёным нашей страны академиком А. Н. Крыловым. Его классическая работа о вынужденных поперечных колебаниях стержней и о влиянии резонанса, теория вибрации корабля, изложенная в изящной математической форме, разнообразные труды по динамике упругих систем, связанные с расчётом быстро вращающихся валов, колеблющихся балок, нагружённых подвижными грузами, и многие другие работы нашли широкое применение на практике как в СССР, так и за границей.

Большую известность приобрели также работы В. З. Власова (Колебания тонкостенных стержней), Н. Е. Кочина (Крутильные колебания коленчатых валов), П. Ф. Папковича (Теория вибрации корабля, поперечные колебания трубчатых мостов), М. И. Яновского (Метод расчёта быстро вращающихся дисков) и др.

Первые более или менее систематические исследования *явления удара*, без обобщения и подведения под них какого-либо теоретического фундамента, были выполнены известным художником и учёным средних веков (конец XV столетия) Леонардо да Винчи. Первая теоретическая работа по этому вопросу принадлежит Эйлеру («О распространении удара», 1748 г.).

В связи с тем, что сопротивление материалов динамическому (ударному) действию нагрузок оказалось значительно отличающимся от сопротивления их статическому действию сил, внимание исследователей было направлено, главным образом, на экспериментальное изучение явления удара. В конце прошлого столетия было обнаружено, что при ударном изломе надрезанных образцов металл может обладать специфической хрупкостью, не проявляющейся ни при каких других видах испытаний. С тех пор такие испытания металлов — так называемая ударная проба надрезанных образцов — широко внедрились в заводскую и научно-исследовательскую практику.

Большое развитие подобные исследования получили у нас, и в особенности за последние 30 лет. Следует отметить многих русских учёных, занимавшихся экспериментальным изучением явления удара вообще и вопросами ударной пробы в частности — С. И. Дружинина и Н. М. Беляева (исследования рельсовой стали), А. Г. Гагарина (конструирование приборов, дающих зависимость между деформациями и усилиями при ударе), А. Н. Динника, И. А. Одинга, Б. Ф. Локшина, А. М. Драгомирова и др. Среди исследований этих учёных особое место занимают систематические и глубоко продуманные опыты А. М. Драгомирова (1917 г.), которые осветили ударную пробу материала с самых разнообразных точек зрения; А. М. Драгомировым были обстоятельно изучены многие факты, которые стали известны за границей только спустя целое десятилетие [1]).

Выдающиеся исследования явления удара как по охвату различных вопросов, так и по обстоятельности и глубине их изучения принадлежат

---

[1]) Давиденков Н. Н., Динамические испытания металлов, 1936 г.

Н. Н. Давиденкову и его школе. Введённый им в практику исследований новый метод испытания ненадрезанных образцов позволил изучить многие явления, весьма существенные для теории удара (влияние состояния поверхности, наклёпа, остаточных напряжений и т. п.). Вопрос об истинной природе ударной хрупкости металлов, для разрешения которого различными исследователями за границей был предложен ряд теорий, находившихся во взаимном противоречии и оказавшихся не в состоянии дать строгое, основанное на единой точке зрения, объяснение явлений в области ударных испытаний получил правильное истолкование в результате работ Н. Н. Давиденкова и его сотрудников.

Эти исследования значительно продвинули вперёд не только разрешение вопроса о динамической прочности металлов в связи с их службой в деталях машин и сооружений. Глубокое аналитическое изучение явления удара позволило Н. Н. Давиденкову построить новую общую теорию механизма разрушения материала (см. главу XXXVIII) и установить общие критерии прочности материалов как при динамическом, так и при статическом действии сил.

Исследование вопроса о сопротивлении материалов действию *переменных нагрузок* с самого же начала пошло чисто экспериментальным путём.

Наиболее тщательно поставленные опыты на специально сконструированных для этой цели машинах были проведены в 1860—1870 гг. Вёлером. Разработанная им методика длительного определения предела выносливости металлов с небольшими изменениями сохранилась и до сих пор.

В начале текущего столетия получили широкое распространение эти исследования и у нас. Пионерами по изучению явления усталости металлов в нашей стране были Воропаев и Симинский; серия опытов по усталости мостового железа была осуществлена К. К. Симинским в 1920—1922 гг. в Киевском политехническом институте. С 1925—1930 гг. исследования в этой области получили дальнейшее развитие в работах Н. Н. Афанасьева, Н. Н. Давиденкова, И. А. Одинга, И. В. Подзолова, С. В. Серенсена и многих других.

В Ленинградском институте инженеров путей сообщения в течение ряда лет, начиная с 1925 г., велись работы по борьбе с изломами от усталости деталей подвижного состава железных дорог (главным образом вагонных и паровозных осей). Многочисленные исследования, выполненные под руководством Н. М. Беляева, позволили устранить основные причины этих изломов, которые одно время являлись бичом железнодорожного транспорта. Не менее практически важной была проведённая там же (1925—1940 гг.) большая работа по изучению динамической (в основном — усталостной) прочности рельсовой стали, результаты которой нашли отражение в наших технических условиях, обеспечивающих длительную и надёжную работу рельсов.

И. А. Одингу и его сотрудникам принадлежит ряд работ по изучению причин возникновения явления усталости и установлению критерия прочности металлов при повторно-переменных напряжениях; эти исследования привели к разработке ряда эффективных мероприятий по устранению разрушений деталей машин от усталости. В результате всестороннего изучения вопроса о так называемой «циклической вязкости» (способности материала, не разрушаясь, поглощать в необратимой форме за один цикл смены напряжений определённое количество энергии), как основной характеристики материала при повторно-переменных нагрузках, И. А. Одингом была выдвинута новая теория усталостного разрушения металлов (теория гистерезисной энергии).

Внедрение результатов эксперимента в практику расчётов деталей машин и сооружений при переменных напряжениях началось у нас примерно с 1930 г. По методике расчётов на прочность в машиностроении широко известны труды С. В. Серенсена и И. В. Подзолова. С. В. Серенсену принадлежат работы, связанные с установлением критерия прочности и развитием методов определения запасов прочности деталей при повторно-переменных нагрузках. И. В. Подзолову — работы по усовершенствованию методики назначения допускаемых напряжений.

ГЛАВА XXXVIII.

ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ.

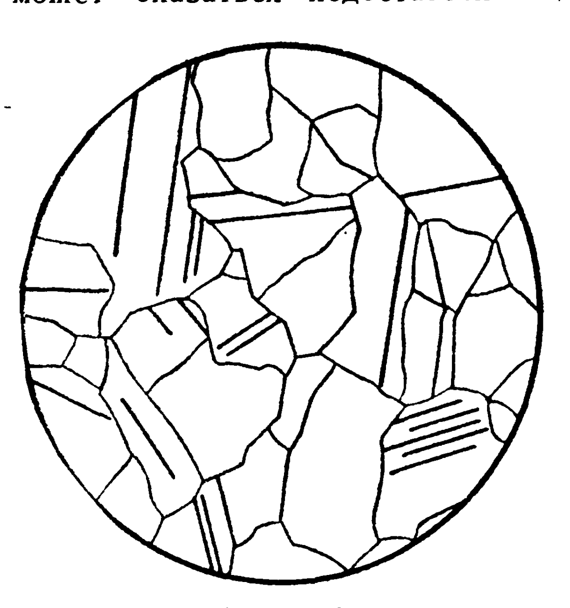
§ 247. Основные понятия.

После того, как подробно рассмотрены разные случаи сопротивления материалов действию всякого рода нагрузок при различных видах напряжённого состояния, целесообразно вновь вернуться к вопросу о том, чем определяется прочность материала при различных обстоятельствах, и развить более глубоко данные, приведённые в главе VIII.

Под прочностью материала или детали сооружения понимается их способность сопротивляться действию усилий, вызывающих ту или иную деформацию. Деформация детали при достаточном её развитии приводит к разрушению — разделению детали на части. При этом в одних случаях разрушение наступает после стадии малых деформаций, более или менее точно следующих закону Гука (хрупкое состояние материала); в других — между стадией малых деформаций и окончательным разрушением материал проходит через стадию значительных остаточных деформаций (вязкое или пластическое состояние материала).

Для суждения о прочности материала, находящегося в хрупком состоянии, требуется изучение только одного предельного (опасного) состояния — перехода от упругой деформации к разрушению материала. Для суждения о прочности материала, находящегося в пластичном состоянии, необходимо изучение двух предельных состояний — перехода упругой деформации в пластическую и перехода от пластической деформации к разрушению материала; очень важно при этом знать, как протекает деформация после достижения предела текучести.

Известно (§ 27 и др.), что для пластичных материалов появление заметных остаточных деформаций и даже начало разрушения в отдельных наиболее напряжённых местах детали во многих случаях ещё не приводит к потере несущей способности или к разрушению этой детали в целом. Таким образом, знания предела текучести и сопротивления материала разрушению может оказаться недостаточным для суждения о прочности детали. Здесь, очевидно, необходимо изучение поведения материала на протяжении всего процесса пластического деформирования.

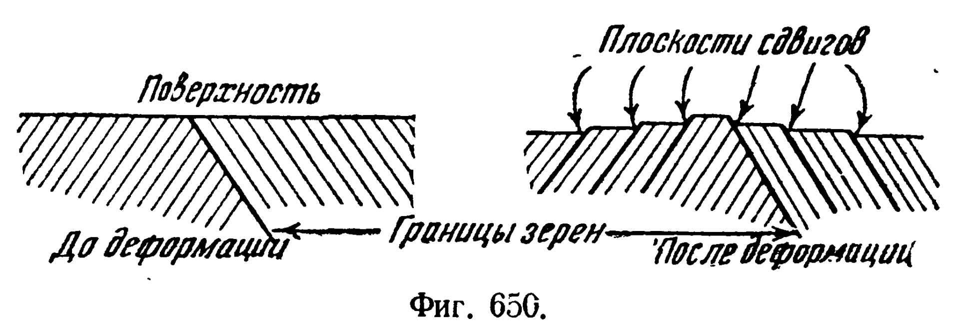


Фиг. 649.

Таким образом, характеристиками, качественно и количественно определяющими упомянутые выше предельные (опасные) состояния, являются: сопротивление материала возникновению и развитию значительных пластических деформаций и сопротивление материала разрушению.

Механизм пластической деформации в кристаллической решётке твёрдых тел изучен ещё недостаточно хорошо. Судя по опытным данным, пластические деформации развиваются за счёт сдвигов или скольжений элементов кристаллической решётки. Явление сдвига или скольжения заключается в параллельном смещении одних частей кристалла по другим вдоль кристаллографических плоскостей. Сдвиги в кристаллах часто происходят вдоль очень большого числа плоскостей, причём число этих плоскостей увеличивается с увеличением напряжений. Эти сдвиги бывают видны под

микроскопом на протравленных образцах деформированного металла в виде системы параллельных линий, различно ориентированных в каждом кристаллическом зерне. На фиг. 649 (рисунок с фото) показана подобная микрофотография (увеличение 250) образца мягкой стали. Линии сдвигов на микрофотографии представляют собой изображение небольших ступенек, получающихся при последовательных сдвигах в том или ином зерне (фиг. 650).



Фиг. 650.

Микродеформации в отдельных зёрнах, суммируясь, дают полные деформации тела в виде сдвига уже больших объёмов материала; так, при простом растяжении эти сдвиги происходят по плоскостям, наклонённым к направлению растяжения под углом в 45—50°.

Явление разрушения, несмотря на его большое практическое значение, изучено пока меньше, чем процессы пластической и, тем более, упругой деформации. Исследования показывают, что разрушение кристаллической решётки твёрдых тел может происходить как путём разъединения (отрыва) атомов, при котором решётка сразу распадается на две части, так и путём скольжения (сдвига) атомов, при котором решётка, постепенно деформируясь, распадается только после значительного искажения. Явление разрушения кристаллического тела в целом оказывается более сложным. Фактор ориентировки, играющий главную роль при разрушении отдельных кристаллов, теряет своё значение для кристаллического тела, представляющего собой совокупность различно ориентированных кристаллов.

Разделение тела на части является следствием многих разрушений, происходящих как внутри отдельных кристаллов, так и по поверхности раздела между ними. Изучение явления разрушения в ряде случаев дополнительно осложняется влиянием предшествующей пластической деформации, вызывающей изменение напряжённого и деформированного состояния тела. Вследствие этого многие вопросы, связанные с явлением разрушения, несмотря на длительное их изучение, и до сих пор ещё остаются неразрешёнными.

§ 248. Сопротивление пластическим деформациям.

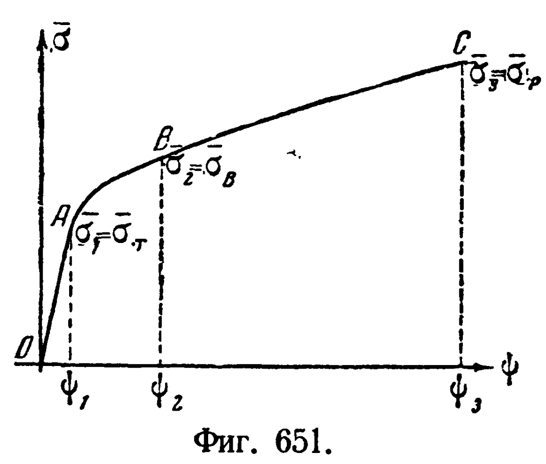
Наиболее удобно, с точки зрения постановки эксперимента, изучать характеристики сопротивления материала нарушению прочности при простом растяжении. Как уже было показано в § 13, характеристикой сопротивления материала пластическим деформациям является так называемая *истинная диаграмма напряжений* (фиг. 23). Ординаты её $\sigma_и$ ($\bar{\sigma}$) получаются делением силы P_t, растягивающей в каждый момент времени t образец, на соответствующую площадь поперечного сечения F_t. Абсциссы этой диаграммы характеризуют степень пластической деформации. За эту характеристику можно было бы взять или относительное удлинение образца ε или относительное сужение ψ.

Как известно, при растяжении образцов пластичного материала можно различать три стадии; в первой из них деформации упруги, следуют закону Гука и одинаковы по всей длине образца. При этом поперечное сужение может быть выражено через относительное удлинение с помощью коэффициента Пуассона μ (§ 9).

Во второй стадии, которая продолжается до начала образования шейки, практически соответствующего достижению грузом P_t наибольшего значения, происходят значительные пластические деформации, одинаковые по всей длине образца; эта стадия характеризуется наличием равномерного удлинения. Связь между относительным удлинением и сужением здесь можно получить, принимая во внимание, что при пластических деформациях объём образца практически не меняется.

Вторая стадия растяжения образца кончается достижением напряжениями (отнесёнными к первоначальной площади) величины предела прочности материала; в этот момент прекращается равномерное удлинение образца и начинается образование шейки — третья стадия деформации.

В третьей стадии материал деформируется лишь около шейки. Относительное удлинение в области шейки значительно меняется по длине деформируемого участка и не может уже непосредственно служить характеристикой степени пластической деформации; такой характеристикой является относительное сужение в наиболее деформированном месте образца.



Фиг. 651.

Таким образом, наличие третьей стадии растяжения образца заставляет выбрать за характеристику степени пластической деформации именно относительное сужение, которое однозначно определяет эту степень деформации во всё время растяжения и связано определённым образом с относительным удлинением в первой и второй стадиях деформации.

На фиг. 651 изображена описываемая диаграмма; точки A, B и C разграничивают три стадии растяжения. Напряжение $\bar{\sigma}_1$ соответствует истинному пределу текучести $\bar{\sigma}_т$; напряжение $\bar{\sigma}_2$ соответствует наибольшему грузу и может быть названо истинным пределом прочности $\bar{\sigma}_в$; наконец, $\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_р$ — это напряжение в момент разрыва.

Величина ψ_2, оценивающая *равномерное сужение* образца по всей длине, характеризует способность материала к общей деформации; разность же между *полным* сужением ψ_3 и равномерным ψ_2 оценивает способность материала к *местным* деформациям.

«Истинная» диаграмма показывает, как изменяется *сопротивление материала пластической деформации* в зависимости от величины этой деформации — от степени наклёпа; по мере роста деформации растёт и это сопротивление вплоть до момента разрыва, — материал упрочняется. Чем круче идёт диаграмма, чем больше величина производной $\frac{d\bar{\sigma}}{d\psi}$, тем больше способность материала к упрочнению.

Так как при достижении напряжениями σ величины $\sigma_в$ процесс равномерного растяжения образца теряет свою устойчивость, срывается, то эта величина предела прочности, а равно и величина предела прочности $\bar{\sigma}_в$, по существу является *характеристикой сопротивления материала равномерному растяжению.*

Геометрические свойства истинной диаграммы описываются в специальных курсах [1]).

---

[1]) См. например, Шапошников Н. А., Основы механических испытаний металлов, 1936; Марковец М. П., Диаграмма истинных напряжений, 1943 и др.

Форма истинной диаграммы напряжений, как характеристики сопротивления материала пластическим деформациям, и величина этого сопротивления — величина ординат — зависят от рода материала, температуры, скорости деформации и типа напряжённого состояния.

Влияние рода материала (сталь, алюминий, латунь и т. п.) сказывается на абсолютной величине ординат и на крутизне диаграммы, т. е. на способности материала упрочняться.

Температура детали резко сказывается на величине сопротивления пластическим деформациям; по мере *понижения* температуры это сопротивление *возрастает*.

Увеличение скорости деформации тоже *увеличивает* сопротивление пластическим деформациям; это мы видели уже в § 233 при изучении действия ударов на материал. Если вести обычное растяжение образцов с различными скоростями, то диаграммы растяжения располагаются тем выше, чем больше скорость деформации.

Наконец, тип напряжённого состояния тоже отражается на сопротивлении пластическим деформациям.

Так как эти деформации связаны с наличием сдвигов, то все виды напряжённого состояния, в которых *касательные* напряжения малы, будут соответствовать высоким значениям сопротивления пластическим деформациям. Так, всестороннее равномерное растяжение теоретически, а всестороннее равномерное сжатие не только теоретически, но и экспериментально, исключают возможность подобных деформаций; при напряжённых состояниях, близких к этим двум, пластические деформации возникают лишь при очень высоких значениях главных напряжений.

Наличие всякого рода резких переходов, изменений формы деталей, надрезов, трещин создаёт, как показывают опыт и теоретические расчёты, систему местных напряжений, характеризующуюся обычно тремя главными напряжениями *одного* знака. Наличие такого напряжённого состояния может в очень сильной степени повысить сопротивление материала пластическим деформациям около надреза.

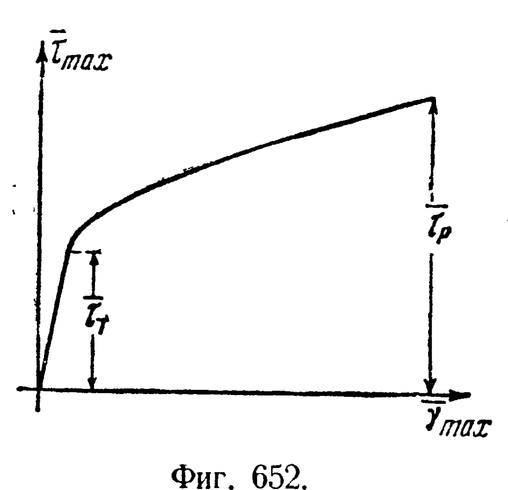
Описанные выше диаграммы истинных напряжений обладают некоторыми существенными недостатками. Так, например, при вычислении относительного удлинения или сужения образца при больших деформациях уже нельзя пренебречь тем, что начальные размеры образца, к которым обычно относят приращение длины или изменение площади сечения, существенно изменились в процессе деформации. Поэтому в качестве характеристик больших пластических деформаций по аналогии с истинными напряжениями целесообразно ввести так называемые истинные удлинения и сужения. Истинное удлинение $\bar{\varepsilon}$ и истинное сужение $\bar{\psi}$, отнесённые соответственно к действительной длине и площади сечения стержня в данный момент испытания, могут быть вычислены по формулам:

$$\bar{\varepsilon}=\int\limits_{l_0}^{l_t}\frac{dl}{l}=\ln\frac{l_t}{l_0} \quad \text{и} \quad \bar{\psi}=\int\limits_{F_t}^{F_0}\frac{dF}{F}=\ln\frac{F_0}{F_t}.$$

Так как объём тела при пластической деформации можно считать постоянным, т. е. $V=Fl=\text{const.}$, то $dV=l\,dF+F\,dl=0$ и $\frac{dl}{l}=-\frac{dF}{F}$, откуда следует, что $\bar{\psi}=\bar{\varepsilon}$. Таким образом, две различные характеристики деформации — истинное удлинение или истинное сужение — оказываются равными.

Метод изучения сопротивления пластической деформации по результатам испытаний на растяжение до сих пор является наиболее распространённым. Однако полученные таким путём исходные данные о сопротивлении пластической деформации делаются недостаточно точными, начиная

с момента образования шейки. Распределение деформации и напряжений в шейке становится очень неравномерным. Благодаря этому всякую характеристику деформации, в том числе и вычисленную по сужению шейки, в третьей стадии растяжения образца только очень условно можно считать характеристикой, полученной при линейном напряжённом состоянии. Это в значительной мере снижает ценность результатов испытаний на простое растяжение.



Фиг. 652.

В последнее время делаются попытки получения истинных диаграмм пластической деформации по результатам испытаний на кручение. Так как при испытаниях на кручение деформация даже очень пластичных материалов сохраняется достаточно равномерной по всей длине образца (без образования шейки) вплоть до момента разрушения, этот способ получения истинных диаграмм обладает известными преимуществами перед вышеописанным.

Такие истинные диаграммы строятся в координатах: истинное максимальное касательное напряжение $\left[\bar{\tau}_{max} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{max} - \bar{\sigma}_{min})\right]$ — максимальный сдвиг $[\bar{\gamma}_{max}]$ (фиг. 652). Так как при кручении $\varepsilon_{max} = \frac{\gamma}{2}$ и $\varepsilon_{min} = -\frac{\gamma}{2}$ (§ 54), то $\gamma = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}$. Максимальный сдвиг связан с $\bar{\varepsilon}_{max}$ и $\bar{\varepsilon}_{min}$ аналогичной формулой: $\bar{\gamma}_{max} = \bar{\varepsilon}_{max} - \bar{\varepsilon}_{min}$.

Однако и этот способ получения истинных диаграмм также не свободен от некоторых недостатков. При кручении сплошных стержней трудно учесть влияние упруго деформирующейся центральной части стержня, при кручении же трубчатых образцов результаты испытания могут быть искажены благодаря потере устойчивости.

§ 249. Сопротивление разрушению. Отрыв и срез.

А. Сжимающие напряжения сами по себе не могут привести к разрушению материала; могут иметь значение, повидимому, вызванные ими касательные напряжения или поперечные деформации удлинения.

В связи с этим уже давно возникло два различных представления о разрушении материала: 1) как о явлении отрыва, обусловленном деформациями удлинения или преимущественно действием нормальных растягивающих напряжений, и 2) как о явлении среза или скалывания, обусловленном преимущественно действием касательных напряжений. Исходя из этих представлений, потребовалось различать и два вида сопротивления материалов разрушению: сопротивление отрыву и сопротивление срезу.

До последнего времени считалось, что каждый материал может обладать *только одним каким-либо видом* сопротивления разрушению — или сопротивлением отрыву, или сопротивлением срезу. Однако такое одностороннее представление о явлении разрушения не позволило найти общее решение вопроса о прочности материалов.

В противовес ему в самые последние годы у нас (см. §§ 250 и 252) было выдвинуто иное, экспериментально обоснованное предположение, что каждый материал в зависимости от того, в какие условия он будет поставлен, *может разрушаться как путём отрыва, так и путём среза* и может поэтому обладать как тем, так и другим видом сопротивления разрушению. Этот новый взгляд на вопросы разрушения способствовал разрешению

целого ряда противоречий и неясностей, возникавших при рассмотрении явления разрушения на основе прежних представлений. Поэтому именно этот взгляд на современном этапе развития учения о прочности материалов следует считать наиболее правильным.

Из сказанного ясно, что вопрос о двух типах разрушения материалов — отрыве и срезе, требует подробного рассмотрения.

Теории разрушения материала от нормальных напряжений или вследствие развития значительных деформаций удлинения являются наиболее старыми теориями. Возможность разрушения материала путём отрыва, неоднократно подтверждённая опытами, до сих пор не подвергалась каким-либо сомнениям. Наоборот, в последнее время многие учёные были склонны приписывать отрыву вообще все случаи разрушения материала.

Характер разрушения при отрыве зависит как от рода материала, так равно и от вида напряжённого состояния; принципиально в одних случаях возможен хрупкий отрыв — без остаточных деформаций, в других — вязкий отрыв, сопровождающийся более или менее значительными пластическими деформациями (см. ниже — § 252). Так, например, экспериментально установлено, что некоторые бронзы и алюминиевые сплавы способны разрушаться путём отрыва даже при остаточной деформации около 20%.

Наиболее отчётливо характеристики сопротивления отрыву выявляются при испытаниях хрупких неметаллических материалов. Так, при растяжении образцов из хрупкого материала (стекла, пластмасс, бетона, камня) разрушение их, как правило, происходит по площадкам, перпендикулярным оси образца, т. е. как раз по тем, где действуют наибольшие нормальные растягивающие напряжения. При кручении таких же образцов трещины разрушения располагаются примерно под углом в 45° к оси образца, т. е. опять-таки перпендикулярно к направлению наибольших растягивающих напряжений. При сжатии призм из хрупкого материала разрушение начинается с появления трещин, параллельных направлению сжимающего усилия, а следовательно, перпендикулярных к направлению деформации растяжения (см. фиг. 32).

Получение характеристики сопротивления отрыву для пластичных материалов оказывается весьма затруднительным, так как при испытаниях, как правило, не удаётся миновать стадии пластических деформаций, а следовательно, и значительных касательных напряжений. В связи с тем, что у пластичных материалов сопротивление разрушению от касательных напряжений (срезу) значительно ниже сопротивления отрыву, при обычных испытаниях этих материалов не удаётся достигнуть сопротивления отрыву, так как раньше происходит разрушение путём среза. Поэтому для определения сопротивления отрыву необходимо такое изменение условий испытания (изменение вида напряжённого состояния, температуры, скорости деформирования), которое, почти не изменяя характеристики сопротивления отрыву, повлекло бы за собой значительное увеличение сопротивления срезу.

При комнатной температуре и нормальной скорости испытания разрушение путём отрыва у большинства пластичных материалов могло бы наблюдаться лишь при всестороннем равномерном растяжении; однако такое напряжённое состояние до сих пор на опыте осуществлено не было. При других напряжённых состояниях, близких к всестороннему равномерному растяжению, величину сопротивления отрыву удалось определить только у некоторых пластичных материалов, да и то лишь с помощью динамических испытаний при низких температурах. Некоторые опытные данные позволяют считать, что сопротивление отрыву сравнительно мало зависит от изменения скорости деформирования и температуры испытания. Отсюда следует, что в результате динамических испытаний при низких температурах с известным приближением определяются и характеристики сопротивления отрыву в нормальных условиях. Однако это обстоятельство

может быть использовано при испытаниях лишь некоторых пластичных металлов (так называемые хладноломкие металлы). В связи с этим величина сопротивления отрыву для очень многих пластичных материалов до сих пор ещё не установлена.

Многие случаи разрушения путём отрыва на равных основаниях могут быть приписаны как действию больших растягивающих напряжений, так и развитию значительных деформаций удлинения. Таким образом, эти случаи объясняются как с точки зрения теории наибольших нормальных напряжений, так и на основе близкой к ней по своему физическому смыслу теории наибольших удлинений.

Привлекая для объяснения явлений разрушения материала путём отрыва теорию наибольших нормальных напряжений, следовало бы выражать истинное сопротивление отрыву через наибольшее растягивающее напряжение при разрушении материала:

$$\bar{\sigma}_{отр.} = \max \bar{\sigma}_{разр.} = \bar{\sigma}_{1\ разр.}$$

Привлекая для этой же цели теорию наибольших удлинений, следовало бы выражать характеристику сопротивления отрыву через наибольшую деформацию удлинения: $\max\ \bar{\varepsilon}_{разр.} = \bar{\varepsilon}_{1разр.}$, что не вполне удобно. Используя зависимости между напряжениями и деформациями (§ 40):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad \text{или} \quad E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3),$$

можно, как известно (§ 43), заменить алгебраическую сумму напряжений в правой части последнего уравнения некоторым приведённым растягивающим напряжением $\sigma_{пр}$.

Следуя предложению Я. Б. Фридмана [1]), приведённое растягивающее напряжение при разрушении материала можно, казалось бы, принять за истинное сопротивление отрыву $\bar{\sigma}_{отр.}$:

$$\bar{\sigma}_{отр.} = \bar{\sigma}^{пр.}_{разр.} = E\bar{\varepsilon}_{1разр.} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]_{разр.}.$$

Необходимо заметить, что вопрос о той или иной трактовке сопротивления отрыву, как характеристики материала, а равно и вопрос о методах определения этой характеристики, в известной мере являются спорными [2]).

Некоторые опыты указывают на постоянство характеристики сопротивления отрыву при различных видах нагружения у хрупких материалов. Для подобного же заключения в отношении пластичных материалов пока ещё нет достаточных данных. По результатам некоторых опытов сопротивление отрыву зависит от качества материала — с увеличением степени наклёпа оно растёт. Изменение скорости деформации и температуры испытания, как уже было сказано, сравнительно мало отражается на величине сопротивления отрыву; однако достаточно надёжных данных о количественной стороне этого явления пока нет.

Срез является более сложным видом разрушения, чем отрыв, так как ему обычно предшествуют значительные пластические деформации, вызывающие перераспределение напряжений и другие осложнения. На существование этого второго типа разрушения, обусловленного преимущественно касательными напряжениями, указывает целый ряд опытных данных.

---

[1]) Фридман Я. Б., Механические свойства металлов, Оборонгиз, 1946.

[2]) Ужик Г. В., Сопротивление отрыву и прочность металлов, изд. АН СССР, 1950.

Разрушение металлов при растяжении без шейки, при срезе, кручении и изгибе обычно происходит по площадкам, очень близким к тем, на которых возникают наибольшие касательные напряжения. Хотя по углу излома не всегда можно сделать окончательное заключение о характере разрушения (отрыв или срез), однако в ряде случаев положение, а нередко и вид поверхности разрушения могут в этом отношении иметь решающее значение. Так, например, если разрушение при кручении происходит по площадкам, перпендикулярным к оси стержня, то несомненно, что оно обусловлено касательными напряжениями, так как по поверхности разрушения в этом случае нормальных напряжений вообще нет.

Значительно более трудным становится проведение различия между разрушением путём отрыва и среза при сложных напряжённых состояниях. Всё же и здесь в ряде случаев удалось установить, что в образовании некоторых из тех изломов, которые было принято считать наглядными примерами разрушения путём отрыва, на самом деле главную роль играют касательные напряжения.

Так как разрушение путём среза обусловлено касательными напряжениями, играющими главную роль и при пластической деформации материала, то у пластичных материалов без предшествующих, обычно довольно значительных, остаточных деформаций срез вряд ли возможен. По крайней мере, практически такого разрушения у металлов до сих пор получить не удалось, хотя некоторые из них (например, прессованный магний и сплавы на его основе) разрушаются от среза при сравнительно небольших деформациях (5—15%) — имеет место так называемый «хрупкий срез».

В качестве характеристики сопротивления срезу можно принять истинное значение касательного напряжения в момент разрушения ($\bar{\tau}_р$). Опытные данные показывают, что для чистых металлов (медь, алюминий, железо) и для некоторых сплавов сопротивление срезу ($\bar{\tau}_р$) практически не зависит от вида напряжённого состояния. Вместе с тем установлено, что $\bar{\tau}_р$ в значительно большей степени, чем сопротивление отрыву, зависит от скорости деформирования и температуры опыта. При увеличении скорости и понижении температуры $\bar{\tau}_р$ увеличивается.

Предположение об одновременном существовании у материалов двух видов сопротивления разрушению наглядно подтверждается опытами над разрушением хладноломких металлов и некоторых хрупких материалов. Сопротивление отрыву и сопротивление срезу у одного и того же материала различны по величине; у пластичных материалов обычно $\bar{\tau}_р < \bar{\sigma}_{отр}$, у хрупких, наоборот, $\bar{\tau}_р > \bar{\sigma}_{отр}$. В зависимости от изменения состава, а также термической и механической обработки $\bar{\tau}_р$ и $\bar{\sigma}_{отр}$ могут меняться по различным законам.

Описанные характеристики сопротивления материала разрушению могут служить основой для расчётов на прочность при простом и сложном напряжённом состоянии; вопрос об использовании этих характеристик рассматривается в следующих параграфах.

§ 250. Теории прочности.

А. Изложенное в предыдущих параграфах является основой для решения общей проблемы прочности материалов при сложном напряжённом состоянии. Это решение, как мы уже видели (§ 42), невозможно без введения некоторых экспериментально обоснованных гипотез, называемых теориями прочности. Из сказанного ранее о сопротивлении пластическим деформациям и о сопротивлении разрушению вытекает необходимость в проведении чёткого разграничения между теориями прочности, рассматривающими вопросы, связанные с наступлением текучести материала и развитием

значительных остаточных деформаций (упрочнение) и теориями прочности, рассматривающими вопросы, связанные с разрушением материала путём отрыва или среза.

История развития взглядов на вопросы прочности материалов показывает, что с давних пор, на протяжении почти двухсот лет, шла борьба представлений о разрушении, как о явлении отрыва и среза. В этом отношении старые теории прочности характерно разбиваются на две отдельные группы. В первую входит теория наибольших нормальных напряжений и теория наибольших удлинений, вторую группу образует теория наибольших касательных напряжений вместе с последующим её обобщением, известным под названием теории Мора (более подробно об этой теории см. ниже — § 251). Представления, на которых основывались те или иные из старых теорий, каждое в отдельности, как мы видели, не противоречат и современным воззрениям на вопросы прочности материалов, признающим существование двух форм разрушения и соответственно двух видов сопротивления разрушению.

Однако старые теории прочности страдали односторонностью понимания явления; они ограничивались изучением или только действия отдельных составляющих напряжения (нормальной или касательной), или только влияния деформации, без учёта их взаимной связи. Они не проводили чёткого разграничения между предельными (опасными) состояниями (переходом за предел упругости и явлением разрушения материала). Вследствие этого на основе той или иной из старых теорий общее решение вопроса о прочности различных материалов в их хрупком и пластичном состоянии оказалось невозможным.

Для лучшего приближения к данным опытов в эти теории приходилось искусственно вводить не соответствующие их физическому смыслу дополнительные условия, к которым прежде всего следует отнести проверку по наибольшим сжимающим напряжениям и соответственно по наибольшим деформациям сжатия в теориях наибольших нормальных напряжений и наибольших удлинений. Расчёты, сделанные на основе первых двух теорий, достаточно хорошо сходились, как известно, лишь с результатами некоторых опытов над хрупкими материалами, а расчёты по теории наибольших касательных напряжений оправдывали в известной степени опыты над пластичными материалами. Однако и применение этих теорий к объяснению ограниченного круга явлений — 1-й и 2-й теории прочности — только к случаям хрупкого, а 3-й теории — только к случаям пластичного разрушения, — всё же не устраняло полностью возникающих противоречий.

Разрешение противоречий и неясностей в большой степени становится возможным, главным образом, в результате исследований наших отечественных учёных и, в первую очередь, благодаря работам Н. Н. Давиденкова и его школы. Опираясь на данные ряда опытов, Н. Н. Давиденков впервые [1]) указал на двойственный характер разрушения у металлов и, в связи с этим, на существование у них одновременно двух различных как по величине, так и по своей физической и механической природе сопротивлений разрушению (сопротивления отрыву и сопротивления срезу).

Учение Н. Н. Давиденкова о двух различных механизмах разрушения нашло дополнительное подтверждение в результатах многих поставленных у нас опытов и с некоторыми изменениями было развито его сотрудниками (Я. Б. Фридманом и др.) в применении к различным материалам и разным видам напряжённого состояния. Этими исследованиями в вопрос о причинах разрушения материала была внесена известная ясность, и развитие представлений о разрушении, как о явлении отрыва и среза, получило своё отражение в так называемой «объединённой теории прочности Давиденкова — Фридмана» (§ 252).

---

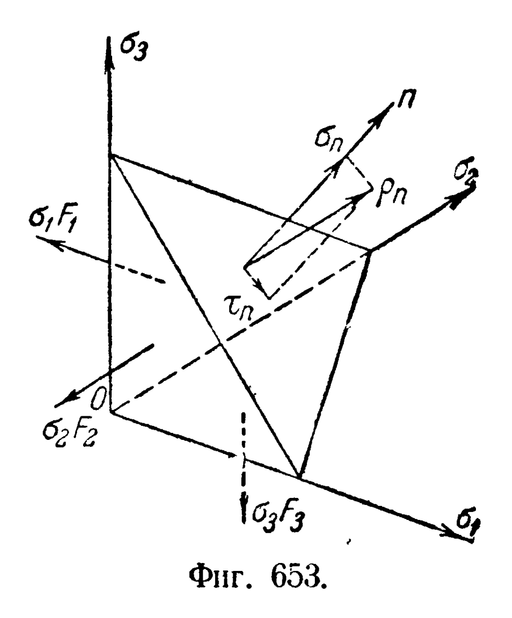
[1]) Давиденков Н. Н., Динамические испытания металлов, 1936.

Б. Переходим к анализу сначала тех теорий прочности, которые основаны на изучении сопротивления пластической деформации (§ 248).

Выше (§ 247) уже было отмечено, что наступление пластических деформаций связано с образованием сдвигов в кристаллических зёрнах и даже в целых слоях материала; поэтому условия для наступления текучести при сложном напряжённом состоянии могут определяться либо теорией наибольших касательных напряжений, либо теорией энергии формоизменения. Эти теории лежат в основе так называемых условий пластичности.

Обычно считают, что при оценке условий наступления текучести материала как при простом, так и при сложном напряжённом состояниях, лучшее соответствие с результатами многочисленных опытов даёт энергетическая теория, хотя уже неоднократно было отмечено (Н. Н. Давиденков, И. А. Одинг и др.), что мнение о неточности теории наибольших касательных напряжений в данном случае основано на недоразумении, связанном с неправильным определением предела текучести.

Как известно, энергетическая теория возникла на основе представления о постоянстве удельной энергии изменения формы элемента материала, как об условии наступления пластических деформаций. Однако можно показать, что эта теория, аналогично теории наибольших касательных напряжений, тоже требует в качестве условия для наступления пластических деформаций постоянства касательного напряжения, но не наибольшего, а действующего по площадке, равнонаклонённой к направлению главных напряжений в рассматриваемой точке.



Фиг. 653.

Рассмотрим очень малый тетраэдр, образованный тремя плоскостями главных напряжений и четвёртой плоскостью, равнонаклонённой к главным осям (фиг. 653). Длину рёбер тетраэдра по главным осям возьмём равной единице. Площадь каждой из боковых граней F_1, F_2 и F_3 будет равна $\frac{1}{2}\cdot 1^2$; косинусы углов, составленных нормалью n к четвёртой грани с главными осями *1*, *2*, *3*, равны между собой и равны $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Площадь F_n четвёртой грани, таким образом, равна

$$F_n=\frac{F_1}{\cos(1,\ n)}=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 1^2.$$

Полное напряжение, действующее по наклонной грани тетраэдра, будет равно геометрической сумме сил, приложенных к боковым граням, делённой на F_n. Обозначая это напряжение через p_n, а главные напряжения через σ_1, σ_2 и σ_3, получаем:

$$p_n=\frac{\sqrt{(\sigma_1F_1)^2+(\sigma_2F_2)^2+(\sigma_3F_3)^2}}{F_n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}\,.$$

Напряжение p_n можно разложить на нормальное σ_n и касательное τ_n. Нормальное напряжение равно сумме проекций на нормаль сил, приложенных к боковым граням, делённой на площадь F_n:

$$\sigma_n=\frac{F_1\sigma_1\cos(n,\ 1)+F_2\sigma_2\cos(n,\ 2)+F_3\sigma_3\cos(n,\ 3)}{F_n}=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3);$$

касательное же напряжение по этой площадке τ_n равно:

$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} =$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \qquad (38.1)$$

При простом растяжении

$$\tau_n = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1.$$

Таким образом, если мы поставим условие, что наступление явления текучести соответствует достижению напряжением σ_1 величины предела текучести $\sigma_т$, то получим для простого растяжения

$$\tau_{nт} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_т;$$

этой же величины должно достигать τ_n и при сложном напряжённом состоянии, чтобы наступили пластические деформации:

$$\tau_{nт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_т. \qquad (38.2)$$

Для того чтобы был обеспечен запас прочности k против наступления явления текучести, надо, чтобы левая часть условия (38.2) после сокращения на $\frac{\sqrt{2}}{3}$ была не больше $\frac{\sigma_т}{k} = [\sigma]$; тогда мы приходим к условию прочности по энергетической теории, полученному нами иным путём в § 43. Таким образом, энергетическая теория — это тоже теория постоянства касательных напряжений, но не наибольших, а действующих по указанной площадке. В этой теории учтены и физическая природа пластических деформаций (сдвиг) и величина всех трёх главных напряжений. Равнонаклонённая к главным осям площадка (октаэдрическая) является площадкой, в которой происходит так называемый результирующий сдвиг.

Наибольшие касательные напряжения в плоскостях, параллельных каждой из главных осей (§ 39), действуют по площадкам, делящим пополам углы между соответствующими парами главных осей. Они равны соответственно

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Таким образом, из (38.1) получаем:

$$\tau_n = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}. \qquad (38.3)$$

По закону Гука этим напряжениям соответствуют сдвиги, лежащие в тех же плоскостях:

$$\gamma_1 = \frac{\tau_1}{G}; \quad \gamma_2 = \frac{\tau_2}{G}; \quad \gamma_3 = \frac{\tau_3}{G}.$$

Поэтому

$$\tau_n = \frac{2}{3}G\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} = G\gamma_n, \qquad (38.4)$$

где $\gamma_n = \frac{2}{3}\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}$ — результирующий сдвиг.

Если мы условимся изображать каждый из сдвигов γ_1, γ_2 и γ_3 вектором, расположенным в соответствующей плоскости, то равнодействующий сдвиг γ_n будет лежать в плоскости, равнонаклонённой к главным осям. Эта площадка не случайно определяет условие прочности, она является плоскостью сдвига, который отражает на себе влияние всех трёх главных напряжений.

Условие (38.2) относится к ненаклёпанному материалу; чтобы при помощи его получить сопротивление пластическим деформациям для сложного напряжённого состояния при постепенном росте пластических деформаций, достаточно подставить в правую часть уравнения (38.2) вместо $\sigma_т$ переменную величину $\bar{\sigma}$, полученную в опытах при простом растяжении.

Таким путём мы можем получить полную механическую характеристику сопротивления пластическим деформациям в самом общем случае. Если бы мы попытались представить геометрически эту характеристику, то сделать это так просто, как для случая линейного напряжённого состояния, не удастся. Можно условиться изображать напряжённое состояние элемента материала точкой трёхмерного пространства с координатами, равными главным напряжениям.

Уравнение типа (38.2) тогда окажется уравнением некоторой поверхности; в случае использования энергетической теории это будет[1]) цилиндрическая поверхность с осью, равнонаклонённой к главным осям напряжений, и радиусом, равным:

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_т.$$

Все точки, лежащие на поверхности цилиндра, изображают предельные напряжённые состояния материала, соответствующие началу пластических деформаций. Если мы воспользуемся теорией наибольших касательных напряжений, то предельной поверхностью будет шестигранная призма с той же осью, что и цилиндр; длина стороны шестиугольного основания равна:

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_т.$$

Вообще уравнение предельной поверхности имеет вид (для ненаклёпанного материала):

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_т) = 0, \qquad (38.5)$$

где f_1 — определённая функция главных напряжений и предела текучести; вид этой функции зависит от принятой теории прочности. Учитывая влияние упрочнения, мы должны постоянную величину $\sigma_т$ заменить переменной $\bar{\sigma}$; с наклёпом радиус нашего цилиндра (предельной поверхности) будет меняться.

В. Обратимся теперь к теориям прочности, основанным на изучении явлений разрушения материала.

Как известно (§ 249), разрушение от среза практически невозможно без предварительного прохождения через стадию более или менее значительных пластических деформаций, обусловленных касательными напряжениями. Поэтому в качестве теории разрушения путём среза при сложном напряжённом состоянии следует принять или, как более простую, теорию наибольших касательных напряжений, или энергетическую теорию. В первом случае за характеристику сопротивления срезу должна быть принята величина

---

[1]) См. проф. Д р у ж и н и н С. И. и проф. Я г н Ю. И., Сопротивление материалов, 1933.

максимального истинного касательного напряжения $\bar{\tau}_р$ (§ 249), во втором — величина касательного напряжения $\tau_{пр}$ (38.2) на площадке результирующего сдвига к моменту разрушения.

Что же касается теории сопротивления отрыву, то для этой цели, как уже указывалось ранее (§ 249), следует выбрать или теорию наибольших нормальных напряжений, или теорию наибольших удлинений. Какую бы из этих теорий мы ни приняли, в общем виде условия для нарушения прочности путём среза и отрыва будут иметь вид, аналогичный уравнению (38.5):

$$f_2(\bar{\sigma}_1,\ \bar{\sigma}_2,\ \bar{\sigma}_3,\ \bar{\tau}_р) = 0 \quad (\text{срез}) \tag{38.6}$$

и

$$f_3(\bar{\sigma}_1,\ \bar{\sigma}_2,\ \bar{\sigma}_3,\ \bar{\sigma}_{отр}) = 0 \quad (\text{отрыв}), \tag{38.7}$$

где $\bar{\tau}_р$ — сопротивление срезу, а $\bar{\sigma}_{отр}$ — сопротивление отрыву (например, приведённое растягивающее напряжение $\bar{\sigma}^{пр}_{разр}$, подсчитанное на основе теории наибольших удлинений). Вид функций f_2 и f_3 зависит от принятой теории прочности. Уравнения (38.6) и (38.7), в свою очередь, представляют собой уравнение поверхностей, предельных по срезу и отрыву. Совокупность поверхностей, заданных уравнениями (38.5), (38.6) и (38.7), выделяет в пространстве область, внутри которой точки изображают напряжённые состояния, безопасные в отношении нарушения прочности. Точки же, попадающие на ту или другую предельную поверхность, будут соответствовать напряжённым состояниям материала, при которых наступает то или иное нарушение прочности.

§ 251. Обобщённая теория прочности Мора.

Допуская некоторые отступления от точного вида функций f_1, f_2 и f_3, можно упростить вопрос о нахождении предельных поверхностей и свести задачу к нахождению предельных кривых, расположенных в одной плоскости. Если исходить из теории наибольших касательных напряжений, то, как известно (§ 43), условие прочности будет иметь такой вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma].$$

Условие нарушения прочности за счёт появления пластических деформаций напишется так:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_т,$$

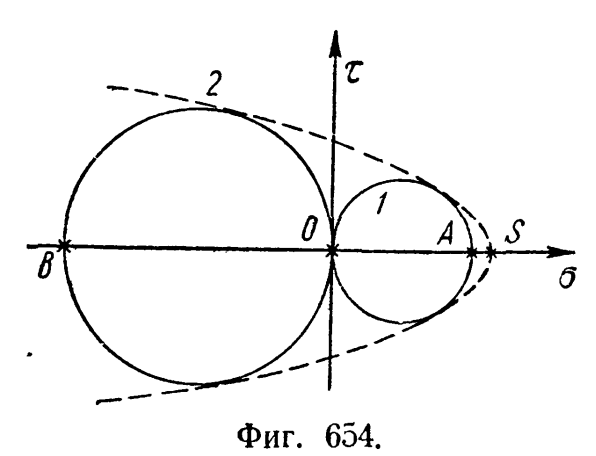
где σ_1 и σ_3 — наибольшее и наименьшее главные напряжения.

Можно рассматривать полученные формулы шире, чем интерпретацию теории наибольших касательных напряжений; можно считать, что эти формулы выражают условие, что *нарушение прочности зависит лишь от наибольшего и наименьшего главных напряжений.* Мы знаем теперь, что это предположение не вполне верно, что среднее по величине главное напряжение σ_2 также влияет на прочность материала. Однако известно также, что это влияние незначительно и погрешность от отбрасывания σ_2 не превысит в крайних случаях 15%, а в большинстве случаев она будет значительно меньше.

Если принять это упрощающее предположение, то вместо трёхмерного пространства, координаты точек которого изображаются главными напряжениями, мы получим плоскость с осями σ_1 и σ_3; предельные поверхности f_1, f_2 и f_3 обратятся в кривые, расположенные в этой плоскости.

Напряжённое состояние материала может быть изображено точкой с координатами σ_1 и σ_3, а может быть с большей полнотой изображено кругом

Мора, построенным на главных напряжениях σ_1 и σ_3 в системе прямоугольных координат σ и τ (§ 37). Этот способ изображения напряжённого состояния более полон, потому что он характеризует напряжённое состояние материала в рассматриваемой точке не только величиной главных напряжений σ_1 и σ_3, но и напряжениями σ и τ, действующими по разным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку. Если напряжения σ_1 и σ_3 достигают таких величин, что вызывают *предельное* напряжённое состояние, при котором происходит нарушение прочности того или иного вида, то соответствующий круг Мора будет называться предельным. На фиг. 654 изображены предельные круги *1* и *2* при простом растяжении и сжатии для материала, обладающего разной величиной предела прочности при растяжении и сжатии (чугун). Длина *AO* изображает предел прочности при растяжении, а *OB* — при сжатии. Если мы будем менять предельное напряжённое состояние от простого растяжения до простого сжатия, уменьшая положительное σ_1 от *OA* до нуля и увеличивая (по абсолютной величине) отрицательное σ_3 от нуля до *OB*, то предельный круг Мора *1* постепенно перейдёт в предельный круг *2*.

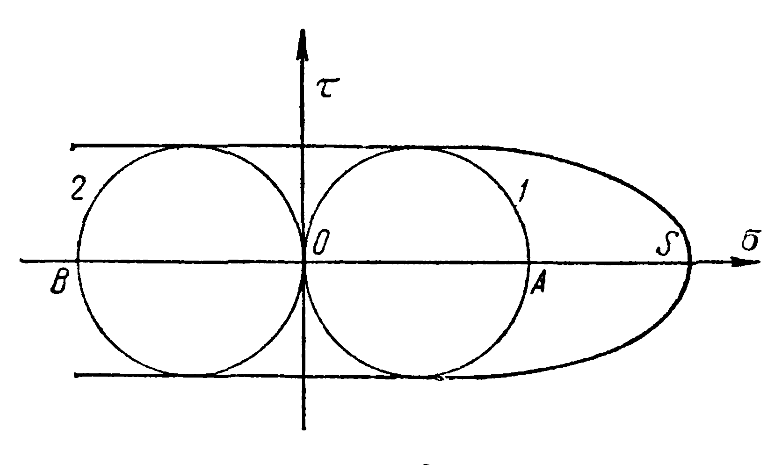


Фиг. 654.

Промежуточным *предельным* напряжённым состоянием будет соответствовать непрерывный ряд предельных кругов Мора. При постепенном переходе круга *1* в круг *2* эта серия кругов даст нам некоторую кривую, показанную на фиг. 654 пунктиром, являющуюся *огибающей* для семейства предельных кругов Мора. Эта огибающая и будет предельной кривой, заменяющей совокупность кривых f_2 и f_3 или f_1 и f_3; каждый круг Мора, *касательный* (по свойству огибающей) к этой кривой, будет соответствовать одному из *предельных* напряжённых состояний.

Огибающая пересечёт ось абсцисс в некоторой точке *S*, соответствующей всестороннему растяжению с предельным напряжением *OS*; действительно, в вершине огибающей круг Мора обратится в точку, следовательно, напряжения σ_1 и σ_3, а значит и σ_2, будут равны между собой. С противоположной стороны предельная кривая остаётся незамкнутой, ибо невозможно разрушить материал путём всестороннего равномерного сжатия.

Если пределы прочности при растяжении и сжатии равны (сталь), то огибающая идёт около начала координат параллельно оси абсцисс (фиг. 655).

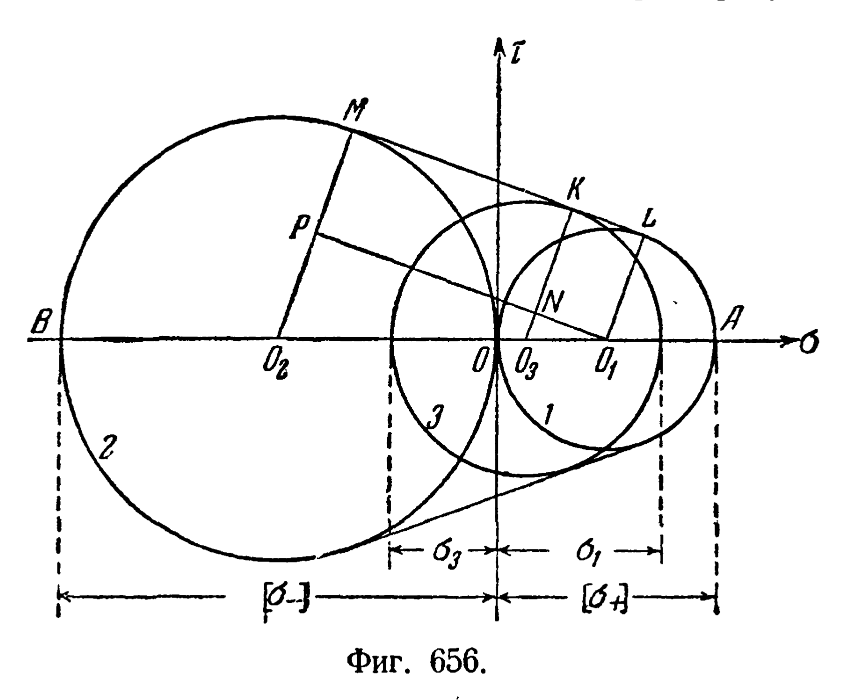


Фиг. 655.

Обычно построение огибающей упрощают; так как на практике чаще приходится встречаться с напряжёнными состояниями, изображаемыми кругами Мора, расположенными между *1* и *2* (фиг. 654), то соответственную часть огибающей заменяют просто прямой, касательной к этим кругам. Уменьшая теперь масштаб чертежа в *k* раз, где *k* — коэффициент запаса, получаем уже не предельные круги Мора, а круги, изображающие *допускаемые*

напряжённые состояния. На фиг. 656 отрезок OA изображает допускаемое напряжение при простом растяжении $[\sigma_+]$, а отрезок OB — допускаемое напряжение при простом сжатии $[\sigma_-]$.

Для некоторого промежуточного круга 3 с центром в O_3, касающегося линии ML (огибающей) в точке K и характеризующего напряжённое состояние с главными напряжениями σ_1 и σ_3, имеем:



Фиг. 656.

$$\frac{\overline{NO_3}}{\overline{PO_2}} = \frac{\overline{O_1O_3}}{\overline{O_1O_2}}$$

или

$$\frac{\overline{KO_3} - \overline{LO_1}}{\overline{MO_2} - \overline{LO_1}} = \frac{\overline{OO_1} - \overline{OO_3}}{\overline{OO_1} + \overline{OO_2}}$$

или, заменяя отрезки линий значениями соответствующих напряжений,

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma_+]}{[\sigma_-] - [\sigma_+]} = \frac{[\sigma_+] - (\sigma_1 + \sigma_3)}{[\sigma_+] + [\sigma_-]}.$$

Выполняя преобразования и вводя знак неравенства, получаем условие прочности по теории Мора:

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}\sigma_3 \leqslant [\sigma_+], \tag{38.8}$$

которое при $[\sigma_-] = [\sigma_+]$ обращается в условие прочности по теории наибольших касательных напряжений.

Это же уравнение можно вывести и без помощи кругов Мора [1]), если потребовать, чтобы на любой площадке было соблюдено условие безопасности в отношении сдвига:

$$\tau_{\text{пр}} = |\tau| + f\sigma \leqslant C. \tag{38.9}$$

Здесь f играет роль коэффициента трения, C — предельное сопротивление материала сдвигу, а $\tau_{\text{пр}}$ — некоторое приведённое касательное напряжение. Положение площадок, на которых $\tau_{\text{пр}}$ достигает наибольшего значения, определяется углом α по отношению к площадке с главным напряжением σ_1; при этом $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{f}$. Плоскости сдвига проходят параллельно направлению промежуточного главного напряжения σ_2. Можно показать [1]), что

$$f = \frac{[\sigma_-] - [\sigma_+]}{2\sqrt{[\sigma_+][\sigma_-]}} \quad \text{и} \quad C = \frac{\sqrt{[\sigma_+][\sigma_-]}}{2}.$$

Из уравнения (38.9) следует, что в тех случаях, когда $\sigma > 0$ (растягивающее напряжение), сдвиги начнутся при меньшей величине касательного напряжения τ, чем в тех случаях, когда $\sigma < 0$ (сжимающее напряжение). Та-

[1]) Проф. Дружинин С. И. и проф. Ягн Ю. И., Сопротивление материалов, 1933.

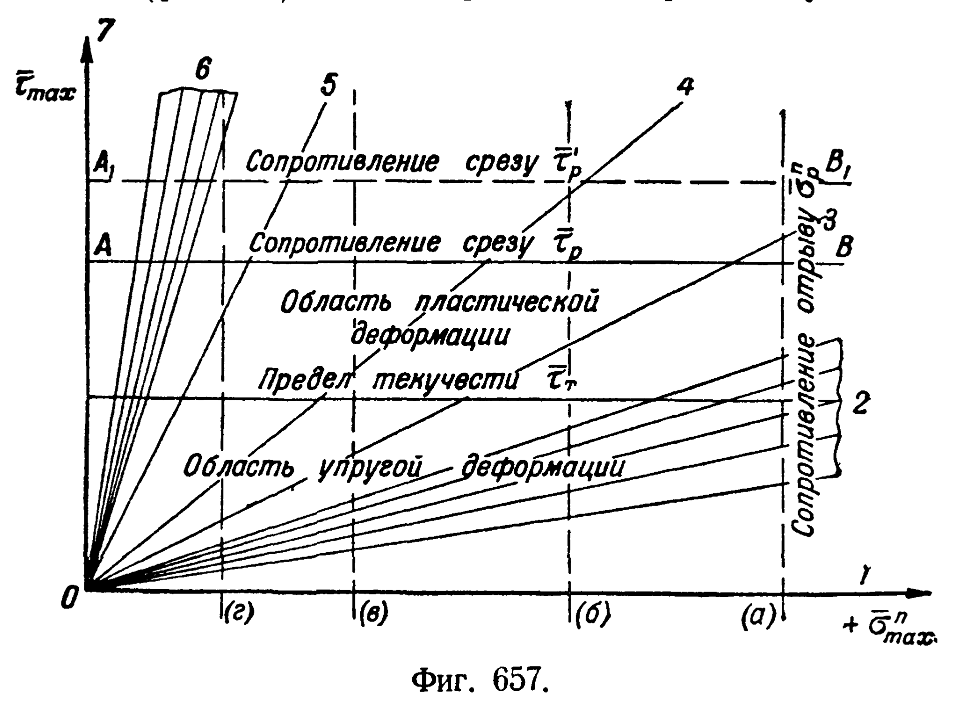
ким образом, уравнения (38.8) и (38.9) отражают то обстоятельство, что по Мору на возникновение текучести, а равно и на разрушение материала, кроме касательных напряжений, влияют также и нормальные напряжения, возникающие на площадках скольжения (сдвига).

Теория Мора хорошо описывает явление пластической деформации и разрушение материалов путём среза, но не даёт правильного освещения явлению разрушения путём отрыва. Таким образом, хотя эта теория и представляет собой известный шаг вперёд по сравнению с другими старыми теориями, всё же область её применения является ограниченной.

§ 252. Объединённая теория прочности Давиденкова—Фридмана[1]).

А. Взгляды Н. Н. Давиденкова, в дальнейшем с некоторыми изменениями развитые Я. Б. Фридманом, легли в основу построенной ими новой объединённой теории прочности материалов. Эта теория, описывающая как процессы возникновения и развития пластических деформаций, так и явление разрушения, повидимому, представляет более общее решение вопроса о прочности материала, получаемое путём синтеза двух ранее известных теорий — теории наибольших касательных напряжений и теории наибольших удлинений.

Основные положения новой теории наиболее наглядно отражены в так называемой диаграмме механического состояния материала, предложенной Я. Б. Фридманом (фиг. 657). Эта диаграмма одновременно учитывает как вид



Фиг. 657.

напряжённого состояния, так и свойства материала, оцениваемые пределом текучести $\bar{\tau}_т$ и сопротивлением срезу $\bar{\tau}_р$, определяемым на основе теории наибольших касательных напряжений, и сопротивлением отрыву $\bar{\sigma}_{отр} = \bar{\sigma}^{пр}_{разр}$ $(\bar{\sigma}^{п}_{р})$, определённым на основе теории наибольших удлинений.

На диаграмме по оси ординат откладывается наибольшее касательное напряжение τ_{max}, а по оси абсцисс — наибольшее приведённое растягивающее напряжение $+\sigma^{п}_{max}$. Найденные опытным путём значения предела

[1]) Содержание § 252 представляет собой краткое изложение новой теории, составленное на основе работ Я. Б. Фридмана, в частности, его книги «Механические свойства металлов», Оборонгиз, 1946.

текучести $\bar{\tau}_т$ и сопротивления срезу $\bar{\tau}_р$ изображаются на диаграмме в виде двух прямых горизонтальных линий; сопротивление же отрыву $\bar{\sigma}^п_р$ изображается вертикальной прямой, проведённой на соответствующем расстоянии от начала координат. Прямолинейность линий, изображающих $\bar{\tau}_т$, $\bar{\tau}_р$ и $\bar{\sigma}^п_р$ вытекает из определения $\bar{\tau}_т$ и $\bar{\tau}_р$, сделанного на основе теории наибольших касательных напряжений, а $\bar{\sigma}^п_р$ — на основе теории наибольших удлинений.

В качестве единой характеристики напряжённого состояния во всех случаях принимается отношение наибольшего касательного напряжения к наибольшему приведённому растягивающему напряжению в данной точке тела $m = \frac{\bar{\tau}_{max}}{+\bar{\sigma}^п_{max}}$. Таким образом, прямые, проведённые из начала координат диаграммы под определённым углом к оси абсцисс, тангенс которого равен m, характеризуют то или иное напряжённое состояние, возникшее в элементарном объёме тела в результате действия внешних усилий. На фиг. 657 нанесено несколько таких прямых (лучи *1—7*). Луч *1*, соответствующий всестороннему равномерному растяжению, при котором $\bar{\tau}_{max} = 0$ и $m = 0$, совпадает с осью абсцисс $\bar{\sigma}^п_{max}$; луч *7*, соответствующий различным случаям всестороннего неравномерного сжатия, при которых $\bar{\sigma}^п_{max}$ равно нулю (или меньше нуля) и, следовательно, $m = \infty$, совпадает с осью ординат $\bar{\tau}_{max}$. (Случаю всестороннего равномерного сжатия, когда, благодаря отсутствию сдвигов и удлинений, $\bar{\tau}_{max}$ и $\bar{\sigma}^п_{max}$ равны нулю, отвечает начало координат — точка O.)

Остальные лучи, характеризующие любые другие промежуточные виды напряжённого состояния, располагаются между лучами *1* и *7*. Так, например, осевое растяжение $[\bar{\sigma}^п_{max} = 2\bar{\tau}_{max};\ m = 0{,}5]$ изображается лучом *3*; кручение и срез $\left[\bar{\sigma}^п_{max} = (1+\mu)\,\bar{\tau}_{max};\ m = \frac{1}{1+\mu}\right]$ — лучом *4*; осевое сжатие $\left[\bar{\sigma}^п_{max} = 2\mu\bar{\tau}_{max};\ m = \frac{1}{2\mu}\right]$ — лучом *5*. (Значения m для лучей *3*, *4*, *5* на фиг. 657 вычислены в предположении, что $\mu = 0{,}25$.) Различным случаям растяжения или изгиба надрезанных образцов (напряжённые состояния более или менее близки к всестороннему равномерному растяжению) отвечает группа лучей *2*; случаям вдавливания или сжатия под боковым давлением — группа лучей *6*.

Диаграмма механического состояния даёт наглядное представление о физической природе нарушения прочности при различных обстоятельствах. Прежде всего следует обратить внимание на взаимное расположение линий, характеризующих свойства материала, и различные виды напряжённого состояния. Если напряжённое состояние таково, что наклонный луч, его изображающий, пересекает сначала прямую $\tau_р$ (AB), а потом уже прямую $\bar{\sigma}^п_р$ (a), например, луч *3* (осевое растяжение), то разрушение материала произойдёт путём среза. В этом случае пластические свойства материала будут использованы полностью. Если же изображающий луч пересекает прямую $\bar{\sigma}^п_р$ раньше, чем прямую $\bar{\tau}_р$ (например, верхний луч группы *2*), то материал разрушается путём отрыва, пластичность и вязкость его понижаются в тем большей мере, чем ниже проходит изображающий луч, т. е. чем меньше отношение $m = \frac{\bar{\tau}_{max}}{+\bar{\sigma}^п_{max}}$. Таким образом, можно условно различать отдельные

виды напряжённого состояния или способы нагружения по степени их «жёсткости». «Жёстким» видам напряжённого состояния будут, очевидно, соответствовать более пологие лучи *1*, *2* и *3*, «мягким» — лучи *5*, *6* и *7*.

Отсюда следует, что положение линии сопротивления отрыву на диаграмме механического состояния имеет очень большое значение. Различные величины сопротивления отрыву при одной и той же величине сопротивления срезу изображены на фиг. 657 вертикальными линиями *а*, *б*, *в* и *г*. Нетрудно заметить, что с перемещением линии сопротивления отрыву ближе к началу координат опасность разрушения путём отрыва даже при «мягких» способах нагружения значительно возрастает. Так, в положении *а* разрушение путём отрыва не может быть получено ни при каких видах напряжённого состояния, кроме очень близких к всестороннему равномерному растяжению (алюминий, медь, аустенитные стали). В положении же *г* разрушение путём отрыва может произойти даже и при осевом сжатии; только при вдавливании и сжатии под боковым давлением разрушение происходит ещё путём среза (мрамор, плексиглас). В положении *б* отрыв возможен при осевом растяжении (закалённые и низкоотпущенные стали), в положении *в* отрыв происходит уже при кручении (чугун и литые алюминиевые сплавы).

Таким образом, вид разрушения определяется отношением $m = \frac{\bar{\tau}_{max}}{+\bar{\sigma}^{п}_{max}}$ вместе с отношением $\frac{\bar{\tau}_р}{\bar{\sigma}^{п}_р}$, характеризующим взаимное расположение линий сопротивления отрыву и срезу; если первое отношение меньше второго, имеет место отрыв, в обратном случае — срез. Если $m = \frac{\bar{\tau}_р}{\bar{\sigma}^{п}_р}$, излом имеет неустойчивый характер.

Отношение $\frac{\bar{\tau}_т}{\bar{\sigma}^{п}_р}$ вместе с отношением m позволяет установить наличие или отсутствие пластической деформации перед разрушением путём отрыва; если первое меньше второго, то отрыву будут предшествовать пластическая деформация той или иной величины («вязкий» отрыв), в противном случае излом будет хрупким. Так, например, при осевом растяжении материала, для которого сопротивление отрыву определяется линией, близкой к линии (*а*), в образце при разрушении образуется шейка; если же сопротивление отрыву определяется линией (*б*), то разрушение образца произойдёт без образования шейки (некоторые бронзы). Материал во многих случаях (всестороннее, плоское и одноосное растяжения, сдвиг и кручение) будет разрушаться путём отрыва, обычно хрупкого, если $\bar{\tau}_р$ будет значительно больше $\bar{\sigma}^{п}_р$ (стёкла, пластмассы, горные породы) и, наоборот, материал в большем числе случаев будет разрушаться путём среза, если $\bar{\sigma}^{п}_р$ будет значительно больше $\bar{\tau}_р$ (свинец, алюминий, медь, многие железные сплавы).

Переход от отрыва к срезу, а равно и от хрупкого разрушения к вязкому, может быть осуществлён как изменением вида напряжённого состояния, так и изменением свойств материала путём «внешних» (изменение температуры, скорости деформирования) и «внутренних» (изменение состава и структуры) факторов. При «жёстких» способах нагружения более вероятным является хрупкое разрушение путём отрыва, при «мягких» — разрушение путём среза после довольно значительной пластической деформации. Этим, в частности, объясняется склонность к хрупкому разрушению надрезанных образцов даже сравнительно пластичных материалов и, наоборот, склонность

к разрушению путём среза после довольно значительной деформации даже таких хрупких материалов, как камень и бетон, подвергнутых сжатию под боковым давлением. Заметим, однако, что материалы, у которых $\bar{\tau}_р \leqslant \bar{\tau}_т$ (например, стекло при 20° С), ни при каких способах нагружения не могут быть переведены из хрупкого состояния в пластичное.

При каком-либо определённом виде напряжённого состояния все обстоятельства, которые могут увеличивать $\bar{\tau}_т$ и $\bar{\tau}_р$ (т. е. перемещать вверх соответствующие горизонтальные прямые, например, из положения AB в положение A_1B_1), при одной и той же величине сопротивления отрыву $\bar{\sigma}_р^п$ способны, очевидно, вызвать переход материала из пластического состояния в хрупкое. Именно так следует объяснять хрупкость материала при пониженных температурах и при значительном повышении скорости деформации, — например, при ударе. Таким образом, если при испытаниях нужно поставить материал в наиболее тяжёлые условия работы, то необходимо принять меры к увеличению жёсткости способа нагружения, а также к поднятию сопротивления пластическим деформациям и сопротивления срезу, т. е. испытывать надрезанный образец с большой скоростью, при низких температурах.

Б. Описанная здесь диаграмма механического состояния относится, собственно говоря, к случаям однократного статического и динамического нагружения. Однако нет оснований предполагать, что и более сложные случаи разрушения при износе, резании, ползучести и усталости нельзя свести к разрушению путём отрыва или среза и анализировать с помощью подобной же диаграммы.

Следует отметить, что ряд положений, на которых основано построение описанной выше диаграммы механического состояния, безусловно нуждается в некоторых уточнениях и дополнениях. Так, например, линии, изображающие на фиг. 657 $\bar{\tau}_т$ и $\bar{\tau}_р$, могут быть приняты за прямые только для чистых металлов и некоторых сплавов, так как лишь для этих металлов величина предела текучести и сопротивления срезу практически не зависит от вида напряжённого состояния. Для ряда других металлов и сплавов предположение о прямолинейности упомянутых линий может быть использовано лишь для получения приближённого решения вопросов прочности. То обстоятельство, что сопротивление отрыву, как показывают опыты, расчёт с увеличением степени наклёпа, не позволяет, строго говоря, считать прямой и линию, изображающую $\bar{\sigma}_р^п$.

При построении диаграммы фиг. 657 принято допущение, что лучи, характеризующие напряжённое состояние, остаются прямыми вплоть до момента разрушения (т. е. предполагается, что напряжённое состояние в процессе деформации не претерпевает изменения). Однако у пластичных материалов возникновение больших пластических деформаций (т. е. переход за линию, изображающую $\bar{\tau}_т$) в ряде случаев довольно существенно изменяет картину распределения напряжений внутри тела. Очевидно, что использование предположения о прямолинейности изображающих лучей в подобных случаях может привести к ошибочным выводам.

Наконец, как уже было сказано ранее (§ 249), вопрос о привлечении той или иной теории прочности (первой или второй) для объяснения явлений разрушения материала путём отрыва, вообще говоря, является спорным, так как одни случаи хрупкого разрушения могут быть более удовлетворительно объяснены с помощью теории наибольших удлинений, другие — с помощью теории наибольших нормальных напряжений.

Несмотря на всё это, нельзя не признать, что схема, изображённая на фиг. 657, является удачной. В этой схеме наглядно отражены современные воззрения на вопросы прочности материалов, признающие существование двух форм разрушения (отрыв и срез) и предполагающие зависимость той

или иной из этих форм разрушения от вида напряжённого состояния. При этом в ней используется единая система для измерения и сопоставления самых разнообразных напряжённых состояний, характеризуемых одной величиной — углом наклона изображающей прямой, что во многих случаях позволяет правильно анализировать результаты опытов над сопротивлением материала тем или иным нарушениям прочности.

Диаграммы, подобные изображённой на фиг. 657, могут оказать помощь при разрешении вопросов, связанных с процессами технологической обработки металлов; для целого ряда употребляющихся в машиностроении материалов они уже построены и используются в нашей промышленности.

Изложенные выше положения могут быть использованы и при проверке прочности деталей машин и сооружений, работающих при напряжениях ниже предела текучести материала. Для этого от предельных (опасных) напряжений $\bar{\sigma}_p^{п}$ и $\bar{\tau}_p$ необходимо перейти к допускаемым напряжениям на отрыв и срез $[\sigma_+]$ и $[\tau]$. До уточнения вопроса о величине допускаемых напряжений в качестве $[\sigma_+]$ и $[\tau]$ можно использовать допускаемые напряжения на растяжение и сдвиг по существующим нормам.

При этом проверку прочности в зависимости от условий работы детали и характера напряжённого состояния следует производить по одной из двух теорий: теории наибольших удлинений или теории наибольших касательных напряжений. Если наклон луча, изображающего напряжённое состояние материала в упругой области, т. е. отношение

$$m = \frac{\tau_{max}}{+\sigma_{max}^{п}} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}$$

меньше отношения $\frac{[\tau]}{[\sigma_+]}$, то при увеличении напряжений разрушение путём отрыва представляется более возможным, чем разрушение путём среза, и в соответствии со сказанным выше следует применить теорию наибольших удлинений; если же $m > \frac{[\tau]}{[\sigma_+]}$, следует применить теорию наибольших касательных напряжений.

Так, если $\frac{[\tau]}{[\sigma_+]} > \frac{1}{2}$ (хрупкие материалы), то отчасти при кручении $\left(m = \frac{1}{1+\mu} > \frac{1}{2}\right)$, осевом сжатии $\left(m = \frac{1}{2\mu} > 1\right)$ и других более «мягких» видах нагружения ($m \gg 1$) для проверки прочности следует использовать теорию наибольших касательных напряжений, так как $m > \frac{[\tau]}{[\sigma_+]}$ [1]). При осевом растяжении и других более «жёстких» видах нагружения $\left(m \leqslant \frac{1}{2}\right)$ для проверки прочности того же материала следует использовать теорию наибольших удлинений. Если же $\frac{[\tau]}{[\sigma_+]} = \frac{1}{2}$ (пластичные материалы), то проверку прочности почти во всех случаях необходимо производить по теории наибольших касательных напряжений; теорию наибольших удлинений придётся использовать только при очень «жёстких» видах нагружения, когда $m < \frac{1}{2}$ (всестороннее растяжение).

---

[1]) Следует заметить, что в этих случаях с результатами опытов лучше согласуется не теория наибольших касательных напряжений, а теория Мора.

ГЛАВА XXXIX

ОСНОВЫ РАСЧЁТОВ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ.

§ 253. Влияние высоких температур на механические свойства металлов.

В связи с быстрым развитием машиностроения в настоящее время всё более важное значение приобретают расчёты на прочность деталей машин, длительное время работающих при высоких температурах. К таким деталям относятся, например, диски и лопатки паровых и газовых турбин, трубы и другие детали паровых котлов, различные части двигателей внутреннего сгорания, реактивных двигателей, химических установок и приборов и многие другие.

На поведении материала таких деталей под нагрузкой сказывается как *абсолютная величина температуры*, так, в особенности, и *продолжительность работы* детали при этой температуре.

Под влиянием высокой температуры свойства металлов значительно изменяются, так что знание характеристик прочности и пластичности металла при нормальной (комнатной) температуре является уже далеко недостаточным для расчёта детали из этого металла, работающей при повышенной температуре. Вместе с тем, обычные методы кратковременных испытаний оказываются пригодными для определения механических характеристик металлов только при сравнительно невысоких температурных (например, для углеродистых сталей — до 300—350°, для легированных сталей — до 350—400°, для цветных металлов — до 50—150°). При более высоких температурах характеристики прочности и пластичности очень сильно зависят от продолжительности самого испытания. Вследствие этого при температурах выше 400° для сталей и 150° для цветных металлов определение таких, например, характеристик металла, как предел пропорциональности и предел текучести, является в значительной мере условным, а в некоторых случаях даже теряет свой смысл.

С повышением температуры модуль упругости и предел пропорциональности металла *снижаются* сначала постепенно, а затем, начиная с указанных выше температур, всё более резко. Так, значение модуля нормальной упругости стали при температуре 600° примерно на 25—30%, а при температуре 800° примерно на 50% ниже его значения при комнатной температуре. Понижение модуля упругости и предела пропорциональности у цветных металлов носит ещё более резко выраженный характер.

Величина коэффициента поперечной деформации у стали с повышением температуры обычно несколько *увеличивается*.

Предел текучести углеродистой стали при повышении температуры обычно сначала несколько повышается и при температуре около 200° достигает своей наибольшей величины. При дальнейшем увеличении температуры величина предела текучести сильно уменьшается; так, при температуре 400° предел текучести углеродистой стали составляет лишь от 60 до 70% его величины при комнатной температуре. При этом длина площадки текучести сокращается; у углеродистой стали примерно при 350—450° эта площадка вовсе исчезает. У легированных сталей предел текучести с увеличением температуры, как правило, непрерывно понижается.

Величина отношения предела текучести к пределу прочности стали при повышении температуры обычно уменьшается, притом тем более, чем выше температура; при температурах 300—350° величина этого отношения равна 0,35—0,4.

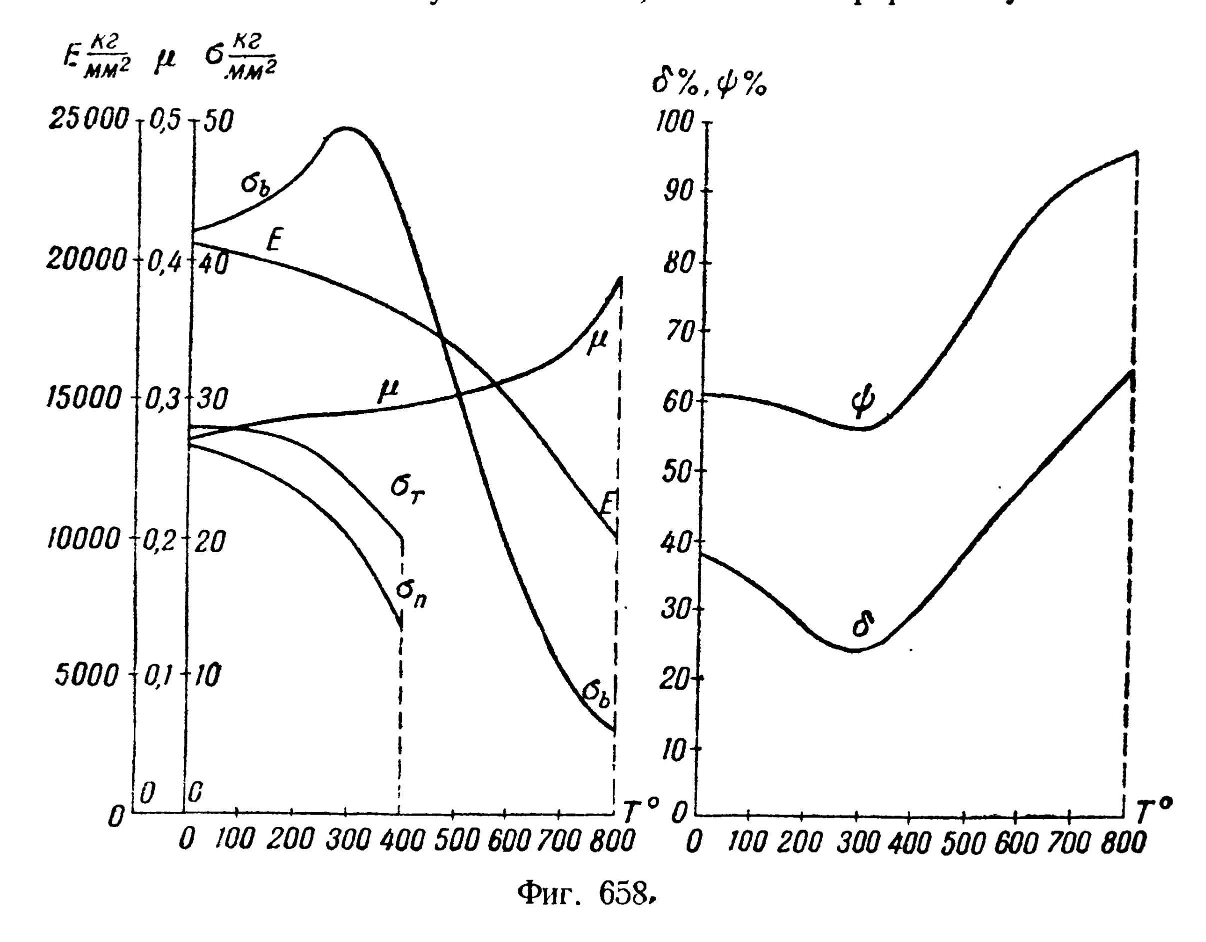
Пластические свойства стали (полное относительное удлинение и сужение при разрыве) с повышением температуры от 20 до 200—300° несколько снижаются; при дальнейшем повышении температуры пластичность стали, как правило, снова возрастает (никелевые, хромоникелевые, хромокремни-

стые, хромовольфрамовые стали). У аустенитных хромоникелевых сталей пластичность с повышением температуры понижается; у углеродистых сталей снижение пластичности наблюдается при температурах 250—350° (так называемая синеломкость стали) и при температурах 900—1000° (красноломкость стали). У одних цветных металлов (алюминий, магний) повышение температуры вызывает непрерывное увеличение, а у других (медь, латунь, никель) — наоборот, уменьшение относительного удлинения и сужения.

Предел прочности стали при повышении температуры, как правило, *сначала повышается* и при температуре 250—300° достигает своей наибольшей величины, примерно на 20—25% превышающей величину предела прочности при комнатной температуре. При дальнейшем увеличении температуры величина предела прочности резко *уменьшается*. Так, например, для малоуглеродистой стали при 600° величина предела прочности составляет только около 40% величины предела прочности той же стали при комнатной температуре.

Добавка легирующих примесей (никеля, хрома, ванадия) замедляет снижение предела прочности стали с увеличением температуры. Предел прочности чугуна до 300° сохраняется почти неизменным; при дальнейшем повышении температуры он сильно уменьшается. У цветных металлов (алюминий, медь, латунь, магний, олово, свинец, цинк, никель) и их сплавов предел прочности с повышением температуры непрерывно и сильно *понижается*. Так, при 600° у этих металлов величина предела прочности составляет всего лишь несколько процентов величины предела прочности при комнатной температуре.

Изменение предела выносливости стали с повышением температуры более или менее соответствует изменению предела прочности, т. е. сначала предел выносливости несколько увеличивается, а затем непрерывно уменьшается.



Фиг. 658.

В качестве примера на фиг. 658 приведены кривые изменения характеристик прочности и пластичности малоуглеродистой стали (0,15% C) с повышением температуры до 800°.

§ 254. Явление ползучести и релаксации.

Описанное выше изменение характеристик прочности и пластичности металлов с повышением температуры имеет весьма важное значение при расчётах на прочность деталей машин и сооружений. Однако наиболее существенным в поведении металлов при высоких температурах оказывается явление так называемой ползучести или крипа.

Ползучестью называется непрерывно (хотя и сравнительно медленно) растущая во времени деформация материала, происходящая под действием постоянных по величине усилий (или напряжений) при повышенной температуре. У ряда металлов (свинец, латунь, бронза, алюминий и некоторые другие цветные металлы и сплавы) ползучесть может иметь место даже при комнатной температуре.

Чем выше температура, тем быстрее нарастает деформация ползучести. Иногда напряжения, меньшие не только предела прочности, но даже и предела пропорциональности материала при комнатной температуре, могут при высокой температуре привести к разрушению детали в результате постепенного нарастания деформации в течение достаточно большого промежутка времени.

Таким образом, например, стальная труба, являющаяся паропроводом и работающая при высоком давлении и температуре пара, будет непрерывно увеличивать свой диаметр; в конце концов может произойти разрыв стенок трубы (такие случаи иногда имели место на практике). В результате ползучести диска и лопаток паровой турбины могут быть перекрыты зазоры, имеющиеся между концами лопаток и корпусом турбины, что вызовет поломку лопаток.

Деформация ползучести у металлов представляет собой необратимую (пластическую) деформацию материала и может быть рассматриваема как медленная текучесть металла. В результате развития пластических деформаций за счёт ползучести в ряде случаев (особенно при сложном напряжённом состоянии) происходит изменение величины напряжений и даже перераспределение их по объёму детали. Изменение величины напряжений будет особенно значительным тогда, когда вследствие тех или иных особенностей работы детали полная деформация её с течением времени не сможет изменяться. В этом случае упругая деформация детали, полученная ею при нагружении, с течением времени будет уменьшаться; за счёт этого возникнет и будет постепенно увеличиваться пластическая деформация. Вместе с тем, напряжения в детали будут снижаться. Такое уменьшение напряжений в результате постепенного нарастания пластической деформации за счёт упругой носит название *релаксации напряжений*.

Благодаря релаксации напряжений плотность соединения деталей, скреплённых при помощи упругого натяга, постепенно может быть настолько ослаблена, что вызовет нарушение нормальной работы конструкции. Так, например, ослабление плотности болтового соединения фланцев газопровода или цилиндра высокого давления паровой турбины может, в конце концов, привести к утечке газа или пара, если периодически не возобновлять затяжку болтов соединения; ослабление плотности насадки диска турбины на вал может привести к нарушению связи между диском и валом, к так называемому «сходу» диска.

Как уже было сказано, у некоторых цветных металлов и сплавов явление ползучести может иметь место даже и при комнатной температуре. Однако у стали, чугуна и ряда цветных металлов и сплавов ползучесть может возникнуть лишь при нагреве их выше некоторой, определённой для каждого металла, температуры (углеродистые стали и чугун — выше 300—350°, легированные стали — выше 350—400°, лёгкие сплавы — выше 50—150° и т. п.). При температурах ниже указанных явление ползучести у этих металлов не наблюдается. Вместе с тем, при температуре, равной или превышающей ту,

при которой в данном металле возможно явление ползучести, ползучесть возникает лишь при напряжениях выше некоторой, определённой для каждого металла, величины. Явление релаксации напряжений наблюдается примерно при тех же температурах и напряжениях, что и явление ползучести.

Явление ползучести особенно резко выражено у металлов. Однако оно имеет место и у ряда других материалов. Так, например, ползучесть при комнатной температуре наблюдается у различных пластмасс (целлулоид, бакелит, винипласт и др.), в бетоне и цементном растворе. В железобетонных конструкциях ползучесть бетона влечёт за собой с течением времени перераспределение напряжений между бетоном и арматурой; последняя несколько перегружается, а бетон начинает испытывать меньшие напряжения. Однако на грузоподъёмности железобетонных сооружений ползучесть бетона и вызванное ею перераспределение напряжений почти не отражается. Пластическое течение при комнатной температуре имеет место также и у дерева при сжатии и, в особенности, при изгибе.

Опытные исследования явления ползучести начались сравнительно недавно (1910 г.). Более или менее широкое распространение эти исследования получили только с начала 20-х годов текущего столетия, когда были опубликованы результаты первых значительных экспериментальных работ.

Проведение испытаний на ползучесть даже при простом растяжении представляет большие трудности. Такие испытания требуют применения специальной аппаратуры для поддержания постоянной величины нагрузки и температуры и для измерения деформаций образца. Для получения достаточно надёжных результатов испытания на ползучесть приходится проводить с особенной тщательностью, продолжительность этих испытаний не должна очень сильно отличаться от срока службы детали из испытуемого материала и, таким образом, должна измеряться десятками тысяч часов. Всё это делает испытания на ползучесть сложными, трудоёмкими и дорогостоящими.

Известна одна исключительная серия опытов на ползучесть, продолжавшихся несколько более 100 тысяч часов (с 27 марта 1931 г. по 8 октября 1942 г.). Продолжительность очень немногих испытаний превышала 10 тысяч часов (около 1 года), в большинстве же случаев экспериментаторы ограничивались одной-двумя тысячами часов. Поэтому даже при простом растяжении явление ползучести экспериментально изучено ещё далеко недостаточно.

Опыты на ползучесть при сложном напряжённом состоянии ещё более сложны и трудоёмки. Большинство таких опытов было проделано на тонкостенных трубках, подвергнутых действию комбинации нагрузок: внутреннего давления, крутящего момента и растягивающего усилия. Однако подобные испытания пока ещё выполнены в очень небольшом количестве.

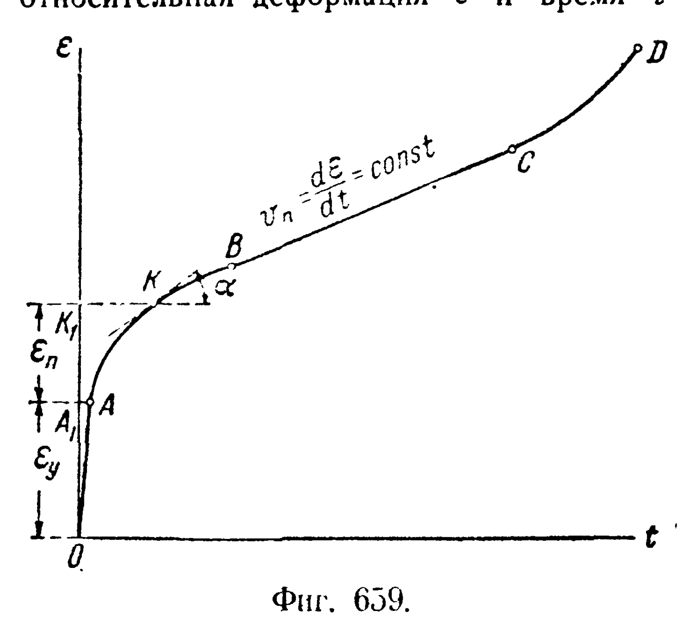
Попытки многих исследователей разработать те или иные методы ускоренных испытаний на ползучесть до сих пор не увенчались успехом. Это объясняется тем, что надлежащая продолжительность испытания является необходимым и наиболее существенным условием получения достаточно надёжных результатов, на которых могли бы основываться расчёты деталей машин на ползучесть. Результаты же ускоренных испытаний могут пока служить лишь для приближённой качественной оценки поведения металлов при высоких температурах.

В связи с быстрым развитием в СССР энергетического машиностроения в годы первых сталинских пятилеток, а также и в настоящее время, вопросам изучения явления ползучести у нас уделяется большое внимание. Экспериментальными и теоретическими исследованиями ползучести у нас занимались и занимаются: Беляев Н. М., Губкин С. И., Ильюшин А. А., Качанов Л. М., Малинин Н. Н., Одинг И. А., Работнов Ю. Н., Серенсен С. В., Шапошников Н. А. и многие другие. За границей наиболее известны исследования явления ползучести, выполненные Бауманом, Бейли, Диккенсоном, Зодербергом, Надаи, Тэпселом и др.

§ 255. Кривые ползучести и релаксации.

А. Выше уже было отмечено, что опытное изучение явления ползучести, на результатах которого основываются расчёты деталей машин и сооружений, работающих при высоких температурах, производится преимущественно на образцах из испытуемого материала, подвергнутых простому растяжению. При этом в течение всего срока испытания обеспечивается как неизменяемость температуры, так и постоянство величины растягивающей образец нагрузки.

При таких испытаниях через некоторые определённые промежутки времени измеряется удлинение образца; по данным измерений в координатах — относительная деформация ε и время t — строится диаграмма испытания — так называемая кривая ползучести материала. Вид кривой ползучести зависит как от рода материала, так и от величины напряжения и температуры. Одна из характерных кривых ползучести для металла схематически изображена на фиг. 659 (кривая $OABCD$).



Фиг. 659.

При нагружении образца, нагретого до определённой температуры T, деформация его вначале возрастает довольно быстро (в зависимости от скорости нагружения) от нуля до некоторой величины OA_1 (предполагается, что процесс нагружения заканчивается в точке A диаграммы). Если при наибольшем значении нагрузки напряжение в образце не превосходит предела упругости материала при данной температуре T, то деформация OA_1 будет вполне упругой; в противном случае отрезок OA_1 будет включать в себя не только упругую, но и остаточную (пластическую) деформацию.

Вслед за этим деформация полностью нагружённого образца постепенно увеличивается во времени, материал образца «ползёт». Нарастание деформации ползучести характеризуется кривой $ABCD$; ординаты точек этой кривой (например, ордината точки K) представляют сумму величин относительной упругой деформации $\varepsilon_y = \overline{OA_1}$ и относительной деформации ползучести $\varepsilon_п = \overline{A_1K_1}$, т. е.

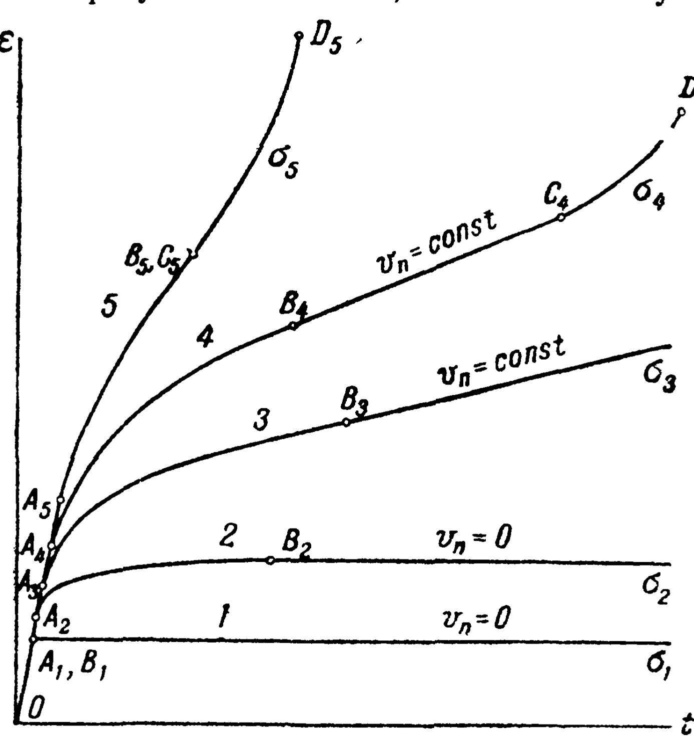
$$\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_п.$$

Скорость деформации ползучести в любой точке кривой определяется величиной тангенса угла наклона касательной к кривой в этой точке к оси абсцисс, т. е.

$$v_п = \frac{d\varepsilon}{dt} = \operatorname{tg}\alpha.$$

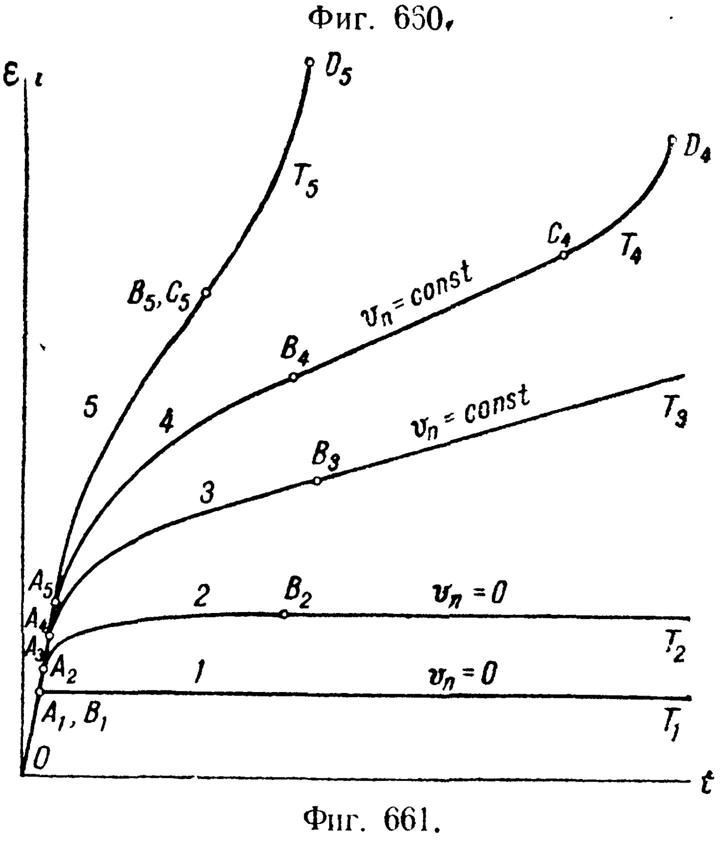
Весь процесс ползучести может быть разбит на три последовательные стадии. В первой стадии, отвечающей участку AB кривой ползучести, деформация протекает с неравномерной, всё время уменьшающейся скоростью; это — так называемая стадия неравномерной или неустановившейся ползучести. Длительность первой стадии ползучести, в зависимости от рода материала и от величины температуры и напряжения, меняется от нескольких десятков до нескольких сотен и даже (в исключительных случаях) тысяч часов.

Наиболее существенное влияние на характер протекания процесса ползучести в этой и последующей стадиях ползучести оказываются два основных фактора: 1) *упрочнение материала* в результате наклёпа, связанного с увеличением остаточной (пластической) деформации, и 2) *устранение этого наклёпа* или понижение несущей способности материала под действием высокой температуры. Явление ползучести можно рассматривать, как взаимодействие этих двух факторов, создающих в основном картину «чистой» ползучести. Эта картина, особенно на последующих стадиях, может быть осложнена влиянием различных внутренних (например, структурные изменения и фазовые превращения в металле) и внешних причин (например, коррозия).



Фиг. 660.

Когда влияние упрочнения от наклёпа уравновешивается ослабляющим материал влиянием длительного действия высокой температуры, уменьшение скорости ползучести прекращается, наступает вторая стадия ползучести (участок BC кривой) — стадия равномерной или установившейся ползучести, на которой деформация ползучести протекает с постоянной и притом минимальной скоростью.



Фиг. 661.

Эта скорость остаётся постоянной до тех пор, пока на образце не начинает образовываться шейка (точка C кривой). Если во время испытания не меняется величина нагрузки, то местное сужение площади поперечного сечения образца в третьей стадии ползучести (участок CD кривой) сопровождается увеличением напряжения, которое, в свою очередь, вызывает увеличение скорости ползучести. Вследствие этого образец в конце концов разрушается (точка D кривой).

При изменении температуры или величины напряжения вид кривых ползучести может значительно измениться. На фиг. 660 схематически изображены кривые ползучести при одной и той же постоянной температуре T, но при различных постоянных напряжениях σ_i (при этом $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4 < \sigma_5$), а на фиг. 661 — кривые ползучести при одном и том же напряжении σ, но при различных постоянных температурах T_i (при этом $T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5$).

При относительно небольшом напряжении ($\sigma = \sigma_1$) или сравнительно невысокой температуре ($T = T_1$) деформация ползучести может вообще не иметь места, т. е. после нагружения образца диаграмма $\varepsilon - t$ будет представлять собой прямую линию, проведённую из точки A_1 параллельно оси абсцисс (см. фиг. 660 и 661). При несколько более высоком напряжении или температуре ($\sigma = \sigma_2$ или $T = T_2$) после сравнительно короткой стадии неустановившейся ползучести скорость ползучести может уменьшиться до нуля, т. е. дальнейшее увеличение деформации образца прекратится. При ещё более высоком напряжении или температуре ($\sigma = \sigma_3$ или $T = T_3$) может случиться, что скорость установившейся ползучести хотя и не будет равна нулю, но окажется настолько малой, что приведёт к разрушению материала через очень большой промежуток времени, значительно превышающий срок службы детали из этого материала.

При напряжении $\sigma = \sigma_4$ или температуре $T = T_4$ получаем кривую ползучести, представленную на фиг. 659. При дальнейшем увеличении напряжения или повышении температуры вид кривых ползучести ещё более изменяется: деформация ползучести протекает всё быстрее, прямолинейный участок — стадия установившейся ползучести — становится всё короче и, наконец, превращается в точку (кривые 5 на фиг. 660 и 661), т. е. стадия неустановившейся ползучести непосредственно переходит в стадию разрушения. В этом случае участок установившейся ползучести существует в виде точки перегиба кривой $ABCD$ — точки B, совпадающей с точкой C.

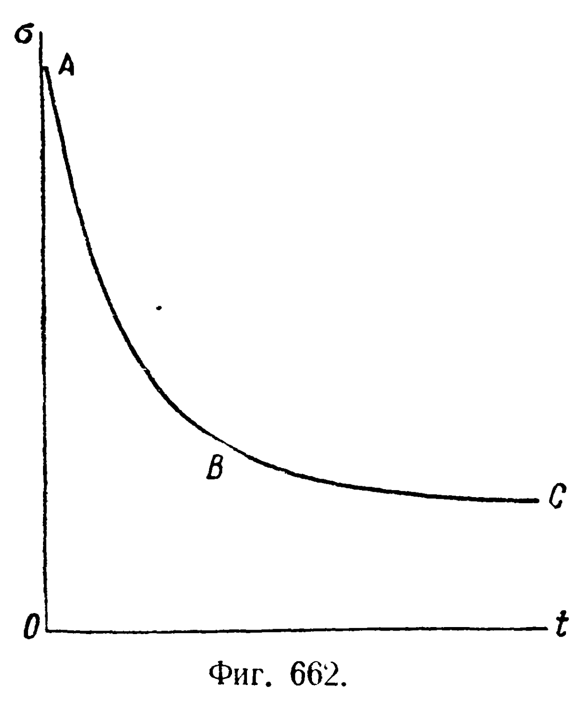
Характер разрушения материала при ползучести в основном зависит от свойств материала при данной температуре. Углеродистая сталь при температурах не выше 550°, медь, свинец и некоторые лёгкие сплавы обычно разрушаются вязко, с образованием больших пластических деформаций и шейки. Разрушение специальных жаропрочных сталей, хорошо сопротивляющихся ползучести, сопровождается сравнительно небольшими деформациями и носит хрупкий характер, начинаясь обычно в местах концентрации напряжений.

Б. Как уже было сказано, релаксацией называется постепенное снижение напряжений в нагружённой детали, полная деформация которой не может изменяться во времени и равна полученной при нагружении упругой деформации. При этом снижение напряжений происходит вследствие постепенного уменьшения упругой деформации и приращения на ту же величину пластической деформации по схеме

$$\varepsilon = \varepsilon_у + \varepsilon_п = \text{const} = \varepsilon_у^0$$

или

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_у}{dt} + \frac{d\varepsilon_п}{dt} = 0.$$



Фиг. 662.

Кривая релаксации схематически изображена на фиг. 662. Процесс релаксации можно разделить на две стадии: первую (участок AB кривой релаксации), в течение которой снижение напряжения в детали происходит весьма быстро с резко уменьшающейся скоростью релаксации, и вторую (участок BC кривой), в течение которой снижение напряжения происходит значительно медленнее с постепенно убывающей скоростью релаксации.

Длительность первой стадии релаксации в зависимости от рода материала, а также величины температуры и начального напряжения, меняется от

нескольких десятков до нескольких сотен часов. Физическая сторона явления релаксации на первой и второй её стадиях освещена ещё недостаточно. Имеется ещё очень мало тщательно поставленных опытов с релаксацией напряжений, которые позволяли бы провести сопоставление полученных при этом результатов с данными опытов на ползучесть. В большинстве машин, применявшихся до сих пор при испытаниях на релаксацию, оказалось невозможным получить явление релаксации в чистом виде.

Обычно принимают, что нарастание пластической деформации в процессе релаксации подобно нарастанию её при ползучести и что поэтому скорость релаксации можно вычислять по скорости ползучести. Исходя из этого предположения, казалось бы, не следовало заниматься специальным изучением явления релаксации. Однако существует и мнение, что скорость релаксации нельзя принимать за скорость ползучести, так как эти два процесса по существу не вполне тождественны, механизм возникновения и нарастания пластической деформации при релаксации несколько иной, чем при ползучести.

При релаксации уменьшение напряжений в детали вызывается нарастанием пластической деформации за счёт упругой деформации при неизменной длине детали, а при ползучести нарастание пластической деформации происходит исключительно за счёт удлинения детали. При этом общая деформация при ползучести значительно больше, чем при релаксации; величина же деформации при высоких температурах может оказать существенное влияние на протекание ползучести, вызывая рекристаллизационные, диффузионные и другие процессы, отражающиеся на сопротивлении материала пластической деформации.

В. При изучении явления ползучести весьма важной задачей является установление функциональной зависимости между основными величинами, характеризующими кривые ползучести: напряжением (σ), температурой (T), временем (t) и деформацией ползучести (ε или $\varepsilon_п$), или её скоростью $\left(\frac{d\varepsilon_п}{dt} = v_п\right)$.

Различными исследователями был предложен целый ряд формул, связывающих указанные величины. Бóльшая часть этих формул получена чисто эмпирическим путём и только некоторые из них построены, кроме того, ещё и на приближённых физических представлениях о протекании процесса ползучести. Поэтому ни одна из этих формул не отвечает достаточно хорошо опытным данным на широком диапазоне изменения напряжений, температур и времени. Большей частью расчёты по этим формулам удовлетворительно совпадают с опытными данными только на отдельных участках кривой ползучести — главным образом, на участке установившейся ползучести.

Представляющая значительный интерес с практической точки зрения кривая 3 фиг. 660 или 661 может быть выражена приближённой формулой:

$$\varepsilon_п = P(\sigma, T)\, Q(t, T) + tR(\sigma, T), \tag{39.1}$$

где $P(\sigma, T)$ и $R(\sigma, T)$ — некоторые функции постоянного напряжения и температуры, а $Q(t, T)$ — функция температуры и времени. Первый член формулы характеризует главным образом явление неустановившейся ползучести; им можно пренебречь во второй стадии ползучести. Он построен в предположении, что на первой стадии ползучести кривые ползучести геометрически подобны, т. е. при одной и той же температуре, но при различных напряжениях, кривые ползучести могут быть получены из одной какой-либо кривой путём умножения её ординат на некоторую функцию напряжений. Это предположение, вообще говоря, экспериментально не подтверждается. Второй член формулы характеризует главным образом явление установившейся ползучести, когда скорость деформации ползучести $v_п = R(\sigma, T)$ постоянна; этим членом можно пренебречь в первой стадии ползучести.

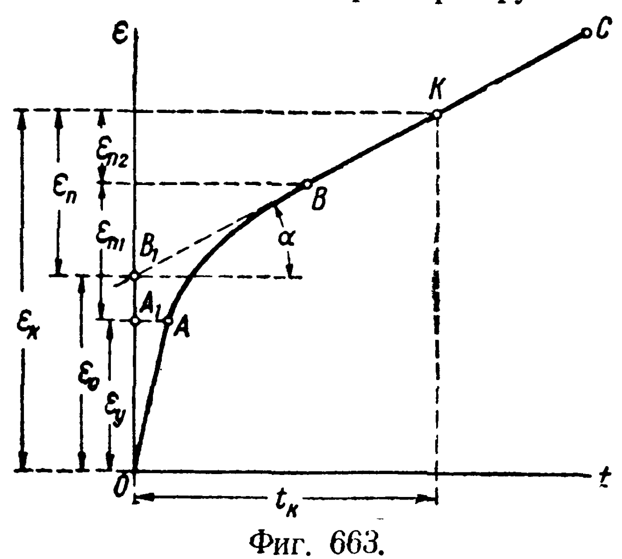
Так как опытное исследование стадии неустановившейся ползучести представляет значительно бóльшие трудности, чем исследование стадии

Таблица 40. **Коэффициенты к формуле (39.3).**

№№ п/п	Сорт стали	Химический состав в %%								Термическая обработка	Температура $T°$	Диапазон напряжений в $кг/см^2$	Значения коэффициентов в формуле (39.3)	
		C	Mn	Si	Mo	Cr	Ni	W	Nb				n	$k\left(\frac{см^2}{кг}\right)^n \frac{1}{час}$
1	Углеродистая	0,15	0,50	0,23	—	—	—	—	—	Отжиг 844°	427	1410—2110	6,35	$0{,}17 \cdot 10^{-20}$
											538	280—560	3,05	$0{,}12 \cdot 10^{-13}$
											593	110—250	3,10	$0{,}26 \cdot 10^{-12}$
											649	30—90	2,85	$0{,}16 \cdot 10^{-10}$
2	Углеродистая	0,43	0,68	0,20	—	—	—	—	—	Отжиг 844°	427	1060—1690	6,0	$0{,}2 \cdot 10^{-24}$
											538	210—630	3,9	$0{,}14 \cdot 10^{-15}$
											649	30—180	1,7	$0{,}12 \cdot 10^{-8}$
3	Молибденовая	0,13	0,49	0,25	0,52	—	—	—	—	Отжиг 844°	482	910—1410	5,40	$1{,}2 \cdot 10^{-23}$
											538	560—1060	4,60	$0{,}6 \cdot 10^{-19}$
											593	210—420	3,55	$0{,}23 \cdot 10^{-14}$
											649	60—120	3,10	$0{,}2 \cdot 10^{-12}$
4	Хромомолибденовая	0,11	0,45	0,42	0,50	2,08	—	—	—	Отжиг 844°	482	970—1410	8,35	$0{,}58 \cdot 10^{-30}$
											538	460—840	4,95	$0{,}14 \cdot 10^{-19}$
											593	280—560	6,90	$0{,}10 \cdot 10^{-23}$
											649	140—280	3,25	$0{,}17 \cdot 10^{-12}$
5	Хромомолибденовая	0,48	0,49	0,62	0,52	1,20	—	—	—	Отжиг 844°	427	1410—2110	6,35	$0{,}145 \cdot 10^{-26}$
											538	320—1060	3,55	$0{,}175 \cdot 10^{-15}$
											649	70—250	2,95	$0{,}365 \cdot 10^{-12}$
6	Хромоникелевая (18—8)	0,06	0,50	0,61	—	17,75	9,25	—	—	Закалка 1093°	538	880—1340	4,4	$0{,}21 \cdot 10^{-19}$
											593	560—1060	4,3	$0{,}17 \cdot 10^{-18}$
											649	350—840	5,1	$0{,}14 \cdot 10^{-19}$
											816	110—280	4,7	$0{,}21 \cdot 10^{-16}$
7	Сталь-69	0,52	—	0,82	0,57	13,51	15,2	2,01	—	Закалка 1175°	600	800—2200	3,15	$0{,}65 \cdot 10^{-16}$
											650	400—1500	2,9	$0{,}29 \cdot 10^{-14}$
8	Сталь Nb	0,19	—	0,72	0,69	1,71	0,87	—	0,77	Нормализац. 850°	500	1500—2500	4,3	$0{,}41 \cdot 10^{-20}$
											600	200—500	3,1	$0{,}59 \cdot 10^{-14}$

установившейся ползучести, то этот участок кривой ползучести изучен ещё совершенно недостаточно. Поэтому надёжных данных о характере функций $P(\sigma, T)$ и $Q(t, T)$ до сих пор почти нет. В связи с этим при расчётах на ползучесть участком неустановившейся ползучести нередко пренебрегают, продолжая прямую BC (фиг. 663) до пересечения её с осью ординат в точке B_1 и определяя величину полной деформации при ползучести (например, ε_k) по приближённой формуле:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0 + \varepsilon_п \approx \varepsilon_у + \varepsilon_п = \varepsilon_у + t_k \cdot \operatorname{tg}\alpha = \varepsilon_у + t_k \cdot v_п. \quad (39.2)$$



Фиг. 663.

Значительно лучше экспериментально изучена стадия установившейся ползучести. Из различных зависимостей для $R(\sigma, T)$, предложенных разными исследователями, наиболее проверенными экспериментально являются следующие:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ v_п = R(\sigma, T) = k\sigma^n, \\ &2)\ v_п = a \operatorname{sh}\frac{\sigma}{b}. \end{aligned}\right\} \quad (39.3)$$

В этих формулах k, n, a и b — некоторые коэффициенты, зависящие от свойств материала и температуры испытания. Вторая зависимость лучше совпадает с данными эксперимента, чем первая, зато использование её при расчётах приводит к значительному усложнению вычислений. Вместе с тем данных о коэффициентах k и n в первой формуле получено значительно больше, чем данных о коэффициентах a и b во второй формуле. Поэтому в настоящее время при расчётах на ползучесть чаще используют первую формулу.

В качестве примера в таблицах 40 и 41 приводятся данные о величине коэффициентов, входящих в первую формулу, для сталей и некоторых других материалов, испытанных на ползучесть при различных напряжениях и температурах.

Таблица 41. **Коэффициенты к формуле (39.3).**

Материал	Продолжительность испытания в часах	Интервалы напряжений в $кг/см^2$	Температура $T°$	n	$k\ \frac{см^{2n}}{кг^n\ час}$
1. Сталь с 0,3% C	—	—	400	6,9	$1{,}5 \cdot 10^{-31}$
2. » » 0,39% (кованая)	—	—	400	8,6	$5{,}4 \cdot 10^{-38}$
3. » » 0,45 C	400	200—490	540	5,9	$1{,}2 \cdot 10^{-21}$
4. » » 3,5% Ni	400	245—460	540	7,2	$6 \cdot 10^{-25}$
5. » » 0,4% Mo	—	—	450	3,2	$4{,}1 \cdot 10^{-22}$
6. » » 12% Cr	—	—	455	4,4	$4{,}9 \cdot 10^{-23}$
7. » » 19% Ni; 6% Cr; 1% Si	400	1340—1900	540	13,1	$1{,}8 \cdot 10^{-48}$
8. » » 8% Ni; 18% Cr; 0,5% Si	400	1060—1440	540	14,8	$2 \cdot 10^{-52}$
9. » » 2% Ni; 0,8% Cr; 0,4% Mo	—	—	460	3,0	$1{,}2 \cdot 10^{-17}$
10. » » 0,3% C; 1,4% Mn	—	—	450	4,7	$8{,}6 \cdot 10^{-22}$
11. Чугун с 12% Cr; 3% W; 0,4% Mn	—	—	550	1,9	$9{,}7 \cdot 10^{-15}$
12. Свинец	700	56—107	40	5	$4{,}2 \cdot 10^{-14}$

§ 256. Основы расчётов на ползучесть.

А. Первые исследователи явления ползучести пытались оценить способность металлов сопротивляться ползучести величиной так называемого предела ползучести σ_c, понимая под этим то наибольшее напряжение в материале, при котором явление ползучести вовсе не наблюдается (кривая *1* фиг. 660 и 661). Несколько позже под пределом ползучести стали понимать то наибольшее напряжение, при котором скорость ползучести, вызывая некоторую сравнительно небольшую остаточную деформацию в материале, в конце концов становится равной нулю (кривая *2* фиг. 660 и 661).

Однако опытами вскоре было установлено, что определённые таким путём пределы ползучести при температурах, при которых обычно работают паропроводы, диски и лопатки турбин и другие детали машин, подвергающиеся ползучести, представляют собой весьма небольшие напряжения, практически не интересующие машиностроителей, так как большинство даже самых ответственных деталей машин в действительности работает при напряжениях, превышающих эти пределы. При этом во многих машиностроительных деталях, находящихся в условиях высоких температур, допускаются небольшие остаточные деформации, не превышающие некоторой определённой величины, лишь бы они не вызывали нарушения нормальной работы конструкции в течение срока её службы.

Вследствие этого в настоящее время при расчётах на ползучесть в большинстве случаев исходят из наибольшей допускаемой в течение срока службы детали величины остаточной деформации ползучести или суммарной деформации, складывающейся из упругой деформации при нагружении и остаточной деформации при ползучести. Соответствующее наибольшее напряжение в материале, не вызывающее при данной температуре деформации детали, превышающей допускаемую, может быть рассматриваемо как допускаемое напряжение. Иногда это напряжение называют *условным пределом ползучести материала по допускаемой суммарной деформации ползучести* ($\sigma_{c\varepsilon}$). Величина $\sigma_{c\varepsilon}$, очевидно, является функцией температуры и допускаемой деформации ползучести.

В качестве примера в таблице 42 приведены ориентировочные данные о допускаемых величинах суммарной относительной деформации ползучести $[\varepsilon]$ для некоторых деталей паровых котлов и турбин.

Таблица 42. **Величины $[\varepsilon]$.**

Детали	Срок службы в тыс. часов	$[\varepsilon]\ \frac{см}{см}$
1. Трубки пароперегревателей	20	0,02
2. Паропроводы	100	0,003
3. Цилиндры паровых турбин	100	0,001

При расчётах на ползучесть по суммарной деформации ползучести исходное расчётное уравнение при линейном напряжённом состоянии материала может быть представлено в следующем виде (см. фиг. 663):

$$\varepsilon = \varepsilon_у + \varepsilon_{п1} + \varepsilon_{п2} = \varepsilon_0 + \varepsilon_{п2} = \varepsilon_0 + v_п t_д = \varepsilon_0 + k\sigma^n t_д \leqslant [\varepsilon], \qquad (39.4)$$

где $\varepsilon_у$ — упругая относительная деформация детали при её нагружении, $\varepsilon_{п1}$ и $\varepsilon_{п2}$ — относительные деформации детали в стадиях неустановившейся и установившейся ползучести, $\varepsilon_0 = \varepsilon_у + \varepsilon_{п1}$, $[\varepsilon]$ — наибольшая допускаемая за время службы детали величина суммарной деформации ползучести, $t_д$ — срок службы детали и $v_п = k\sigma^n$ — скорость установившейся ползучести.

Если пренебречь величиной $\varepsilon_{п1}$ и считать, что

$$\varepsilon_0 \approx \varepsilon_у = \frac{\sigma}{E_T},$$

где E_T — модуль упругости материала при данной температуре T, то вместо (39.4), получим:

$$\frac{\varepsilon}{E_T} + k\sigma^n t_д \leqslant [\varepsilon]$$

или

$$\frac{[\sigma]}{E_T} + k[\sigma]^n t_д = [\varepsilon]. \qquad (39.5)$$

Из уравнения (39.5) можно определить величину допускаемого напряжения $[\sigma] = \sigma_{c\varepsilon}$, соответствующего допускаемой величине суммарной деформации ползучести $[\varepsilon]$. Если допустимо пренебречь и величиной упругой деформации $\varepsilon_у$, то из (39.5) имеем:

$$[\sigma] = \left\{\frac{[\varepsilon]}{kt_д}\right\}^{\frac{1}{n}}. \qquad (39.6)$$

В этом последнем случае условие прочности в напряжениях напишется так:

$$\sigma \leqslant [\sigma] = \left\{\frac{[\varepsilon]}{kt_д}\right\}^{\frac{1}{n}}. \qquad (39.7)$$

Следует, однако, заметить, что пренебрежение величиной упругой деформации и деформации ползучести в стадии неустановившейся ползучести может иногда привести при расчётах к большим погрешностям, особенно в тех случаях, когда продолжительность стадии неустановившейся ползучести не очень мала по сравнению со всем сроком службы детали.

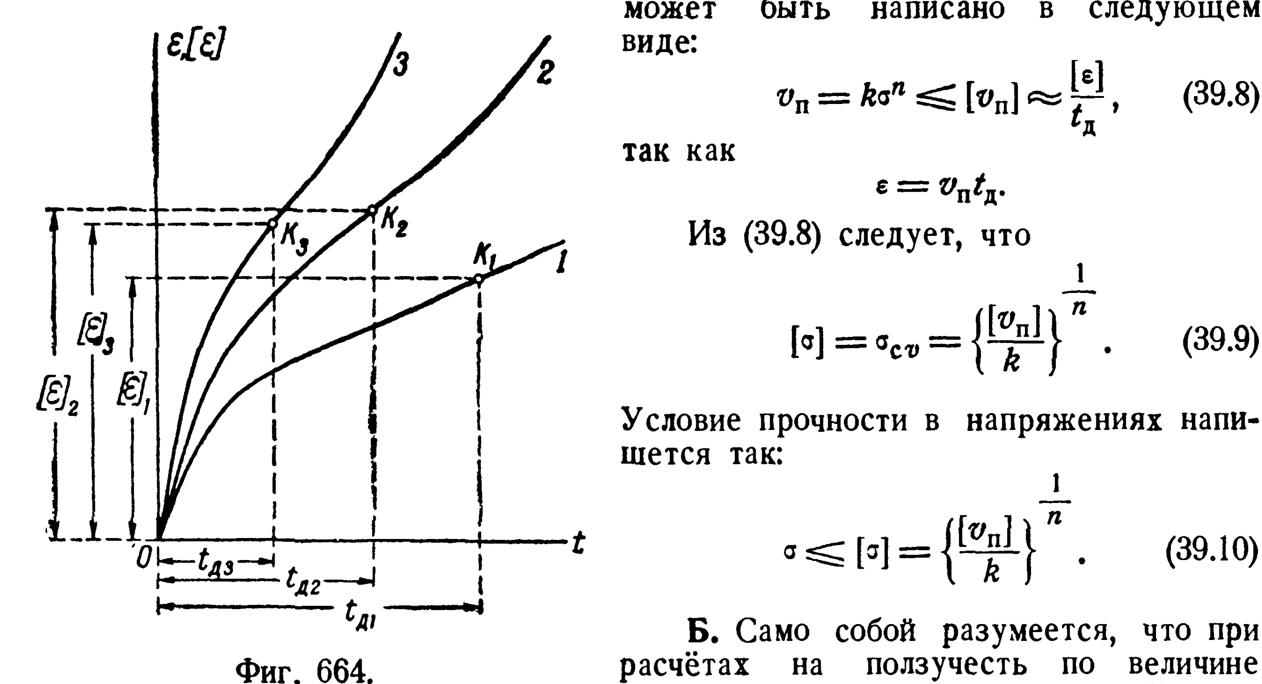
Если же упругая деформация детали и её деформация в стадии неустановившейся ползучести пренебрежимо малы по сравнению с деформацией в стадии установившейся ползучести, то при расчётах на ползучесть можно исходить из наибольшей допускаемой величины установившейся (минимальной) скорости ползучести. Допускаемая величина скорости ползучести, очевидно, должна быть определена опять-таки из условия, чтобы деформация ползучести, нарастающая с этой постоянной скоростью, не превзошла в течение срока службы детали некоторой допускаемой величины деформации, при которой не происходит нарушения нормальной работы конструкции. Соответствующее наибольшее напряжение в материале, не вызывающее при данной температуре скорости ползучести, превышающей допускаемую, может быть рассматриваемо, как допускаемое напряжение. Нередко это напряжение называют *условным пределом ползучести материала по допускаемой минимальной или равномерной скорости деформации* (σ_{cv}). Величина σ_{cv}, очевидно, является функцией температуры и допускаемой минимальной скорости ползучести.

В качестве примера в таблице 43 приведены ориентировочные данные о допускаемых величинах минимальной относительной скорости ползучести $[v_п]$ для некоторых деталей паровых котлов и турбин.

Таблица 43. **Скорость ползучести.**

Детали	$[v_п]$ в час
1. Турбинные диски с тугой посадкой на вал	10^{-9}
2. Болты, фланцы, цилиндры паровых турбин	10^{-8}
3. Паропроводы, сварные швы котельных труб	10^{-7}
4. Трубы пароперегревателей	10^{-6}—10^{-5}

При расчётах на ползучесть по минимальной скорости ползучести исходное расчётное уравнение при линейном напряжённом состоянии материала может быть написано в следующем виде:



Фиг. 664.

$$v_п = k\sigma^n \leqslant [v_п] \approx \frac{[\varepsilon]}{t_д}, \qquad (39.8)$$

так как

$$\varepsilon = v_п t_д.$$

Из (39.8) следует, что

$$[\sigma] = \sigma_{cv} = \left\{\frac{[v_п]}{k}\right\}^{\frac{1}{n}}. \qquad (39.9)$$

Условие прочности в напряжениях напишется так:

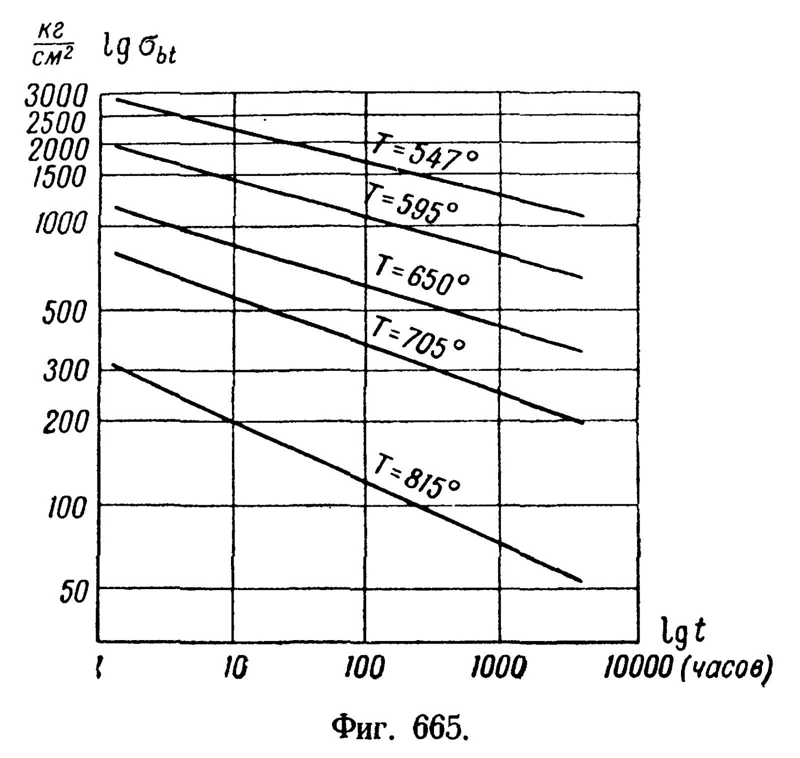
$$\sigma \leqslant [\sigma] = \left\{\frac{[v_п]}{k}\right\}^{\frac{1}{n}}. \qquad (39.10)$$

Б. Само собой разумеется, что при расчётах на ползучесть по величине допускаемой деформации или её скорости необходимо соблюдение условия, чтобы при данной температуре за время срока службы детали деформация ползучести не только не привела к разрушению материала, но и был обеспечен некоторый запас прочности против возможности такого разрушения. Таким образом, точки k_1, k_2 и k_3 (фиг. 664) на различных кривых ползучести *1*, *2* и *3*, отвечающие абсциссам $t_{д1}$, $t_{д2}$ и $t_{д3}$ и ординаты $[\varepsilon]_1$, $[\varepsilon]_2$ и $[\varepsilon]_3$, обязательно должны находиться на участках первой или второй стадии ползучести.

Это обстоятельство должно быть проверено расчётом и поэтому требует специального исследования. Расчёты по величине допускаемой деформации ползучести или её скорости, как уже было показано, могут быть заменены расчётами по соответствующим допускаемым напряжениям — пределам пол-

зучести $\sigma_{c\varepsilon}$ или σ_{cv}. При этом необходимо убедиться, что величина σ_c ($\sigma_{c\varepsilon}$ или σ_{cv}) не превосходит величины допускаемого напряжения, представляющего некоторую долю предела прочности материала при данной температуре.

Известно (§ 253), что предел прочности материала при высоких температурах очень сильно зависит от продолжительности испытания; сравнительно небольшое увеличение длительности испытания вызывает значительное уменьшение предела прочности. При некоторых температурах (например, для малоуглеродистой стали при температурах выше 800°) испытуемый образец может быть разрушен нагрузкой, вызывающей напряжение ниже предела пропорциональности материала при комнатной температуре, если эта нагрузка будет действовать достаточно продолжительное время. Поэтому прочность металлов при высоких температурах в настоящее время характеризуют не величиной обычного предела прочности, определяемого путём кратковременных испытаний, а величиной так называемого *предела длительной прочности* (σ_{Bt}). Этим термином обозначают такое напряжение при данной постоянной температуре, при действии которого в течение заданного промежутка времени в конце этого промежутка произойдёт разрушение материала. В качестве примера на фиг. 665 приведены графики изменения величины предела длительной прочности хромомолибденовой стали (0,1% C; 1,55% Si; 4,88% Cr; 0,51% Mo) в зависимости от времени при различных температурах.



Фиг. 665.

Иногда высказывается мнение о том, что неравномерность распределения напряжений в местах их концентрации при ползучести сглаживается и что при расчётах на ползучесть можно поэтому концентрацию напряжений не учитывать. Следует заметить, что детали машин, работающие при высоких температурах, как правило, изготовляются из специальных жаропрочных сталей, обладающих сравнительно малой ползучестью; разрушение деталей из таких сталей наступает обычно при небольших деформациях и носит хрупкий характер. Поэтому в большинстве практически встречающихся случаев выравнивание местных напряжений не успевает произойти и, таким образом, при расчётах на ползучесть концентрацию напряжений необходимо принимать во внимание.

В связи с этим и при определении предела длительной прочности жаропрочных сталей возможная в деталях концентрация напряжений должна быть учтена, т. е. испытания по определению σ_{Bt} должны вестись на образцах соответствующей формы.

Для тех случаев, когда детали машин находятся в условиях совместного действия двух факторов — усталости и ползучести, предел длительной прочности должен определяться из испытаний на усталость при соответствующей температуре. Таким образом, при расчётах на прочность деталей машин и сооружений, работающих при высоких температурах, необходимо различать следующие основные случаи.

При температурах, не вызывающих в материале явления ползучести (см. § 254), опасное состояние определяется пределом текучести или пределом прочности материала при данной температуре, полученными путём обычных кратковременных испытаний. В этом случае условие прочности может быть написано так:

$$\sigma \leqslant [\sigma] = \frac{\sigma_{в}}{k}. \tag{39.11}$$

Если при данной температуре ползучесть возможна (см. § 254), то необходимо прежде всего установить, какое из допускаемых напряжений при заданном сроке службы детали $t_д$ является бо́льшим — допускаемое напряжение по суммарной деформации ползучести ($\sigma_{c\varepsilon}$) или по минимальной её скорости (σ_{cv}), или допускаемое напряжение, вычисленное по пределу длительной прочности $[\sigma_{вt}] = \frac{\sigma_{вt}}{k_t}$, где k_t — коэффициент запаса длительной прочности, который можно принимать приблизительно равным обычному коэффициенту запаса прочности k (фиг. 666).

Если $[\sigma] = \sigma_c$ $(\sigma_{c\varepsilon}, \sigma_{cv}) < [\sigma_{вt}]$ — область A на фиг. 666, то расчёт на ползучесть должен производиться по формулам (39.4), (39.7), (39.8) или (39.10). Если же $[\sigma] = \sigma_c > [\sigma_{вt}]$ — область B на фиг. 666, то расчёт на ползучесть должен, очевидно, производиться по формуле:

$$\sigma \leqslant [\sigma_{вt}] = \frac{\sigma_{вt}}{k_t}. \tag{39.12}$$

Фиг. 666.

В тех случаях, когда имеет место явление релаксации напряжений, обычно должно быть обращено внимание на то, чтобы не произошло недопустимо большое ослабление соединения деталей, скреплённых с помощью упругого натяга; снизившееся благодаря релаксации напряжение σ_t не должно быть меньше некоторой определённой минимальной величины напряжения, обеспечивающего надлежащую плотность соединения:

$$\sigma_t \geqslant \sigma_{\min}.$$

Исходя из этого условия, могут быть установлены сроки, по истечении которых необходимо специальными мерами восстанавливать плотность соединения, — например, подтягивать болты фланцев паро- или газопровода.

В заключение отметим, что в этом параграфе была рассмотрена методика расчётов на ползучесть в наиболее простых случаях (линейное напряжённое состояние), являющаяся основой для построения более сложных расчётов. Методика расчётов на ползучесть при сложном напряжённом состоянии рассматривается в специальных монографиях[1]).

§ 257. Примеры расчётов на ползучесть.

Пример 145. Стержень, изготовленный из хромомолибденовой стали и имеющий площадь поперечного сечения $F = 2$ *см*^{2}, растянут силой P. Определить наибольшую допускаемую величину силы P в двух вариантах: при

---

[1]) Малинин Н. Н., Основы расчётов на ползучесть, 1948; Качанов Л. М., Некоторые вопросы теории ползучести, 1949.

температурах $T_1 = 480°$ и $T_2 = 650°$, если срок службы стержня $t_д = 5000$ часов. Наибольшая величина равномерной относительной скорости ползучести не должна превышать $[v_п] = 6 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{час}$. Коэффициент запаса прочности по отношению к пределу длительной прочности принять равным $k_t = 1{,}7$.

Для материала стержня скорость установившейся ползучести может быть вычислена по формуле $v_п = k\sigma^n$, а величина предела длительной прочности — по эмпирической формуле $\sigma_{вt}\left(\frac{кг}{мм^2}\right) = \frac{e^a}{t_д^b}$; значения коэффициентов k, n, a и b приведены в таблице 44.

Таблица 44. **Значение коэффициентов.**

Температура $T°$	n	$k\ \frac{см^{2n}}{кг^n час}$	a	b
480	8,35	$0{,}58 \cdot 10^{-30}$	4,2	0,15
650	3,25	$0{,}17 \cdot 10^{-12}$	2,3	0,25

Решение. Допускаемое напряжение по допускаемой скорости установившейся ползучести определяем по формуле (39.9):

$$[\sigma] = \sigma_{cv} = \left\{\frac{[v_п]}{k}\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

При температуре $T_1 = 480°$ имеем:

$$[\sigma]_1 = \left[\frac{6 \cdot 10^{-7}}{0{,}58 \cdot 10^{-30}}\right]^{\frac{1}{8{,}35}} = 752\ кг/см^2,$$

а при температуре $T_2 = 650°$:

$$[\sigma]_2 = \left[\frac{6 \cdot 10^{-7}}{0{,}17 \cdot 10^{-12}}\right]^{\frac{1}{3{,}25}} = 103\ кг/см^2.$$

Допускаемое напряжение по пределу длительной прочности определяем по формуле

$$[\sigma_{вt}] = \frac{\sigma_{вt}}{k_t} = \frac{e^a}{k_t t_д^b}.$$

При температуре $T_1 = 480°$ имеем:

$$[\sigma_{вt}]_1 = \frac{e^{4{,}2}}{1{,}7 \cdot 5000^{0{,}15}} = \frac{66{,}68}{1{,}7 \cdot 3{,}588} = 10{,}93\ кг/мм^2,$$

а при температуре $T_2 = 650°$:

$$[\sigma_{вt}]_2 = \frac{e^{2{,}3}}{1{,}7 \cdot 5000^{0{,}25}} = \frac{9{,}974}{1{,}7 \cdot 8{,}409} = 0{,}70\ кг/мм^2.$$

Результаты вычисления показывают, что при температуре $T_1 = 480°$ $[\sigma]_1 < [\sigma_{вt}]_1$, а при температуре $T_2 = 650°$ $[\sigma]_2 > [\sigma_{вt}]_2$. Следовательно, в первом случае допускаемое напряжение необходимо принять равным $[\sigma]_1 = 752$ *кг/см²*, а во втором случае — равным $[\sigma_{вt}]_2 = 70$ *кг/см²*.

Величина допускаемого усилия равна $[P] = F[\sigma] = 2[\sigma]$. При температуре $T_1 = 480°$ $[P]_1 = 2 \cdot 752 \approx 1500$ *кг*; а при температуре $T_2 = 650°$ $[P]_2 = 2 \cdot 70 = 140$ *кг*.

Пример 146. Определить, как часто для предотвращения утечки пара нужно возобновлять затяжку болтов фланцевого соединения паропровода, если начальное упругое натяжение каждого болта, равное $P = 3000$ *кг*, не должно снижаться более, чем на 40%. Температура, при которой работают болты, $T = 425°$. Площадь поперечного сечения болта $F = 3$ *см²*; материал болтов — углеродистая сталь с модулем упругости $E_T = 1{,}77 \cdot 10^{-6}$ *кг/см²* (при $T = 425°$), для которой скорость установившейся ползучести может быть определена по формуле $v_п = k\sigma^n$, причём при

$$T = 425° \quad k = 2{,}26 \cdot 10^{-25} \text{ см}^{2n}/\text{кг}^n\text{час}, \text{ а } n = 6.$$

Задачу решить в предположении, что фланцы паропровода абсолютно несжимаемы; при расчётах стадию неустановившейся ползучести во внимание не принимать.

Решение. Если фланцы паропровода абсолютно несжимаемы, то полная деформация болта, растянутого первоначально (при затяжке) на величину Δl_0, с течением времени не может измениться. При ползучести упругая деформация болта $\Delta l_у$ будет постепенно переходить в пластическую деформацию $\Delta l_п$; за этот счёт напряжение в болте будет понижаться. При этом

$$\Delta l_у + \Delta l_п = \Delta l_0 = \text{const}$$

или

$$\varepsilon_у + \varepsilon_п = \frac{\sigma}{E_T} + \varepsilon_п = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_T},$$

где σ_0 — первоначальное упругое напряжение в болте, σ — напряжение в нём в момент времени t и E_T — модуль упругости материала при данной температуре T. Дифференцируя это уравнение по t, имеем

$$\frac{1}{E_T}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\varepsilon_п}{dt} = \frac{1}{E_T}\frac{d\sigma}{dt} + v_п = \frac{1}{E_T}\frac{d\sigma_0}{dt} = 0.$$

Пренебрегая стадией неустановившейся ползучести и заменяя $v_п$ на $k\sigma^n$, получаем такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\sigma}{dt} + E_T \cdot k\sigma^n = 0$$

или

$$\frac{d\sigma}{\sigma^n} = -E_T k\,dt.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{1}{(n-1)\sigma^{n-1}} = E_T kt + C, \qquad \text{(a)}$$

где C — постоянная интегрирования. Так как при $t = 0$ $\sigma = \sigma_0$, то

$$C = \frac{1}{(n-1)\sigma_0^{n-1}}.$$

Подставляя найденное значение C в уравнение (а), получаем формулу, связывающую σ и t:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\left[1 + (n-1) E_T k \sigma_0^{n-1} t\right]^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Используя числовые данные задачи, имеем:

$$\sigma = \frac{\frac{3000}{3}}{\left[1 + (6-1)\cdot 1{,}77\cdot 10^{6}\cdot 2{,}26\cdot 10^{-25}\left(\frac{3000}{3}\right)^{6-1}\cdot t\right]^{\frac{1}{6-1}}} = \frac{1000}{(1 + 2\cdot 10^{-3}\cdot t)^{\frac{1}{5}}}$$

или

$$t = \frac{1}{2}\left(1000 - \frac{10^{18}}{\sigma^5}\right).$$

Подсчитанные по последней формуле значения t, соответствующие различным значениям σ, приведены в таблице 45 (столбец A). Если напряжение в болтах не должно снижаться более чем на 40%, то дополнительную затяжку болтов необходимо производить через каждые 5930 часов, или примерно через 8,5 месяца.

Приведённое здесь решение задачи о релаксации напряжений в болтах является весьма приближённым. Благодаря податливости фланцев паропровода понижение напряжений в болтах будет происходить значительно быстрее. Решение данной задачи с учётом податливости фланцев оказывается несколько более сложным. Не рассматривая здесь этого решения, ограничимся лишь тем, что приведём его окончательные результаты (см. таблицу 46, столбец B) для того случая, когда упругая деформация фланцев равна $\varepsilon_{уф} = 3\cdot 10^{-8} P_t$, а скорость деформации ползучести их равна $v_{пф} = 5\cdot 10^{-22} P_t^4$ (здесь P_t *кг* — натяжение одного болта в момент времени t).

Таблица 45. **Значения t.**

σ в *кг/см²*	t (в часах)	
	A	B
1000	0	0
900	347	335
800	1026	960
700	2475	2230
600	5930	5000
500	15500	11900
400	48300	31700

Таким образом, исходя из результатов более точного решения задачи, дополнительную затяжку болтов необходимо производить не через 5930 часов, а через 5000 часов, или 7 месяцев. Если же при решении задачи учесть и деформацию ползучести в стадии неустановившейся ползучести, то последняя цифра понизится ещё больше.

Пример 147. Круглый вал диаметром 24 *мм*, работающий при температуре $T = 540°$, скручивается постоянным моментом $M_к = 20$ *кгм*. Материал вала — легированная сталь с модулем упругости $G = 6\cdot 10^5$ *кг/см²* (при $T = 540°$). Скорость установившейся ползучести может быть вычислена по формуле $v_п = k\tau^n$, причём при $T = 540°$ $k = 2{,}5\cdot 10^{-19}$ *см²ⁿ/кгⁿчас* и $n = 5$.

Найти распределение касательных напряжений в поперечном сечении вала и его угол закручивания через 1000 часов после нагружения.

Решение. Предположим, что гипотеза плоских сечений при кручении остаётся справедливой и в условиях ползучести материала (это предположение довольно хорошо согласуется с опытными данными). В таком случае

два соседних поперечных сечения вала, расположенных на расстоянии dx друг от друга, оставаясь плоскими, только повернутся одно относительно другого на угол $d\varphi$. Так как радиусы сечений не искривляются, то для относительного сдвига на расстоянии ρ от центра вала можем воспользоваться известной (§ 57) формулой:

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}.$$

После нагружения вала деформации сдвига, вследствие ползучести материала, начнут постепенно увеличиваться; будет увеличиваться также и относительный угол закручивания $\frac{d\varphi}{dx}$. Полная деформация сдвига представится в виде суммы упругой деформации $\gamma_у$ и деформации ползучести $\gamma_п$, т. е. $\gamma = \gamma_у + \gamma_п$. Скорость изменения полной относительной деформации сдвига будет равна:

$$v = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_у}{dt} + \frac{d\gamma_п}{dt} = v_у + v_п = \rho \frac{d^2\varphi}{dx \cdot dt}.$$

Для упрощения решения задачи относительно малой величиной скорости упругой деформации пренебрежём по сравнению с большой величиной скорости деформации ползучести. Более точное решение этой задачи с учётом того, что $v_у \neq 0$, представляет значительные трудности. Пренебрегая, кроме того, стадией неустановившейся ползучести и полагая, что $v_п = k\tau^n$, получим:

$$v \approx v_п = k\tau^n = \rho \frac{d^2\varphi}{dx \cdot dt},$$

откуда

$$\tau = \left[\frac{1}{k} \frac{d^2\varphi}{dx \cdot dt}\right]^{\frac{1}{n}} \rho^{\frac{1}{n}} = \Phi \rho^{\frac{1}{n}}, \tag{а}$$

где

$$\Phi = \left[\frac{1}{k} \frac{d^2\varphi}{dx \cdot dt}\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{б}$$

Условие равенства друг другу моментов внешних сил (крутящего момента) и моментов внутренних сил упругости относительно оси вала запишется так:

$$M_к = \int_F \tau \cdot \rho dF = \int_0^r 2\pi\rho\,\tau\rho\, d\rho = 2\pi\Phi \int_0^r \rho^{2+\frac{1}{n}} d\rho,$$

где r — радиус вала.

Обозначая

$$2\pi \int_0^r \rho^{2+\frac{1}{n}} d\rho = \frac{2\pi n}{3n+1} r^{\frac{3n+1}{n}} = J_{\rho п},$$

можем написать

$$\Phi = \frac{M_к}{J_{\rho п}} \tag{в}$$

и, с учётом (а),

$$\tau = \frac{M_к}{J_{\rho п}} \rho^{\frac{1}{n}}.$$

Таким образом, распределение касательных напряжений по сечению вала при ползучести уже не следует линейному закону.

Подставляя в выражение для $J_{\rho п}$ значения $r = 1,2$ *см* и $n = 5$, получаем:

$$J_{\rho п} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 5}{3 \cdot 5 + 1} \cdot 1,2^{\frac{3 \cdot 5 + 1}{5}} = 1,964 \cdot 1,2^{3,2} = 3,52 \ см^{3,2}.$$

Касательное напряжение на расстоянии ρ от оси вала равно:

$$\tau = \frac{M_к}{J_{\rho п}} \rho^{\frac{1}{n}} = \frac{2000}{3,52} \rho^{\frac{1}{5}} = 568 \rho^{\frac{1}{5}}.$$

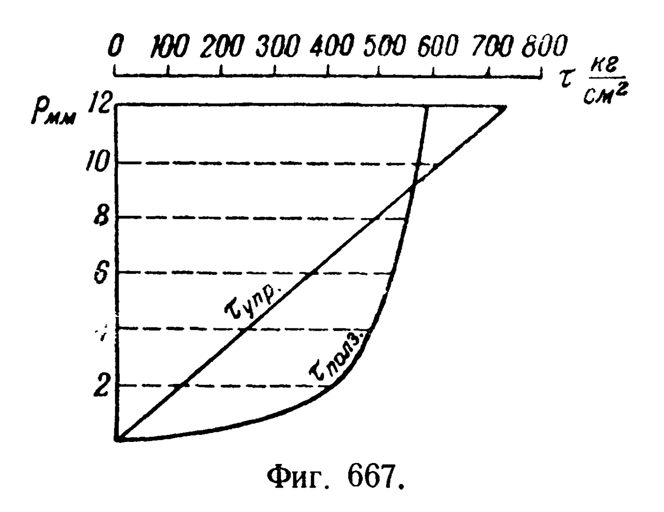
В таблице 46 приведены значения τ, соответствующие различным значениям ρ. В этой же таблице даны и значения τ при упругой деформации вала, вычисленные по формуле:

$$\tau = \frac{M_к \cdot \rho}{J_p} = \frac{2M_к \rho}{\pi r^4} = \frac{2 \cdot 2000}{3,14 \cdot 1,2^4} \rho = 614 \rho.$$

Благодаря ползучести напряжения по поперечному сечению вала выравниваются; у поверхности вала они несколько снижаются, а у оси его значительно увеличиваются (фиг. 667).

Таблица 46. **Значения τ.**

ρ *мм*	$\tau_{упр}$ *кг/см²*	$\tau_{полз}$ *кг/см²*
12	737	589
10	614	568
8	492	543
6	369	513
4	246	473
2	123	411
0	0	0



Фиг. 667.

Определим угол закручивания вала на единицу длины. На основании (б) и (в) можем написать:

$$\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} = k\Phi^n = k\left(\frac{M_к}{J_{\rho п}}\right)^n.$$

Интегрируя это уравнение по t, находим

$$\frac{d\varphi}{dx} = k\left(\frac{M_к}{J_{\rho п}}\right)^n t + C.$$

Так как при $t = 0 \ \frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{упр} = \frac{M_к}{GJ_p}$, то $C = \frac{M_к}{GJ_p}$ и

$$d\varphi = \left[\frac{M_к}{GJ_p} + kt\left(\frac{M_к}{J_{\rho п}}\right)^n\right] dx.$$

Интегрируя и полагая $x = 1$ *см*, получаем:

$$\varphi_1 = \frac{M_к}{GJ_p} + kt\left(\frac{M_к}{J_{pп}}\right)^n.$$

При данных задачи

$$\varphi_1 = \frac{2000 \cdot 2}{6 \cdot 10^5 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}2^4} + 2{,}5 \cdot 10^{-19} \cdot \left(\frac{2000}{3{,}52}\right)^5 \cdot 1000 =$$
$$= 0{,}00102 + 0{,}01480 = 0{,}0158\ \frac{рад}{см}.$$

Замечаем, что угол закручивания вала при ползучести увеличился почти в 16 раз по сравнению с углом закручивания при упругой деформации (первый член последнего результата). Таким образом, значительное снижение наибольшего касательного напряжения в вале отнюдь не свидетельствует о том, что условия работы его при ползучести улучшаются.

Пример 148. Балка, имеющая длину 50 *см*, шарнирно опёртая по концам и нагружённая посредине пролёта сосредоточенной силой $P = 400$ *кг*, работает при температуре $T = 500°$. Материал балки — углеродистая сталь с модулем упругости $E = 1{,}6 \cdot 10^6$ *кг/см²* (при $T = 500°$). Скорость установившейся ползучести $v_п = k\sigma^n$, причём при $T = 500°$

$$k = 1{,}5 \cdot 10^{-15}\left(\frac{см^2}{кг}\right)^n \cdot \frac{1}{час} \quad и \quad n = 3.$$

Пренебрегая стадией неустановившейся ползучести, найти распределение нормальных напряжений в опасном сечении балки и определить наибольший прогиб её через 10 000 часов после нагружения. Исследовать два варианта поперечного сечения балки: прямоугольное и двутавровое (см. фиг. 668).



Фиг. 668.

Решение. При решении задачи будем пренебрегать влиянием касательных напряжений и предположим, что гипотеза плоских сечений при изгибе остаётся справедливой и при ползучести (это предположение довольно хорошо согласуется с опытными данными). Считая, что в растянутой и сжатой зоне балки деформации волокон нарастают по одному и тому же закону, для относительной деформации волокна, расположенного на расстоянии y от нейтрального слоя, можем написать известное выражение (§ 78): $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$, где ρ — радиус кривизны нейтрального слоя балки.

После нагружения балки деформации волокон её вследствие ползучести материала начнут постепенно увеличиваться; кривизна нейтрального слоя также будет увеличиваться. При этом полная деформация какого-либо волокна представится суммой относительной упругой деформации и относительной деформации ползучести, т. е. $\varepsilon = \varepsilon_у + \varepsilon_п$. Скорость изменения полной деформации будет равна:

$$v = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_у}{dt} + \frac{d\varepsilon_п}{dt} = v_у + v_п = y \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Так же, как и в предыдущем примере, для упрощения решения пренебрежём скоростью упругой деформации. (Более точное решение этой задачи с учётом

того, что $v_y \neq 0$ см., например, Малинин Н. Н., Основы расчётов на ползучесть, 1948 г.)

Пренебрегая, кроме того, стадией неустановившейся ползучести и полагая, что $v_п = k\sigma^n$, получим

$$v \approx v_п = k\sigma^n = y \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

откуда

$$\sigma = \left[\frac{1}{k}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} = \Phi y^{\frac{1}{n}}, \tag{а}$$

где

$$\Phi = \left|\frac{1}{k}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right|^{\frac{1}{n}}. \tag{б}$$

Условие равенства друг другу моментов внешних сил (изгибающего момента) и внутренних сил упругости относительно нейтральной оси запишется так:

$$M = \int_F \sigma \cdot y \cdot dF = 2\Phi \int_{F^1/_2} y^{1+\frac{1}{n}} dF.$$

Вводя обозначение

$$2\int_{F^1/_2} y^{1+\frac{1}{n}} dF = J_{zп},$$

получаем

$$\Phi = \frac{M}{J_{zп}} \tag{в}$$

и, с учётом (а),

$$\sigma = \frac{M}{J_{zп}} y^{\frac{1}{n}}.$$

Замечаем, что распределение нормальных напряжений по высоте сечения балки при ползучести уже не следует линейному закону.

В случае прямоугольного сечения

$$J_{zп} = 2\int_{F^1/_2} y^{1+\frac{1}{n}} dF = 2\int_0^{\frac{h}{2}} y^{1+\frac{1}{n}} b\,dy = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n}}}\,\frac{n}{2n+1}\cdot b\cdot h^{\frac{2n+1}{n}},$$

а в случае двутаврового сечения (фиг. 668):

$$J_{zп} = 2\left[\int_0^{\frac{h}{2}-t} y^{1+\frac{1}{n}}\cdot b_1 dy + \int_{\frac{h}{2}-t}^{\frac{h}{2}} y^{1+\frac{1}{n}} b\,dy\right] =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n}}}\cdot\frac{n}{2n+1}\left[bh^{\frac{2n+1}{n}} - (b-b_1)(h-2t)^{\frac{2n+1}{n}}\right].$$

Подставляя в формулы для $J_{z\text{п}}$ данные задачи, получаем для прямоугольника

$$J_{z\text{п}} = \frac{3}{2^{\frac{3+1}{3}}(2\cdot 3+1)}\cdot 2\cdot 4^{\frac{2\cdot 3+1}{3}} = \frac{3\cdot 2\cdot 4^{\frac{7}{3}}}{7\cdot 2^{\frac{4}{3}}} = 8{,}64\ \text{см}^{\frac{10}{3}},$$

а для двутавра

$$J_{z\text{п}} = \frac{3}{2^{\frac{3+1}{3}}(2\cdot 3+1)}\times\left[2\cdot 5{,}6^{\frac{2\cdot 3+1}{3}} - (2{,}8-0{,}3)(5{,}6-2\cdot 0{,}3)^{\frac{2\cdot 3+1}{3}}\right] = 8{,}34\ \text{см}^{\frac{10}{3}}.$$

Наибольший изгибающий момент равен:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} = \frac{400\cdot 50}{4} = 5000\ \text{кгсм}.$$

Нормальные напряжения в балке прямоугольного сечения должны быть вычислены по формуле:

$$\sigma = \frac{M}{J_{z\text{п}}}y^{\frac{1}{n}} = \frac{5000}{8{,}64}y^{\frac{1}{3}} = 579y^{\frac{1}{3}},$$

а в балке двутаврового сечения — по формуле:

$$\sigma = \frac{M}{J_{z\text{п}}}y^{\frac{1}{n}} = \frac{5000}{8{,}34}y^{\frac{1}{3}} = 599y^{\frac{1}{3}}.$$

Вычисленные по этим формулам значения нормальных напряжений на различных расстояниях y от нейтрального слоя приведены в таблице 47. Для сравнения в той же таблице помещены данные о распределении нормальных напряжений при упругой деформации.

Таблица 47. **Нормальные напряжения.**

σ $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ / y мм	Прямоугольн. сечение		Двутавровое сечение	
	упругая деформация	ползучесть	упругая деформация	ползучесть
28	—	—	938	844
24	—	—	804	802
20	938	729	670	754
16	750	677	536	700
12	563	615	402	636
8	375	537	268	556
4	188	426	134	441
2	94	339	67	351
0	0	0	0	0

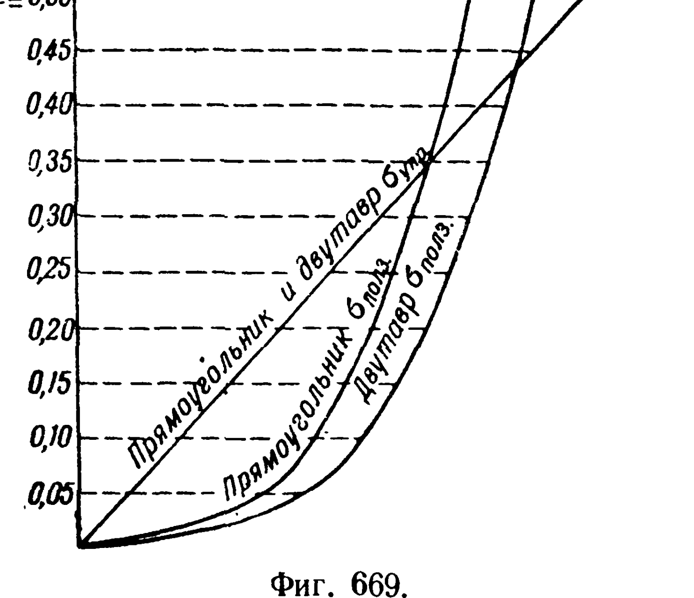
Благодаря ползучести нормальные напряжения по поперечному сечению балки выравниваются; в наиболее удалённых от нейтрального слоя волокнах они снижаются, а у нейтрального слоя увеличиваются (фиг. 699). При этом в балке прямоугольного сечения снижение наибольших напряжений заметнее, чем в балке двутаврового сечения, так как у последней вблизи от нейтрального слоя расположено сравнительно немного материала.

Определим прогиб балки. Принимая для кривизны оси балки приближённое выражение $\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y}{dx^2}$, можем написать $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Так как по (б) и (в):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=k\Phi^n=k\frac{M^n}{J^n_{z\text{п}}},$$

то

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)=k\frac{M^n}{J^n_{z\text{п}}}.$$



Фиг. 669.

В случае балки на двух опорах (фиг. 670) $M=\frac{P}{2}x$ и

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)=k\frac{P^nx^n}{J^n_{z\text{п}}\cdot 2^n}=Rx^n, \quad \text{(г)}$$

где

$$R=\frac{kP^n}{2^nJ^n_{z\text{п}}}.$$

Фиг. 670.

Интегрируя уравнение (г) по x, получаем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{R}{n+1}x^{n+1}+C$$

и

$$\frac{dy}{dt}=\frac{R}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}+Cx+D,$$

где C и D — постоянные интегрирования. Так как при любых значениях t $y=0$ при $x=0$ и $\frac{dy}{dt}=0$ при $x=\frac{l}{2}$, то и $\frac{dy}{dt}=0$ при $x=0$ и $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=$ $=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$ при $x=\frac{l}{2}$.

Поэтому

$$C=-\frac{Rl^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}} \quad \text{и} \quad D=0.$$

Наибольший прогиб балки будет в сечении, где $x=\frac{l}{2}$; имеем:

$$\frac{dy}{dt}\max=\frac{-Rl^{n+2}}{2^{n+2}(n+2)}=\frac{-kP^nl^{n+2}}{(n+2)\,2^{2(n+1)}J^n_{z\text{п}}}.$$

Интегрируя по t, находим:

$$y_{\max} = -\frac{kP^n l^{n+2}}{(n+2)\,2^{2(n+1)}\,J^n_{z\text{п}}}\,t + H,$$

где H — постоянная интегрирования. Так как при $t = 0$

$$y_{\max} = (y_{\max})_{\text{упр}} = \frac{-Pl^3}{48EJ_z}, \quad \text{то} \quad H = (y_{\max})_{\text{упр}} = -\frac{Pl^3}{48EJ_z}.$$

Таким образом, наибольший прогиб балки при ползучести равен:

$$y_{\max} = -\frac{Pl^3}{48EJ_z} - \frac{kP^n l^{n+2}}{(n+2)\,2^{2\,(n+1)}\,J^n_{z\text{п}}}\,t.$$

Для некоторых балок, иначе нагружённых и закреплённых, формулы для вычисления $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\max}$ приведены на фиг. 671. Учащимся предлагается самим выполнить вывод этих формул (заметим, что принцип независимости действия сил в этом случае неприменим). Для балки прямоугольного сечения

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = 10{,}67\ см^4$$

и

$$|y_{\max}| = \frac{400 \cdot 50^3}{48 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 \cdot 10{,}67} + \frac{1{,}5 \cdot 10^{-15} \cdot 400^3 \cdot 50^{3+2}}{8{,}64^3\,(3+2) \cdot 2^{2\,(3+1)}} \cdot 10\,000 = 0{,}0611 + 0{,}3634 = 0{,}425\ см.$$

Для балки двутаврового сечения

$$J_z = \frac{bh^3 - (b - b_1)(h - 2t)^3}{12} = \frac{2 \cdot 5{,}6^3 - 2{,}5 \cdot 5^3}{12} = 14{,}94\ см^4$$

и

$$|y_{\max}| = \frac{400 \cdot 50^3}{48 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 \cdot 14{,}94} + \frac{1{,}5 \cdot 10^{-15} \cdot 400^3 \cdot 50^{3+2} \cdot 10\,000}{8{,}34^3 \cdot (3+2) \cdot 2^{2\,(3+1)}} = 0{,}0436 + 0{,}4034 = 0{,}447\ см.$$

Схемы балок	$\frac{dy}{dt}_{max} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_A = \frac{k}{J^n_{zn}}\varphi$; $\varphi =$
M_0, A, l	$\frac{M_0^n l^2}{2}$
M_0, A, M_0, $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$	$\frac{M_0^n l^2}{8}$
P, A, l	$\frac{P^n l^{n+2}}{n+2}$
P, A, $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$	$\frac{P^n l^{n+2}}{2^{2(n+1)}(n+2)}$
q, A, l	$\frac{q^n l^{2(n+1)}}{2(n+1)}$

Фиг. 671.

Замечаем, что прогиб двутавровой балки при упругой деформации примерно в полтора раза меньше, чем прогиб балки прямоугольного сечения; при ползучести же он несколько больше прогиба балки прямоугольного сечения. Таким образом, снижение наибольших нормальных напряжений в балках при ползучести отнюдь не означает, что условия работы балок улуч-

шаются. Наибольшая допускаемая нагрузка на балку при ползучести должна определяться в зависимости от величины допускаемой деформации балки.

Если, например, наибольший прогиб балки прямоугольного сечения через 10 000 часов её работы не должен превышать $\frac{1}{500}$ её длины, т. е. 0,1 *см*, то наибольшая допускаемая нагрузка должна быть определена из условия:

$$\frac{Pl^3}{48EJ_z} + \frac{kP^n l^{n+2}}{(n+2)\, 2^{2(n+1)} J_{z\text{п}}^n}\, t \leqslant [f].$$

Подставляя числовые данные, имеем:

$$\frac{50^3 \cdot 3P}{3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6} + \frac{1{,}5 \cdot 10^{-15} \cdot 50^5}{5 \cdot 8{,}64^3 \cdot 2^8}\, 10\,000 \cdot P^3 \leqslant 0{,}1,$$

или

$$P + 0{,}2326 P^3 \cdot 10^{-5} \leqslant 40{,}96,$$

откуда

$$P \leqslant 40{,}8 \text{ кг} \approx 40 \text{ кг}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ I.

Механические характеристики некоторых сталей (по ГОСТ).

Наименование	Марка	Основной химический состав	Предел текучести σ_T *кг/мм²*	Предел прочности σ_B *кг/мм²*	Относительное удлинение % $l = 10d$	Относительное удлинение % $l = 5d$	Относительное сужение % ψ	Число твёрдости по Бринелю	Удельная ударная вязкость $\frac{кг \cdot м}{см^2}$	Область применения
Сталь углеродистая обыкновенного качества горячекатаная	Ст-ОС	C = 0,14—0,23	19	32—47	18	—	—	—	—	Строит. констр.
	Ст. 2	C = 0,09—0,15; Mn = 0,30—0,50	24	34—42	26	—	—	—	—	» »
	Ст. 3	C = 0,12—0,22; Mn = 0,35—0,55; Si = 0,12—0,30	22	38—47	21	—	—	—	—	Основная для строит. констр.
	Ст. 4	C = 0,18—0,27; Mn = 0,40—0,60; Si = 0,12—0,30	24	42—52	21—19	25—23	—	—	—	Машины
	Ст. 5	C = 0,28—0,37; Mn = 0,45—0,70; Si = 0,15—0,30	27	50—62	17—15	21—19	—	—	—	Валы, оси
	Ст. 6	C = 0,38—0,50; Mn = 0,45—0,70; Si = 0,15—0,30	30	60—72	13—11	15—13	—	—	—	» »
Для заклёпок	Ст. 2	—	—	34—42	26	—	—	—	—	Заклёпки
» »	Ст. 3	—	—	38—47	22	—	—	—	—	»
Осевая вагонная . . .	—	C = 0,30—0,48; Mn = 0,50—0,90; Si = 0,15—0,35	—	52—62	—	23	—	—	6—3,5	Оси ж.-д. вагонов
Осевая локомотивная	—	C = 0,35—0,45;	—	55—58	—	23	—	—	7	Оси ж.-д. локо-

		Mn = 0,50—0,80; Si = 0,15—0,35; Cr = 0,3; Ni = 0,5								мотивов
Рельсовая (IA)	—	C = 0,53 Mn = 0,60—0,90; Si = 0,15—0,30	—	70	—	—	—	—	—	Рельсы ж.-д.
Котельная	СТ.3-К	C = 0,12—0,22	—	38—44	24—21	—	—	—	7—6	Паровозные котлы
Мостовая	Ст.3 мост.									
листовая		S не более 0,05	23	38—45	22	26	—	—	8	Мосты
фасонная		P » » 0,045	23	38—45	24	28	—	—	10	»
Сталь углеродистая качественная . . .	08	C = 0,05—0,12; Mn = 0,25—0,50;	18	32	—	33	60	131	—	Детали кузова автомобиля
	20	C = 0,15—0,25; Mn = 0,35—0,65 Si = 0,17—0,37	24	40	—	25	55	156	—	Оси, валы, винты, гайки
	40	C = 0,35—0,45; Mn = 0,50—0,80; Si = 0,17—0,37;	32	57	—	17	45	217	—	Шатуны, шестерни, шпонки, фланцы
	60	C = 0,55—0,65; Mn = 0,50—0,80; Si = 0,17—0,37;	37	65	—	10	35	255	—	Оси, шпиндели, пружины
Сталь легированная										
Марганцовистая . . .	20Г	C = 0,15—0,25 Mn = 0,70—1,00; Si = 0,17—0,37	25	43	—	22	50	197	8	Авиастроение
Халиловская	СХЛ	C = 0,18; Mn = 0,45—0,75; Cr = 0,5—0,8; Cu = 0,4—0,6; Ni = 0,8;	35	50—62	—	20	—	—	10	Корпус корабля
Хромистая	20Х	C = 0,15—0,25; Mn = 0,30—0,60; Si = 0,17—0,37; Cr = 0,70—1,00	60	80	—	12	50	241	—	Автотракторные детали
Хромоникелевая	20ХН	C = 0,15—0,25; Cr = 0,45—0,75; Ni = 1,0 —1,5	60	80	—	10	50	—	—	Крупные автотракторные детали

ПРИЛОЖЕНИЕ I (продолжение).

Наименование	Марка	Основной химический состав	Предел текучести σ_T *кг/мм²*	Предел прочности σ_B *кг/мм²*	Относительное удлинение % $l = 10d$	Относительное удлинение % $l = 5d$	Относительное сужение % ψ	Число твёрдости по Бринелю	Удельная ударная вязкость $\frac{кг \cdot м}{см^2}$	Область применения
Хромоникельмолибденовая	40ХНМА	C = 0,35—0,45; Ni = 1,25—1,75 Cr = 0,6—0,9; Mo = 0,2—0,4	85	100	—	10	45	—	8	Ответствен. детали крупных размеров
Хромоникельвольфрамовая	25ХНВА	C = 0,20—0,30; Ni = 4,0—4,6; Cr = 1,3—1,7; W = 0,8—1,2	95	100	—	10	50	—	9	Высоконагружённые коленчатые валы
Кремнистая пружинная	50С2	C = 0,45—0,55; Mn = 0,6—1,2; Si = 1,2—1,8	120	130	—	6	30	—	—	Пружинные рессоры
Кремнехромомарганцовистая	30ХГСА	C = 0,28—0,35; Cr = 0,8—0,11; Mn = 0,8—1,1; Si = 0,9—1,2;	130	155	—	7	40	—	4,5	Высокотвёрдые детали
Азотируемая	38ХМЮА	C = 0,38—0,45; Cr = 1,35—1,65; Al = 0,7—1,1; Mo = 0,15—0,60	85	100	—	13	50	—	9	Высокоответственные азотируемые детали

Примечание. Более подробные сведения в специальных справочниках и курсах (Конструкционные стали, справочник под ред. акад. Гудцова, М. 1947; Г. А. Кащенко, Основы металловедения, Л—М, 1950 и др.).

ПРИЛОЖЕНИЕ II.

Механические характеристики углеродистых и конструкционных сталей при переменных нагрузках [1])

№№ п/п	Марка стали	Химический состав	Термообработка	$\sigma_T^о$ кг/мм²	$\sigma_T^и$ кг/мм²	$\tau_T^к$ кг/мм²	$\sigma_в$ кг/мм²	$\sigma_{-1}^и$ кг/мм²	$\sigma_{-1}^с$ кг/мм²	$\tau_{-1}^к$ кг/мм²
1	10	C = 0,05—0,15; Si = 0,3; Mn = 0,35—0,65; S + P = 0,08; Ni ⩽ 0,3; Cr ⩽ 0,2	Нормализация	48*)	26	14	32—42	16—22	12—15	8—12
2	20	C = 0,15—0,25; Si = 0,17—0,37; Mn = 0,35—0,65; S + P = 0,08; Ni ⩽ 0,3; Cr ⩽ 0,2	Нормализация	22*)	30	16	40—50	17—22	12—16	10—13
3	30	C = 0,25—0,35; Si = 0,17—0,37 Mn = 0,5—0,8; S + P = 0,08; Ni ⩽ 0,3 Cr ⩽ 0,2	Нормализация	26*)	37	17	48—60	20—27	17—21	11—12
4	45	C = 0,40—0,50; Si = 0,17—0,37; Mn = 0,5—0,8	Нормализация	32*)	43	22	60—75	25—34	19—25	15—20
5	40ХН	C = 0,35—0,45; Si = 0,17—0,37; Mn = 0,5—0,8; S + P = 0,08; Ni = 1,0—1,5; Cr = 0,5—0,8	Закалка 830—840° в масле; отпуск 500—550°	75	83	39	90	40	29	24
6	12ХН3А	C < 0,17; Si = 0,17—0,37;	Закалка 860° в масле; отпуск 560°	70*)	72	40	95	39—47	27—32	22—26

№№ п/п	Марка стали	Химический состав	Термообработка	σ_T^o кг/мм²	$\sigma_T^и$ кг/мм²	$\tau_T^к$ кг/мм²	$\sigma_в$ кг/мм²	$\sigma_{-1}^и$ кг/мм²	σ_{-1}^o кг/мм²	$\tau_{-1}^к$ кг/мм²
		Mn = 0,25—0,55; S + P = 0,06; Ni = 2,75—3,25; Cr = 0,6—0,9								
7	18 ХНВА	C = 0,15—0,22; Si = 0,17—0,37; Mn = 0,25—0,55; S + P = 0,06; Ni = 4,1—4,6; Cr = 1,35—1,65 W = 0,8—1,2; или Mo = 0,25—0,45;	Закалка 950°, затем 850° в масле; отпуск 200°	85*)	—	—	115*)	54—59	36—40	33—36
8	25 ХНВА	C = 0,2—0,3; Si = 0,17—0,37; Mn = 0,25—0,55; S + P = 0,06; Ni = 4,1—4,6; Cr = 1,35—1,65; W = 0,5—1,2	Закалка 850°, отпуск 560° в масле	95	105	60	110	46—54	31—36	28—31
9	30 ХМА	C = 0,25—0,36; Si = 0,17—0,37; Mn = 0,4—0,09; S + P = 0,06; Ni ⩽ 0,3; Cr = 0,8—1,1; Mo = 0,15—0,25;	Закалка 880° в масле; отпуск 200°	75	—	—	95	47	—	—
10	ГУТАП 5140	C = 0,35—0,45; Si = 0,2—0,35; Mn = 0,5—0,8; S + P = 0,08; Cr = 0,8—1,1	Закалка 850—830° в масле; отпуск 500—650°	75	—	—	90—100	38—45	27—30	22—26

[1]) Данные таблицы заимствованы из книги Серенсен С. В., Тетельбаум И. М. и Пригоровский Н. И., «Динамическая прочность в машиностроении».

*) Указаны нижние пределы значений.

ПРИЛОЖЕНИЕ III.

Механические свойства отливок из углеродистой стали и серого чугуна.

Наименование отливок	Марки отливок	Предел прочности при растяжении	Предел прочности при сжатии	Предел прочности при изгибе	Стрела прогиба стандартного образца при расстоянии между опорами 600 *мм*	Стрела прогиба стандартного образца при расстоянии между опорами 300 *мм*	Относительное удлинение образца с 5-кратной расчётной длиной %, не менее
		*кг/мм*², не менее			*мм*		
Отливки фасонные из углеродистой стали (ГОСТ 977-41)	15—4020	40	—	—	—	—	20
	35—5015	50	—	—	—	—	15
Отливки из серого чугуна (ГОСТ В-1412-42)	СЧ-12-28	12	50	28	6	2	—
	СЧ-15-32	15	60	32	7	2	—
	СЧ-18-36	18	67	36	8	2	—
	СЧ-21-40	21	75	40	8	2	—

ПРИЛОЖЕНИЕ IV.

Механические свойства сварных соединений и наплавленного металла.

Вид сварки	Сварное соединение встык: предел прочности при растяжении *кг/мм*², не менее	Сварное соединение встык: угол загиба (по ОСТ НКТП 7687/663) градусы	Сварное соединение встык: ударная вязкость *кгм/см*², не менее	Наплавленный металл: предел прочности при растяжении *кг/мм*², не менее	Наплавленный металл: относительное удлинение %, не менее	Марка электрода (по ГОСТ 2523-44)
Ручная, тонкообмазанными электродами	34	30	—	30	6	Э34
Ручная, толстообмазанными электродами и автоматическая под слоем флюса	42	120	8	42	18	Э42

ПРИЛОЖЕНИЕ V.

Механические характеристики некоторых цветных металлов (по ОСТ).

Наименование	Марка	Основной химический состав		Предел текучести σ_T кг/мм²	Предел прочности σ_B кг/мм²	Относительное удлинение %	Число твёрдости по Бринелю	Область применения
Медные сплавы								
Латунь	Л-68	Zn = 23—30	Остальное — Cu	—	30—60	1—45	—	Трубы, проволока, листы
Латунь алюминиевая	ЛА-77-2	Zn = 18—27; Al = 1,75—2,5		—	38	23	—	Трубы
Латунь марганцовистая	ЛМц-58-2	Zn = 36—39; Mn = 1,0—2,0		—	39—60	3—30	—	Прутки, листы
Латунь свинцовистая	ЛС-59-1В	Zn = 36—39; Pb = 0,8—1,9		—	35—60	0,5—30	—	Прутки
Бронзы								
Оловянистые	Бр О-10	Sn = 9—11		—	20	2	80	Ответственная арматура
»	Бр ОЦ-8-4	Sn = 7—9; Zn = 4—6		—	20	4	75	Менее ответств. отливки
»	Бр ОЦС-6-6-3	Sn = 5—7; Zn = 5—7; Pb = 2—4;		—	18	4	60	Арматура, втулки
»	Бр ОФ-10-1	Sn = 9—11; P = 0,8		—	26	3	120	Шестерни, подшипники
Алюминиевые	Бр А-5	Al = 5		—	60	3,5	—	Ленты твёрдые
»	Бр АМц-9-2	Al = 9; Mn = 2		—	50	15	—	Прутки твёрдые
»	БрАЖМц-10-3-1,5	Al = 10; Fe = 3; Mn = 1,5		—	60	12	120	Прутки и трубы

ПРИЛОЖЕНИЕ V (продолжение).

Наименование	Марка	Основной химический состав		Предел текучести σ_T $кг/мм^2$	Предел прочности σ_B $кг/мм^2$	Относительное удлинение %	Число твёрдости по Бринелю	Область применения
Алюминиевые	Бр АЖС-7-1,5-1,5	Al = 7; Fe = 1,5 Pb = 1,5	Остальное — Cu	—	30	18	—	Литьё
Свинцовистая	Бр ОС-5-25	Pb = 23—27; Sn = 4—6		—	12	4	—	Втулки и подшипники паровозов
Кремнистая	Бр К-3	Si = 3		—	25	10—20	—	Литьё
Алюминиевые сплавы								
Нормальный дуралюмин	Д1	Cu = 3,8—4,8; Mn = 0,4—0,8; Mg = 0,4—0,8; Fe = 0,8; Si = 0,8	Остальное — Al	5—25	18—42	15—22	50—100	Трубы, перессов. профили
Плакируемый дуралюмин	Д17	Cu = 3,5—4,5; Mn = 0,4—0,8; Mg = 0,4—0,8; Si = 0,8; Fe = 0,8		10—24	22—42	18	50—100	Листы, профили
Дуралюмин повышенной прочности	Д6	Cu = 4,6—5,2; Mn = 0,6—0,2; Mg = 0,65—1,0; Fe = 0,7; Si = 0,7		5—38	18—50	8—20	50—125	Трубы, профили

ПРИЛОЖЕНИЕ V (продолжение).

Наименование	Марка	Основной химический состав		Предел текучести $\sigma_т$ *кг/мм²*	Предел прочности $\sigma_в$ *кг/мм²*	Относительное удлинение %	Число твёрдости по Бринелю	Область применения
Алюмино-магниевый сплав	АМг	Cu = 0,2; Mn = 0,15—0,4; Mg = 2,0—2,8; Fe = 0,5 Si = 0,5	Остальное — Al	10—21	18—25	6—23	45—60	Трубы, листы
Алюмин.-марганцов. сплав	АМц	Cu = 0,2; Mn = 1,0—1,6; Mg = 0,05; Fe = 0,8; Si = 0,8	Остальное — Al	5—18	11—22	5—20	10—55	Листы, прутки
Магниевые сплавы . .	МАО	Al = 0,2—0,5; Mn = 0,5—1,0; Zn = 0,1—0,3	Остальное — Mg	—	18	5	40	Прутки
	МА1	Mn = 1,4—2,1	Остальное — Mg	—	20	7	—	Листы
	МА3	Al = 5,5—7,0; Mn = 0,2—0,5; Zn = 0,8—1,2; Be = 0,01—0,03; Ti = 0,2—0,4	Остальное — Mg	—	28	12	60	Прутки

Примечание. Более подробные сведения в специальных справочниках и курсах (Туркин и Румянцев, Структура и свойства цветных металлов, М., 1947 и др.).

ПРИЛОЖЕНИЕ VI

Пределы прочности некоторых материалов (в *кг/см*²).

Материал	На растяжение	На сжатие
Чугуны		
Чугун серый обыкновенный	1400 ÷ 1800	6000 ÷ 10 000
Чугун серый мелкозернистый	2100 ÷ 2500	до 14 000
Чугун белый	—	до 17 500
Пластмассы		
Бакелит	200 ÷ 300	800 ÷ 1000
Целлулоид	500 ÷ 700	—
Текстолит	850 ÷ 1000	1300 ÷ 2500
Гетинакс	1500 ÷ 1700	1500 ÷ 1800
Бакелизованная фанера	1300	1150
Дерево (при 15% влажности)		
Сосна: вдоль волокон	800	400
Сосна: поперёк волокон	—	50
Ель: вдоль волокон	650	350
Ель: поперёк волокон	—	40
Дуб: вдоль волокон	950	500
Дуб: поперёк волокон	—	150
Естественные камни (в среднем)		
Гранит	30	1200 ÷ 2600
Диабаз	50	1300 ÷ 2100
Гнейс	—	1400 ÷ 2400
Кварцит	—	1400 ÷ 2600
Песчаник	20	400 ÷ 1500
Известняк	—	500 ÷ 1500
Кирпич	—	74 ÷ 300
Бетон	—	50 ÷ 350
Лёд (в среднем): при малых скоростях нагружения, $t = 0°$	∼ 10	10 ÷ 20
Лёд (в среднем): при малых скоростях нагружения, $t = -12° \div -15°$		57 ÷ 70
Лёд (в среднем): при больших скоростях нагружения, $t = 0°$		5 ÷ 10
Лёд (в среднем): при больших скоростях нагружения, $t = -12° \div -15°$		15 ÷ 48

ПРИЛОЖЕНИЕ VII.

Модули упругости и коэффициент Пуассона.

Наименование материала	Модуль упругости E $кг/см^2$	Модуль упругости G $кг/см^2$	Коэффициент Пуассона μ
Чугун серый, белый	$1,15 \div 1,60 \cdot 10^6$	$4,5 \cdot 10^5$	$0,23 \div 0,27$
Ковкий чугун	$1,55 \cdot 10^6$	—	—
Углеродистые стали	$2,0 \div 2,1 \cdot 10^6$	$8,1 \cdot 10^5$	$0,24 \div 0,28$
Легированные стали	$2,1 \cdot 10^6$	$8,1 \cdot 10^5$	$0,25 \div 0,30$
Стальное литьё	$1,75 \cdot 10^6$	—	—
Медь прокатанная	$1,1 \cdot 10^6$	$4,0 \cdot 10^5$	$0,31 \div 0,34$
Медь холоднотянутая	$1,3 \cdot 10^6$	$4,9 \cdot 10^5$	—
Медь, литьё	$0,84 \cdot 10^6$	—	—
Фосфористая бронза катанная	$1,15 \cdot 10^6$	$4,2 \cdot 10^5$	$0,32 \div 0,35$
Латунь холоднотянутая	$0,91 \div 0,99 \cdot 10^6$	$3,5 \div 3,7 \cdot 10^5$	$0,32 \div 0,42$
Корабельная латунь катанная	$1,0 \cdot 10^6$	—	0,36
Марганцовистая бронза катанная	$1,1 \cdot 10^6$	$4,0 \cdot 10^5$	0,35
Алюминий катанный	$0,69 \cdot 10^6$	$2,6 \div 2,7 \cdot 10^5$	$0,32 \div 0,36$
Алюминиевая проволока тянутая	$0,7 \cdot 10^6$	—	—
Алюминиевая бронза, литьё	$1,05 \cdot 10^6$	$4,2 \cdot 10^5$	—
Дуралюмин катанный	$0,71 \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^5$	—
Цинк катанный	$0,84 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^5$	0,27
Свинец	$0,17 \cdot 10^6$	$0,70 \cdot 10^5$	0,42
Лёд	$0,1 \cdot 10^6$	$0,28 \div 0,3 \cdot 10^5$	—
Стекло	$0,56 \cdot 10^6$	$2,2 \cdot 10^5$	0,25
Гранит	$0,49 \cdot 10^6$	—	—
Известняк	$0,42 \cdot 10^6$	—	—
Мрамор	$0,56 \cdot 10^6$	—	—
Песчаник	$0,18 \cdot 10^6$	—	—
Каменная кладка:			
из гранита	$0,09 \div 0,1 \cdot 10^6$	—	—
известняка	$0,06 \cdot 10^6$	—	—
кирпича	$0,027 \div 0,030 \cdot 10^6$	—	—
Бетон при пределе прочности	—	—	$0,16 \div 0,18$
при 100 $кг/см^2$	$0,196 \div 0,146 \cdot 10^6$	—	—
» 150 »	$0,214 \div 0,164 \cdot 10^6$	—	—
» 200 »	$0,232 \div 0,182 \cdot 10^6$	—	—
Дерево вдоль волокон	$0,1 \div 0,12 \cdot 10^6$	$0,055 \cdot 10^5$	—
» поперёк »	$0,005 \div 0,01 \cdot 10^6$	—	—
Каучук	$0,00008 \cdot 10^6$	—	0,47
Бакелит	$0,02 \div 0,03 \cdot 10^6$	—	—
Текстолит	$0,06 \div 0,1 \cdot 10^6$	—	—
Гетинакс	$0,1 \div 0,17 \cdot 10^6$	—	—

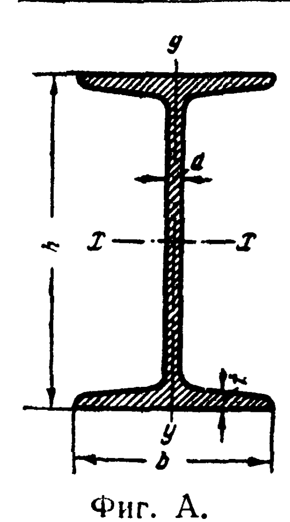
ПРИЛОЖЕНИЕ VIII.

Коэффициент линейного расширения α на 1° С.

Наименование материала	α	Наименование материала	α	Наименование материала	α
Алюминий	$255 \cdot 10^{-7}$	Бронза и латунь . . .	$170 \div 220 \cdot 10^{-7}$	Сталь	$100 \div 130 \cdot 10^{-7}$
Магний	$255 \cdot 10^{-7}$	Бетон	$100 \div 140 \cdot 10^{-7}$	Каменная кладка . . .	$40 \div 70 \cdot 10^{-7}$
Медь	$167 \cdot 10^{-7}$	Лёд	$507 \cdot 10^{-7}$	Дерево	$20 \div 50 \cdot 10^{-7}$

ПРИЛОЖЕНИЕ IX.

Сортамент прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8239 — 56 *, 8240 — 56 *, 8509 — 57, 8510 — 57.



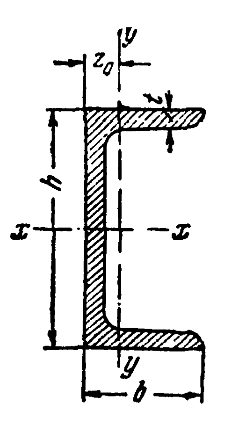
Фиг. А.

Таблица 1. Двутавры.

№ профилей	Вес 1 *пог. м* *кг*	Размеры, *мм*				Площадь сечения *см*²	Справочные величины для осей						
							$x - x$				$y - y$		
		h	b	d	t		J_x, *см*⁴	W_x, *см*³	i_x, *см*	S_x, *см*³	J_y, *см*⁴	W_y, *см*³	i_y, *см*
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55

Таблица 1 (продолжение)

№ профилей	Вес 1 *пог. м* *кг*	Размеры				Площадь сечения $см^2$	Справочные величины для осей						
							$x - x$				$y - y$		
		h	b	d	t		J_x	W_x	i_x	S_x	J_y	W_y	i_y
		мм					$см^4$	$см^3$	*см*	$см^3$	$см^4$	$см^3$	*см*
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	56,1	400	155	8,0	13,0	71,4	18930	947	16,3	540	666	85,9	3,05
45	65,2	450	160	8,6	14,2	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	76,8	500	170	9,5	15,2	97,8	39290	1570	20,0	905	1040	122	3,26
55	89,8	550	180	10,3	16,5	114	55150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44
60	104	600	190	11,1	17,8	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60
65	120	650	200	12,0	19,2	153	101400	3121	25,8	1800	2170	217	3,77
70	138	700	210	13,0	20,8	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94
70a	158	700	210	15,0	24,0	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01
70б	184	700	210	17,5	28,2	234	175370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09



Фиг. Б.

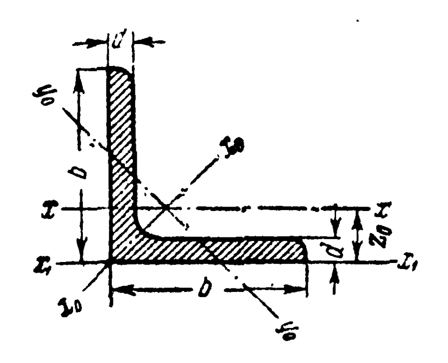


Таблица 2. **Швеллеры.**

№ профилей	Вес 1 пог. м	Размеры				Площадь сечения	Справочные величины для осей							z_0
							x — x				y — y			
		h	b	d	t		J_x	W_x	i_x	S_x	J_y	W_y	i_y	
	кг	мм				$см^2$	$см^4$	$см^3$	см	$см^3$	$см^4$	$см^3$	см	см
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67

Таблица 2 (продолжение)

№ профилей	Вес 1 *пог. м*	Размеры				Площадь сечения	Справочные величины для осей							z_0
							$x - x$				$y - y$			
		h	b	d	t		J_x	W_x	i_x	S_x	J_y	W_y	i_y	
	кг	*мм*				$см^2$	$см^4$	$см^3$	*см*	$см^3$	$см^4$	$см^3$	*см*	*см*
14а	13,3	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16а	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20а	19,8	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22а	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24а	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75



Фиг. В.

Таблица 3. **Угольники равнобокие.**

№ профилей	Размеры		Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Справочные величины для осей							
					$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$	z_0
	b	d			J_x	i_x	J_{x_0} макс	i_{x_0} макс	J_{y_0} мин	i_{y_0} мин	J_{x_1}	
	мм		см²	кг	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см
2	20	3 4	1,13 1,46	0,89 1,15	0,40 0,50	0,59 0,58	0,63 0,78	0,75 0,73	0,17 0,22	0,39 0,38	0,81 1,09	0,60 0,64
2,5	25	3 4	1,43 1,86	1,12 1,46	0,81 1,03	0,75 0,74	1,29 1,62	0,95 0,93	0,34 0,44	0,49 0,48	1,57 2,11	0,73 0,76
2,8	28	3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3 4	1,86 2,43	1,46 1,91	1,77 2,26	0,97 0,96	2,80 3,58	1,23 1,21	0,74 0,94	0,63 0,62	3,26 4,39	0,89 0,94

Таблица 3 (продолжение)

№ профилей	Размеры		Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Справочные величины для осей							
	b	d			$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$	z_0
					J_x	i_x	$J_{x_0\,макс}$	$i_{x_0\,макс}$	$J_{y_0\,мин}$	$i_{y_0\,мин}$	J_{x_1}	
	мм		*см*²	*кг*	*см*⁴	*см*	*см*⁴	*см*	*см*⁴	*см*	*см*⁴	*см*
3,6	36	3	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4	2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5	3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02

Таблица 3 (продолжение)

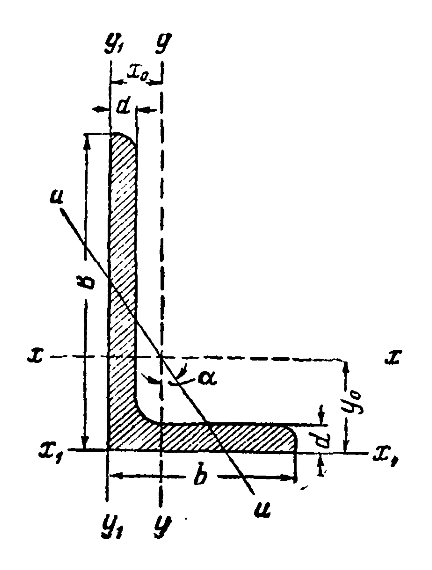
№ профилей	Размеры		Площадь профиля	Вес 1 *пог. м*	Справочные величины для осей							
					$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$	z_0
	b	d			J_x	i_x	$J_{x_0\ макс}$	$i_{x_0\ макс}$	$J_{y_0\ мин}$	$i_{y_0\ мин}$	J_{x_1}	
	мм		*см*^{2}	*кг*	*см*^{4}	*см*	*см*^{4}	*см*	*см*^{4}	*см*	*см*^{4}	*см*
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00

Таблица 3 (продолжение)

№ профилей	Размеры		Площадь профиля	Вес 1 *пог. м*	Справочные величины для осей							
					$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$	z_0
	b	d			J_x	i_x	J_{x_0} *макс*	i_{x_0} *макс*	J_{y_0} *мин*	i_{y_0} *мин*	J_{x_1}	
	мм		*см*²	*кг*	*см*⁴	*см*	*см*⁴	*см*	*см*⁴	*см*	*см*⁴	*см*
12,5	125	8	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89

Таблица 3 (продолжение)

№ профилей	Размеры		Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Справочные величины для осей							
					$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$	z_0
	b	d			J_x	i_x	$J_{x_0\ макс}$	$i_{x_0\ макс}$	$J_{y_0\ мин}$	$i_{y_0\ мин}$	J_{x_1}	
	мм		см²	кг	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см
20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30	111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16	68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18	87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2597	4,93	11464	7,00
		25	119,7	94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28	133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30	142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31



Фиг. Г.

Таблица 4. **Угольники неравнобокие.**

№ профилей	Размеры			Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Справочные величины для осей										
						$x-x$		$y-y$		x_1-x_1		y_1-y_1		$u-u$		
	B	b	d			J_x	i_x	J_y	i_y	J_{x_1}	Расстояние от центра тяжести y_0	$J_{y_1\,мин}$	Расстояние от центра тяжести x_0	$J_{u\ мин}$	$i_{u\ мин}$	Угол наклона оси tg α
	мм			см²	кг	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	3 4	1,49 1,94	1,17 1,52	1,52 1,93	1,01 1,00	0,46 0,57	0,55 0,54	3,26 4,38	1,08 1,12	0,82 1,12	0,49 0,53	0,28 0,35	0,43 0,43	0,382 0,374
4/2,5	40	25	3 4	1,89 2,47	1,48 1,94	3,06 3,93	1,27 1,26	0,93 1,18	0,70 0,69	6,37 8,53	1,32 1,37	1,58 2,15	0,59 0,63	0,56 0,71	0,54 0,54	0,385 0,381

Таблица 4 (продолжение)

№ профилей	Размеры B	Размеры b	Размеры d	Площадь профиля	Вес 1 пог. м	x — x: J_x	x — x: i_x	y — y: J_y	y — y: i_y	$x_1 — x_1$: J_{x_1}	$x_1 — x_1$: Расстояние от центра тяжести y_0	$y_1 — y_1$: $J_{y_1 мин.}$	$y_1 — y_1$: Расстояние от центра тяжести x_0	u — u: $J_{u\ мин}$	u — u: $i_{u\ мин}$	u — u: Угол наклона оси tg α
	мм	мм	мм	см²	кг	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	
4,5/2,8	45	28	3	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382
			4	2,80	2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403
			4	3,17	2,49	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	3,5	3,16	2,48	10,1	1,79	3,30	1,02	20,3	1,80	5,43	0,82	1,95	0,79	0,407
			4	3,58	2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
			5	4,41	3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			5	4,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,72	0,86	0,396
			6	5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386
7/4,5	70	45	4,5	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407
			5	5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			6	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430
8/5	80	50	5	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6	7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386

Таблица 4 (продолжение)

№ профилей	Размеры			Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Справочные величины для осей										
						$x - x$		$y - y$		$x_1 - x_1$		$y_1 - y_1$		$u - u$		
	B	b	d			J_x	i_x	J_y	i_y	J_{x_1}	Расстояние от центра тяжести y_0	$J_{y_1\ мин}$	Расстояние от центра тяжести x_0	$J_{u\ мин}$	$i_{u\ мин}$	Угол наклона оси tg α
	мм			*см*²	*кг*	*см*⁴	*см*	*см*⁴	*см*	*см*⁴	*см*	*см*⁴	*см*	*см*⁴	*см*	
9/5,6	90	56	5,6	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			6	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8	11,18	8,77	90,9	2,85	26,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7	11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10	15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			7	12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,6	28,8	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
			8	16	12,5	256	4	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409

Таблица 4 (продолжение)

№ профилей	Размеры			Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Справочные величины для осей										
						x — x		y — y		$x_1 - x_1$		$y_1 - y_1$		u — u		
	B	b	d			J_x	i_x	J_y	i_y	J_{x_1}	Расстояние от центра тяжести y_0	$J_{y_1 мин}$	Расстояние от центра тяжести x_0	$J_{u\ мин}$	$i_{u\ мин}$	Угол наклона оси tg α
	мм			см²	кг	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	см⁴	см	
16/10	160	100	9	22,9	18	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,2	0,391
			10	25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
			12	30	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14	34,7	27,3	897	5,08	272	2,8	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	28,3	22,2	952	5,8	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12	33,7	26,4	1123	5,77	324	3,1	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392
			12	37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14	43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16	49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410
			16	63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407
			20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

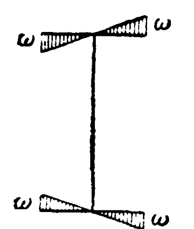
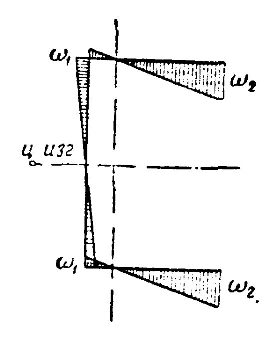


Таблица 5. **Секториальные геометрические характеристики прокатных двутавров (ОСТ 10016-39)**

Номер профиля	Секториальный момент инерции J_ω в $см^6$	Секториальная площадь для крайней точки профиля ω_{max} в $см^2$	Секториальный момент сопротивления W_ω в $см^4$	Момент инерции при чистом кручении $J_к$ в $см^4$	Упругая изгибно-крутильная характеристика $\alpha = \sqrt{\frac{GJ_к}{EJ_\omega}}$ $см^{-1}$
10	644,3	15,25	42,26	2,873	0,04122
12	1 353	20,10	67,33	4,243	0,03457
14	2 560	25,54	100,23	5,911	0,02966
16	4 879	32,25	151,30	8,406	0,02562
18	8 219	38,90	211,28	11,37	0,02295
20*a*	13 121	46,15	284,31	14,81	0,02074
b	13 857	47,05	294,50	17,85	0,02215
22*a*	22 773	55,91	407,33	20,32	0,01844
b	23 930	56,90	420,55	24,08	0,01958
24*a*	33 799	64,48	524,15	25,57	0,01698
b	35 426	65,57	540,25	30,12	0,01800
27*a*	52 987	76,68	690,99	31,93	0,01515
b	55 414	77,92	711,21	37,60	0,01608
30*a*	76 704	88,38	867,93	38,83	0,01389
b	80 114	89,75	892,60	45,78	0,01475
c	83 612	91,13	917,50	55,23	0,01587
33*a*	107 160	100,69	1 064,3	46,19	0,01281
b	111 780	102,21	1 093,6	54,49	0,01363
c	116 520	103,73	1 123,3	65,74	0,01466
36*a*	154 820	115,19	1 344,0	56,85	0,01183
b	161 210	116,85	1 379,6	66,72	0,01256
c	167 760	118,51	1 415,6	79,99	0,01348
40*a*	228 900	134,13	1 706,6	68,75	0,01070
b	237 950	136,00	1 749,6	80,68	0,01137
c	247 210	137,85	1 793,3	96,55	0,01220
45*a*	376 630	159,75	2 357,6	95,31	0,009819
b	390 770	161,86	2 414,4	111,3	0,01041
c	405 220	163,96	2 471,5	131,8	0,01113
50*a*	611 990	187,10	3 270,9	131,2	0,009038
b	633 900	189,44	3 346,2	150,3	0,009504
c	656 270	191,79	3 421,8	174,9	0,01007
55*a*	906 350	216,79	4 180,8	159,9	0,008198
b	937 220	219,36	4 272,5	182,7	0,008617
c	968 720	221,94	4 364,8	211,5	0,009119
60*a*	1 349 900	251,22	5 373,4	195,5	0,007427
b	1 393 200	254,04	5 484,2	221,9	0,007790
c	1 437 300	256,86	5 595,7	255,3	0,008226

Примечание. При вычислении α приняты $G = 800\,000$ *кг/см²*, $E = 2\,100\,000$ *кг/см²*.



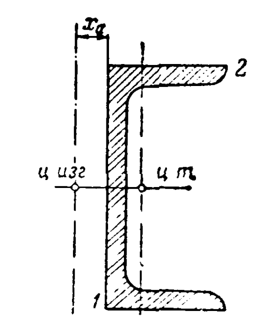


Таблица 6. **Секториальные геометрические характеристики прокатных швеллеров (ОСТ 10017-39).**

Номер профиля	Координаты центра изгиба X_a *см*	Секториальный момент инерции J_ω *см*^{6}	Секториальные площади		Секториальные моменты сопротивления		Момент инерции при чистом кручении $J_к$ *см*^{4}	Упругая изгибно-крутильная характеристика $\alpha = \sqrt{\frac{GJ_к}{EJ_\omega}}$ *см*$^{-1}$
			ω_1 *см*^{2}	ω_2 *см*^{2}	W_{ω_1} *см*^{4}	W_{ω_2} *см*^{4}		
5	1,08	24,91	2,70	4,26	9,22	5,85	1,350	0,1437
6,5	1,15	64,88	3,86	6,36	16,80	10,21	1,497	0,09375
8	1,22	141,8	5,15	8,75	27,57	16,20	1,940	0,07219
10	1,34	354,8	7,19	12,71	49,35	27,92	2,727	0,05411
12	1,48	768,3	9,54	17,31	80,51	44,39	3,634	0,04245
14*a*	1,58	1 512	12,03	22,63	125,74	66,85	4,815	0,03483
b	1,39	1 711	11,46	23,85	149,32	71,75	6,248	0,03730
16*a*	1,68	2 760	14,74	28,63	187,23	96,40	6,306	0,02950
b	1,48	3 099	14,03	30,09	220,87	103,00	8,227	0,03180
18*a*	1,83	4 745	17,68	35,32	268,41	134,34	8,128	0,02555
b	1,57	5 292	16,83	37,02	314,50	142,95	10,50	0,02749
20*a*	1,94	7 698	21,27	42,46	361,95	181,28	9,84	0,02207
b	1,73	8 560	20,24	44,45	422,87	192,57	12,50	0,02359
22*a*	2,07	11 593	24,84	49,60	466,69	233,73	11,66	0,01958
b	1,86	12 863	23,63	51,88	544,42	247,95	14,60	0,02079
24*a*	2,10	15 326	27,48	55,21	557,74	277,59	13,21	0,01812
b	1,88	17 007	26,10	57,75	651,56	294,50	16,47	0,01921
c	1,67	18 640	24,91	60,09	748,35	310,21	21,31	0,02087
27*a*	2,14	24 337	31,85	66,46	764,11	366,19	16,25	0,01595
b	1,91	26 883	30,23	69,39	889,34	387,42	20,34	0,01698
c	1,70	29 355	28,82	72,10	1018,6	407,14	26,34	0,01848
30*a*	2,26	36 645	37,21	76,54	984,87	478,78	20,39	0,01456
b	2,03	40 436	35,23	79,98	1147,8	505,61	25,01	0,01535
c	1,80	44 104	33,59	83,06	1313,0	530,97	31,75	0,01656
33*a*	2,25	52 630	41,39	88,54	1271,7	594,43	24,29	0,01326
b	2,02	57 844	39,27	92,27	1473,2	626,93	29,92	0,01404
c	1,80	62 890	37,44	95,69	1679,8	657,23	38,04	0,01518
36*a*	2,47	92 189	49,50	104,55	1862,2	881,77	38,91	0,01268
b	2,24	100 430	47,30	108,51	2123,4	925,54	46,56	0,01329
c	2,02	108 420	45,36	112,18	2390,2	966,48	57,18	0,01417
40*a*	2,43	148 100	55,78	121,67	2655,1	1217,2	59,74	0,01240
b	2,21	160 100	53,51	125,86	2991,7	1272,1	70,78	0,01298
c	2,00	171 870	51,51	129,80	3336,4	1324,0	85,72	0,01378

Примечание. При вычислении α приняты $G = 800\,000$ *кг/см*^{2}, $E = 2\,100\,000$ *кг/см*^{2}.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЁН.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.